

RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIA POR MODOS DESLIZANTES DE UMA
CLASSE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES INCERTOS VIA REALIMENTAÇÃO
DE SAÍDA

Alessandro Jacoud Peixoto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

Prof. Liu Hsu, Docteur d'Etat

Prof. Fernando Cesar Lizarralde, D.Sc.

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D.Sc.

Prof. Eugenius Kaszkurewicz, D.Sc.

Prof. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, D.Sc.

Prof. Marco Henrique Terra, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

OUTUBRO DE 2007

PEIXOTO, ALESSANDRO JACOUD

Rastreamento de Trajetória por Modos
Deslizantes de uma Classe de Sistemas Não-
Lineares Incertos via Realimentação de Saída
[Rio de Janeiro] 2007

X, 134 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,
Engenharia Elétrica, 2007)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Realimentação de Saída
2. Controle por Modos Deslizantes
3. Observador de Alto Ganho
4. Sistemas Não-Lineares Incertos
5. Modelo de Referência

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Agradecimentos

Agradeço a muitas pessoas, em primeiro lugar aos meus orientadores Liu Hsu e Fernando Lizarralde. Ao prof. Liu Hsu que, supervisionando minha pesquisa, me deu liberdade e me encorajou a caminhar com meus próprios pés. Esforcei-me bastante para chegar ao nível de sua confiança.

Ao amigo Fernando Lizarralde, por despertar meu interesse pela área de controle durante a graduação e pelas diversas conversas esclarecedoras que muito me ajudaram a focar no tema da minha pesquisa.

Ao amigo Ramon R. Costa, que muito me inspirou e me ajudou no desenvolvimento desta Tese e que tem sido um excelente conselheiro.

Aos companheiros do Laboratório de Controle Luciano, Zachy, Eduardo, Lilian, Toni, Josiel, Rodrigo, Paula, Marcos, Veio, Márcia e Wanderley, pela convivência agradável e, em especial, ao amigo Tiago pelo intercâmbio de idéias que foram para lá de fundamentais no desenvolvimento desta Tese.

Gostaria de agradecer também àquelas pessoas da minha vida pessoal que com amor tornaram esta Tese possível. Aos meu pais, Fernando e Tania, e aos meus padrinhos, Wilson e Maria Alice que sempre incentivaram os meus projetos de vida. À minha querida irmã Fernanda, pelo apoio em casa e pela amizade e alegria. Aos meus amigos Mack, Guga, Nunes e Bili pela amizade, fundamental para mim.

Finalmente, agradeço a Deus por ter colocado em minha vida alguém tão especial quanto a minha esposa, Mzinha, que acompanha a minha carreira em pesquisa desde a graduação. Seu apoio foi fundamental para a conclusão desta Tese e, por isso, dedico este trabalho a ela.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIA POR MODOS DESLIZANTES DE UMA
CLASSE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES INCERTOS VIA REALIMENTAÇÃO
DE SAÍDA

Alessandro Jacoud Peixoto

Outubro/2007

Orientadores: Liu Hsu

Fernando Cesar Lizarralde

Programa: Engenharia Elétrica

Esta Tese aborda o controle de sistemas não-lineares incertos via realimentação de saída. São propostas três estratégias para rastreamento de plantas com grau relativo arbitrário, baseadas em modelo de referência e modos deslizantes. Não-linearidades, dependentes do estado e possivelmente descasadas com o sinal de controle, são consideradas como perturbações de uma planta linear. Nenhuma restrição particular é imposta quanto ao crescimento das não-linearidades dependentes da saída. As superfícies de deslizamento são construídas a partir de estimativas baseadas em alto ganho e a amplitude do sinal de controle é gerada por um observador da norma do estado, livre do fenômeno de pico. Inicialmente, é proposta uma estratégia para plantas multivariáveis. Obtém-se apenas rastreamento semi-global e prático. Em seguida, por meio de um observador de alto ganho com ganho variável implementado a partir de sinais mensuráveis, é garantido rastreamento prático e *global* para plantas monovariáveis. Por fim, a hipótese clássica a respeito do conhecimento prévio da direção de controle é removida. Propõe-se uma estratégia baseada em uma função de monitoração, obtendo-se rastreamento semi-global e *exato* por meio de um diferenciador exato e local.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

SLIDING MODE TRACKING CONTROL OF A CLASS OF UNCERTAIN
NONLINEAR SYSTEMS VIA OUTPUT FEEDBACK

Alessandro Jacoud Peixoto

October/2007

Advisors: Liu Hsu

Fernando Cesar Lizarralde

Department: Electrical Engineering

The problem of controlling uncertain nonlinear systems by output-feedback is addressed in this Thesis. Three model-reference tracking sliding mode control (SMC) strategies are designed for plants with arbitrary relative degree. Nonlinearities of a given class are considered as state dependent and possibly unmatched disturbances of a linear plant. No particular growth conditions are imposed on the output dependent nonlinearities. The sliding surfaces are generated from high gain estimates and the control signal amplitude is generated from a norm observer free of peaking phenomenon. At first, an extension of a SMC scheme devised for multi-input-multi-output (MIMO) systems with unitary relative degree is proposed and only semi-global practical tracking is achieved. Then, by means of a high gain observer (HGO) with a time varying gain synthesized from measurable signals, *global* practical tracking is obtained for a class of single-input-single-output (SISO) uncertain nonlinear plants. At last, for the same class of SISO plants, an additional difficult is considered: the classical assumption about the *prior* knowledge of the control direction is removed. A monitoring function is used to overcome this difficult. Semi-global *exact* tracking is achieved by means of a switching strategy based on a locally exact differentiator.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Abreviaturas	x
1 Introdução	1
1.1 Objetivo e Proposta do Trabalho	5
1.2 Revisão da Literatura	5
1.2.1 Controle de Sistemas com Crescimento Linear	6
1.2.2 Controle a Estrutura Variável por Modos Deslizantes	10
1.3 Visão Geral da Tese	14
1.4 Notação e Terminologia	15
1.5 Conceitos Básicos	17
1.5.1 Grau Relativo	17
1.5.2 Forma Normal	18
1.5.3 Dinâmica dos Zeros	20
1.5.4 Sistemas Multivariáveis	21
1.5.5 Equações Diferenciais Descontínuas	22
2 Classe de Sistemas e Formulação do Problema	24
2.1 Hipóteses Básicas	25
2.2 Hipóteses Estruturais	26
2.2.1 Transformação do Subsistema Linear	27
2.2.1.1 Hipótese de Crescimento Linear	29
2.2.2 Equação que Rege a Dinâmica das Derivadas das Saídas	29
2.3 Exemplo da Classe de Sistemas	32
2.4 Modelo de Referência	34
3 Controle por Modo Deslizante para Rastreamento de Trajetória	35
3.1 Equação do Erro de Rastreamento	36
3.2 O Controle Vetorial Unitário (<i>UVC</i>)	37
3.3 Realimentação de Estados	38
3.4 Realimentação de Saída	41
3.4.1 Análise de Estabilidade	41
3.4.2 Projeto do Controlador	43
3.5 Fenômeno de Pico	44
3.6 Estimativas Sem Alto Ganho (Sem Pico)	45

3.6.1	Aproximações por Filtros de Primeira Ordem	45
3.6.2	Estimativas do Estado da Planta e da Perturbação	45
3.6.3	Proposição Auxiliar	48
4	Controle de Plantas Multivariáveis	49
4.1	Formulação do Problema	50
4.2	O Controlador UV-MRAC	50
4.3	Equações de Erros Auxiliares	52
4.3.1	Equação da Variável de Deslizamento	53
4.3.2	Majorantes para a Norma dos Erros Auxiliares	54
4.4	Análise de Estabilidade	55
4.4.1	Realização de Modos Deslizantes Ideais	56
4.5	Projeto das Funções de Modulação	57
4.6	Simulações	58
4.7	Conclusões	59
4.8	Demonstrações	60
4.8.1	Demonstração do Teorema 4.1	60
4.8.2	Demonstração do Teorema 4.2	61
5	Particularização para Sistemas Monovariáveis	62
5.1	Particularização das Hipóteses	62
5.2	Particularização do Modelo de Referência	64
5.3	Reformulação da Equação do Erro	65
5.4	Controle Via Realimentação de Estados	66
5.5	Controle Via Realimentação de Saída	67
5.6	Comentários	67
6	Controle de Plantas Monovariáveis	68
6.1	Formulação do Problema	69
6.2	Controlador e Variável de Deslizamento	70
6.3	Observador de Alto Ganho com Ganho Variável	71
6.3.1	Dinâmica do Erro de Observação	71
6.3.2	O Parâmetro μ Variável	72
6.3.3	Derivada Temporal do Parâmetro μ	74
6.4	Análise de Estabilidade: Propriedades <i>ISS</i>	75
6.4.1	Propriedade ISS de $ \zeta $ para x_e	76
6.4.2	Propriedade ISpS de $ x_e $ para ζ	76
6.4.3	Resultado de Estabilidade GLOBAL	77
6.4.4	Realização de Modo Deslizante Ideal	78
6.5	Projeto do Controlador	78
6.6	Simulações	80
6.7	Conclusões	82
6.8	Demonstrações	83
6.8.1	Demonstração da Proposição 5 – Majorantes Auxiliares	83
6.8.2	Demonstração da Proposição 6 – Existência de t_1	85
6.8.3	Demonstração do Teorema 6.1	87
6.8.4	Demonstração do Corolário 6.1.1	88

7	Controle de Plantas com Direção de Controle Desconhecida	89
7.1	Formulação do Problema e Controlador	90
7.2	Variável de Deslizamento	92
7.2.1	Diferenciador Aproximado	92
7.2.2	Diferenciador Exato: Local e Robusto	93
7.2.3	Diferenciador Exato: Global e Robusto (<i>GREED</i>)	93
7.2.4	Equação da Variável de Deslizamento	94
7.3	Função de Monitoração	95
7.3.1	Majorante para a Norma de $\hat{\sigma}$	95
7.3.2	Implementação da Função de Monitoração	97
7.4	Resultado de Estabilidade SEMI-GLOBAL	98
7.5	Projeto do Controlador	99
7.6	Simulações	99
7.7	Conclusões	101
7.8	Demonstração do Teorema 7.1	103
8	Conclusões e Trabalhos Futuros	106
8.1	Trabalhos Futuros	107
	Apêndices	111
A	Contribuições e Trabalhos Publicados	111
A.1	Contribuições	111
A.2	Trabalhos Publicados	113
B	Utilização da Formulação do MRC	115
B.1	Majorante para o Estado da Planta (Prop. 2)	116
B.2	Expressão Alternativa para a Perturbação d	117
B.3	Majorante para a Perturbação (Prop. 3)	118
C	Lemas Auxiliares	119
D	Propriedades de Funções das Classes \mathcal{K} e \mathcal{KL}	122
E	Obtenção da Dinâmica dos Zeros	123
	Referências Bibliográficas	126

Lista de Figuras

1.1	Forma normal de um sistema linear $G(s)$. Destacam-se o subsistema interno R/N e o subsistema externo $1/Q$	20
4.1	Filtro de avanço a estrutura variável baseado no vetor unitário, bloco \mathcal{L} da Figura 4.2.	50
4.2	UV-MRAC para plantas não-lineares com grau relativo uniforme $\rho \geq 2$. Para simplificar o esquema, a implementação de ϱ_0 foi omitida. A realização do filtro de avanço \mathcal{L} , baseado no vetor unitário, é apresentada na Figura 4.1.	52
4.3	Simulação dos sinais de saída da planta e do modelo de referência.	59
6.1	VS-MRAC global utilizando um HGO para gerar $\hat{\sigma}(t)$. O HGO fornece uma malha de deslizamento ideal (<i>ideal sliding loop</i> - ISL).	71
6.2	Resultados de Simulação ($y(0) = 150$ e $\dot{y}(0) = 0$). (a): y, y_m quando $\mu(t) = \bar{\mu} = 0.005$, (b): y, y_m quando $\mu(t)$ é dado por (6.12) com $\bar{\mu} = 0.005$ e (c): o parâmetro $\mu(t)$ variando no tempo.	82
7.1	SMC via realimentação de saída com um filtro híbrido em avanço de fase (GRED) para compensar o excesso de grau relativo e um esquema de monitoração (φ_m) para ajustar o sinal do controle.	91
7.2	Funções $ \beta $, $\ \beta_t\ $ e f_d	96
7.3	Trajetórias de φ_m e $ \hat{\sigma} $	98
7.4	Resultados de Simulação. (a): estimativa $ \hat{\sigma} $ (-) e função de monitoração φ_m (--), (b): lei de chaveamento α , (c): saída da planta y (-) e saída do modelo de referência y_m (--).	101
7.5	Resultados de Simulação. (a): erro de rastreamento e , (b): estimativa $ \hat{\sigma} $ (-) e função de monitoração φ_m (--).	102
A.1	Interpretação simplificada do <i>backstepping</i> para grau relativo ($\rho = 2$). O bloco C_1 fornece o controle virtual v^* para o subsistema de grau relativo unitário. O bloco C_2 fornece a lei de controle real u como função de $\tilde{v} := v - v^*$, onde v é um sinal filtrado de u , com $a > 0$	113

Abreviaturas

- GAS** : Estabilidade Global Assintótica (*Global-Asymptotic-Stability*)
- GES** : Estabilidade Global Exponencial (*Global-Exponential-Stability*)
- LES** : Estabilidade Local Exponencial (*Local-Exponential-Stability*)
- ISS** : Estável no Sentido Entrada-Estado (*Input-to-State-Stable*)
- ISpS** : Estabilidade Prática no Sentido Entrada-Estado (*Input-to-State-Practical-Stability*)
- UO** : (*Unboundedness Observability*)
- FOAF** : Filtro de Aproximação de Primeira Ordem (*First Order Approximation Filter*)
- HGO** : Observador de Alto Ganho (*High Gain Observer*)
- LI** : Localmente Integrável Segundo *Lebesgue* (*Locally Integrable in the Sense of Lebesgue*)
- HFG** : Ganho de Alta Frequência (*High Frequency Gain*)
- SPR** : Estritamente Real Positivo (*Strictly Positive Real*)
- SMC** : Controle por Modo Deslizante (*Sliding Mode Control*)
- OFSM** : Modo Deslizante via Realimentação de Saída (*Output Feedback Sliding Mode*)
- UVC** : Controle Vetorial Unitário (*Unit Vector Control*)
- VSC** : Controle à Estrutura Variável (*Variable Structure Control*)
- MRC** : Controle por Modelo de Referência (*Model-Reference Control*)
- MRAC** : Controle Adaptativo por Modelo de Referência (*Model Reference Adaptive Control*)
- VS-MRAC** : MRAC e Estrutura Variável (*Variable Structure MRAC*)
- UV-MRAC** : MRAC e Vetor Unitário (*Unit Vector MRAC*)
- LTI** : Linear e Invariante no Tempo (*Linear Time Invariant*)
- BIBO** : Estável no Sentido Entrada-Saída (*Bounded-Input-Bounded-Output*)
- SISO** : Uma Entrada e Uma Saída - Monovariável (*Single-Input-Single-Output*)
- MIMO** : Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas - Multivariável (*Multi-Input-Multi-Output*)

Capítulo 1

Introdução

Em muitas aplicações de controle, modelos para o sistema a ser controlado ora não estão disponíveis, ora são economicamente inviáveis de se obter, ora seus parâmetros não são conhecidos com precisão. Além disso, há casos em que é inevitável a modelagem de não-linearidades presentes no sistema físico e, devido a aspectos técnicos e/ou econômicos, é inviável a medição de todos os estados do sistema.

Por estas razões, o estudo de estratégias de controle via realimentação de saída, i.e., utilizando apenas variáveis medidas, para sistemas não-lineares incertos é relevante do ponto de vista prático.

Por outro lado, este estudo revela também implicações teóricas de valor, mediante a busca de uma classe de sistemas tão ampla quanto possível e de estratégias que utilizam o mínimo de informação sobre o sistema, com possibilidade de fundamentar aplicações práticas no futuro, além de abordar desafios matemáticos importantes.

Esquemas de controle via realimentação de saída para sistemas não-lineares incertos vêm sendo propostos como solução para os clássicos problemas de estabilização, regulação de saída (servomecanismo) e rastreamento de trajetória (Isidori 1995).

Observa-se que a comunidade de controle tem voltado sua atenção para esses problemas buscando desenvolver soluções globais ou semi-globais¹, ampliar a classe de sistemas abordada e reduzir o conjunto de hipóteses necessárias para projeto. De forma geral, resultados globais têm sido sacrificados (semi-global) para ampliar as clas-

¹Neste trabalho, o termo *global* se refere a uma solução (estratégia de controle) obtida independentemente das condições iniciais da planta/controlador, enquanto que *semi-global* se refere a uma solução obtida a partir de um conjunto compacto *arbitrário* de condições iniciais (Khalil & Esfandiari 1993).

ses de sistemas, que vêm sendo caracterizadas por meio de condições dadas em termos de geometria diferencial, como em (Marino & Tomei 1995) e mais recentemente em (Cheng & Lin 2003).

O foco desta Tese é o problema de rastreamento de trajetória. O objetivo é desenvolver novas soluções globais (ou ao menos semi-globais), via realimentação de saída, para uma classe de sistemas não-lineares incertos. Busca-se, também, reduzir o conjunto de hipóteses de projeto, em particular, desconsiderando o prévio conhecimento da *direção de controle*². Entretanto, há dificuldades para se atingir este objetivo.

A primeira delas surge ao se tentar suprir a falta dos estados não medidos, devido à escassez de projetos sistemáticos para observadores de estado quando o sistema apresenta não-linearidades.

A segunda dificuldade diz respeito ao princípio da separação que, em geral, não é aplicável a sistemas não-lineares. Além disso, sistemas não-lineares podem apresentar o fenômeno de escape em tempo finito (Khalil 2002) e, o que é mais grave do ponto de vista de realimentação de saída, o escape pode não ser observado na saída, ou seja, alguns estados podem escapar mantendo a saída limitada, dificultando a solução por realimentação de saída.

Por fim, as incertezas se constituem uma dificuldade adicional, que vem sendo superada com o auxílio de observadores de alto ganho (HGO). Para melhor especificar o escopo desta Tese, três conceitos precisam ser destacados: o de grau relativo, o de dinâmica dos zeros e o de taxa de crescimento.

Grau Relativo e Dinâmica dos Zeros

Para uma função de transferência escalar, o grau relativo é a diferença entre o número de pólos e o número de zeros. A dinâmica dos zeros corresponde à dinâmica que descreve o comportamento interno da planta quando se escolhe a entrada e as condições iniciais de forma a manter a saída identicamente nula. No caso de plantas lineares, esta dinâmica possui autovalores dados pelos zeros da planta.

Com a utilização da teoria de geometria diferencial, diversos conceitos de sistemas lineares foram generalizados para sistemas não-lineares (Marino & Tomei 1995, Sontag

²Para plantas SISO a direção de controle é o sinal do ganho de alta frequência da planta. Significa também o inverso do sinal da realimentação, ou seja: realimentação negativa (positiva) quando a direção de controle for positiva (negativa). A definição correspondente para plantas MIMO será apresentada no Capítulo 4.

1995, Sontag & Wang 1995, Sontag 1998, Khalil 2002), em particular o grau relativo e a dinâmica dos zeros. A Seção 1.5 apresenta estes conceitos de maneira mais precisa.

Em geral, o grau relativo de sistemas não-lineares é uma função do estado do sistema, ou seja, não é necessariamente constante em todo o espaço de estado e, em contraste com sistemas lineares, pode não ser definido. Além disso, o grau relativo e a dinâmica dos zeros são características da planta que não podem ser alteradas por meio de realimentação de saída. Por estas razões, sistemas de fase não-mínima (dinâmica dos zeros instável), com grau relativo desconhecido e variante no espaço de estado são mais difíceis de serem controlados (Isidori 2000), fugindo do escopo deste trabalho.

Por outro lado, já foram desenvolvidas várias estratégias para rastreamento global de sistemas incertos (lineares ou não), de fase mínima (ou com alguma restrição sobre a dinâmica interna) e com grau relativo unitário (Hsu, Costa & Cunha 2003) (Edwards & Spurgeon 1996), incluindo estratégias que desconsideram o prévio conhecimento da *direção de controle* (Drakunov 1993, G. Bartolini & Giacomini 2003, Yan, Hsu, Costa & Lizarralde 2003).

Esta Tese aborda o controle de sistemas não-lineares de *fase mínima* com grau relativo *arbitrário* ($\rho \geq 1$), bem definido e constante em todo o espaço de estado. São considerados sistemas afins no controle, ou seja, sistemas na forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x), \quad (1.1)$$

onde $u \in \mathbb{R}^q$ é a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^q$ é a saída medida, $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado do sistema, $f(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_n(x)]^T \in \mathbb{R}^n$ e $g(x)$ são campos vetoriais suficientemente suaves e $h(x)$ é uma função suave. O conceito de taxa de crescimento, apresentado a seguir, será importante para caracterizar o campo $f(x)$.

Taxa de Crescimento

Os exemplos e contra-exemplos de (Mazenc, Praly & Dayawansa 1994) indicam que o problema de estabilização *global* por realimentação de saída pode ser impossível de ser resolvido se o campo vetorial $f(x)$ crescer muito rápido com respeito aos estados não medidos. Tendo isso em mente, não é surpresa que a maioria das estratégias globais propostas na literatura imponha hipóteses restritivas quanto ao crescimento deste campo vetorial, como por exemplo uma restrição de crescimento linear com relação aos

estados não medidos, do tipo:

$$|f(x)| \leq k_x |x| + \varphi(y), \quad (1.2)$$

onde a constante $k_x > 0$ é denominada de *taxa de crescimento* e $\varphi(y)$ é uma função positiva da saída, possivelmente não-linear. Daqui por diante, plantas da classe (1.1) que satisfaçam (1.2) serão denominadas plantas majoráveis linearmente pelo estado não medido ou plantas com crescimento linear nos estados não medidos ou, simplesmente, plantas com *crescimento linear*.

Embora a maioria dos resultados globais descritos na literatura tenha sido obtida considerando sistemas com crescimento linear, não se pode deixar de mencionar que esforços têm sido dedicados ao desenvolvimento de estratégias para sistemas com crescimento superior ao linear, como em (Praly & Arcak 2004), que trata de sistemas conhecidos, e em (Arcak & Kokotovic 2001), que considera plantas incertas.

Em sua maioria, as não-linearidades mais fortes ocorrem na saída e/ou em estados não medidos de subsistemas que apresentem alguma propriedade de estabilidade, e.g., a propriedade de ser ISS em relação à saída. É o que ocorre com os sistemas em cascata de (Arcak, Angeli & Sontag 2001, Praly & Arcak 2004), com a dinâmica interna dos sistemas abordados em (Jiang, Mareels, Hill & Huang 2004) e em aplicações robóticas que utilizam as propriedades de passividade da dinâmica do robô.

Para casos mais gerais, resultados semi-globais têm sido obtidos com o emprego de observadores de alto ganho (HGO) (Oh & Khalil 1995, Oh & Khalil 1997, Qian 2005). Entretanto, obteve-se rastreamento global em (Gong & Qian 2007) por meio de uma solução que utiliza um observador inerentemente não-linear que permite tratar termos do tipo x_2^α , para $\alpha \in [1, 5/3]$, onde x_2 é um estado não medido.

Visando obter resultados globais, este trabalho considera plantas não-lineares com crescimento linear. O objetivo e a proposta deste trabalho podem agora ser resumidos.

1.1 Objetivo e Proposta do Trabalho

O **objetivo** é resolver o problema de rastreamento exato ou prático³, via realimentação de saída, por meio de soluções globais ou, ao menos, semi-globais. Serão tratadas plantas com fortes não-linearidades na saída, e.g., não-linearidades polinomiais. Portanto, o fenômeno de escape em tempo finito não pode ser descartado, *a priori*. Este trabalho trata de uma subclasse da seguinte classe de plantas:

Classe I : plantas não-lineares, afins no controle, incertas, de fase mínima, com crescimento linear e com grau relativo bem definido, constante e *arbitrário*.

No próximo capítulo, a subclasse de plantas e o problema a ser resolvido serão formulados precisamente. A subclasse considerada cobre uma ampla variedade de plantas não-lineares, como por exemplo, plantas com não-linearidades polinomiais na saída e triangulares no estado não medido.

A revisão da literatura, apresentada na seção a seguir, permite concluir que houve uma crescente utilização de abordagens que conjugam HGO (possivelmente com ganho variante no tempo), algum tipo de adaptação, *backstepping* (Krstić, Kanellakopoulos & Kokotović 1995) e controle de alto ganho para atingir o objetivo acima. Conclui-se também que há aspectos a serem explorados utilizando controle a estrutura variável por modos deslizantes (Yu & Xu 2002), ou simplesmente, controle por modos deslizantes (SMC), principalmente para plantas com crescimento linear.

Propõe-se atingir o objetivo deste trabalho por meio de SMC, considerando o grau relativo conhecido e a direção de controle desconhecida.

1.2 Revisão da Literatura

Nesta seção será apresentado um histórico, a fim de situar a contribuição desta Tese. Inicialmente apresenta-se uma revisão bibliográfica destacando as classes de sistemas que vêm sendo abordadas na literatura, tanto no contexto de estabilização quanto no de regulação e de rastreamento (Seção 1.2.1).

³Muitas vezes, o rastreamento é obtido não no sentido exato (assintótico), denominando-se *rastreamento prático* (*practical tracking*) quando for suficiente a especificação de uma tolerância para o erro de rastreamento (erro entre a trajetória desejada e a saída da planta), como em: (Gong & Qian 2007), no controlador denominado de λ -*tracking* (Bullinger & Allgower 2005) e no controlador a estrutura variável de (Hsu, Lizarralde & Araújo 1997).

Por fim, apresenta-se um resumo da literatura de SMC via realimentação de saída (Seção 1.2.2), seguido das estratégias que ignoram o prévio conhecimento da direção de controle, com a finalidade de deixar claro o ponto de partida deste trabalho.

1.2.1 Controle de Sistemas com Crescimento Linear

Duas são as principais estratégias utilizadas para o controle via realimentação de saída de plantas incertas com *crescimento linear*: as adaptativas e as robustas. Dentre os esquemas adaptativos, destaca-se o controle adaptativo por modelo de referência (MRAC) que utiliza apenas informação de entrada e saída (Sastry & Bodson 1989, Narendra & Annaswamy 1989, Ioannou & Sun 1996), onde, inicialmente, apenas plantas lineares incertas e de fase mínima foram consideradas.

A partir de (Krstić et al. 1995), houve um crescente interesse pelo controle adaptativo de sistemas não-lineares, principalmente após o desenvolvimento da técnica denominada de *backstepping*, originalmente concebida sob a hipótese de acesso completo aos estados de plantas “triangulares”, onde destacam-se as formas: *strict feedback* e sua versão estendida (Freeman & Kokotović 1996).

A versão do *backstepping – observer backstepping* – que utiliza apenas realimentação de saída foi desenvolvida em (Krstić et al. 1995, Capítulo 7) para plantas que possam ser transformadas para a forma *output feedback* (Krstić et al. 1995, pp. 291) ou para a forma *parametric output feedback* (Krstić et al. 1995, pp. 307). Em ambas as formas, as não linearidades dependem apenas da saída, sendo que na última, incertezas paramétricas são consideradas. Nesta linha, em (Marino & Tomei 1995, Capítulo 7), considera-se uma classe de sistemas não-lineares, observáveis e de fase mínima em que as não-linearidades passam a depender somente da saída após uma transformação de coordenadas apropriada.

Os métodos de estabilização robusta de (Teel & Praly 1994) e (Marino & Tomei 1993b, Marino & Tomei 1995) e as técnicas de estabilização robusta de (Freeman & Kokotović 1993), são exemplos de abordagens via realimentação de saída que permitem considerar incertezas paramétricas figurando de forma não-linear. Foram abordadas

plantas monovariáveis ($q = 1$) da classe (1.1) com $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tais que:

$$\dot{x} = \mathcal{A}x + \phi(y, \theta) + \mathcal{B}(\theta)k(y)u, \quad y = \mathcal{C}x, \quad (1.3)$$

onde $k(y)$ é conhecido, θ é um vetor de parâmetros incertos, ϕ é uma função não-linear,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & I_{(n-1) \times (n-1)} & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & b_\rho(\theta) & \dots & b_n(\theta) \end{bmatrix}^T, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

e ρ é o grau relativo. Normalmente, considera-se que são conhecidos limitantes superiores das não-linearidades.

Considerando que as incertezas paramétricas figurem de forma linear e que as não-linearidades sejam conhecidas, o problema de rastreamento global via realimentação de saída foi resolvido em (Marino & Tomei 1993a, Marino & Tomei 1993b) por meio de uma estratégia baseada em observadores adaptativos. Foram tratados sistemas na forma (*parametric output-feedback* (Krstić et al. 1995)):

$$\dot{x} = \mathcal{A}x + \varphi_0(y) + \sum_{i=1}^p \theta_i \varphi_i(y) + \mathcal{B}k(y)u, \quad y = \mathcal{C}x, \quad (1.4)$$

onde $\forall i \in \{1, \dots, p\}$: θ_i é um parâmetro incerto e φ_i (incluindo φ_0) são funções não-lineares conhecidas.

De forma geral, o controle de sistemas não-lineares incertos utilizando apenas informação de saída tem sido restrito a classes ainda bastante particulares. Pesquisadores seguiram no sentido de ampliar a classe de sistemas. Estratégias globais/semi-globais começaram a ser desenvolvidas para sistemas onde a não-linearidade é “triangular” nos estados não medidos e possui crescimento linear. Deste modo, permite-se incertezas paramétricas multiplicando estados não medidos e não somente funções da saída y .

Em (Lei & Lin 2006b), foram consideradas não-linearidades majoráveis linearmente e de forma triangular nos estados não medidos, como por exemplo:

$$f(x) = \mathcal{A}x + \phi(x), \quad |\phi_i(x)| \leq k_x(|x_1| + \dots + |x_i|) + \varphi(y), \quad (1.5)$$

onde $\phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]^T \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e φ é uma função escalar e positiva. Note que, ϕ não precisa, necessariamente, ser triangular com respeito a x . Permite-se, por exemplo, que ϕ_1 seja dado por $\phi_1 = x_1 + \sin(x_2)$.

Soluções envolvendo o uso de um controlador linear de alto ganho em conjunto com um HGO linear vêm sendo propostas para essas classes de sistemas. Em geral, quando k_x é constante e conhecido, HGO com ganho constante tem se mostrado suficiente (Qian & Lin 2002). No entanto, para taxas de crescimento constantes, porém desconhecidas, parece ser necessário fazer o ganho do HGO variar (Lei & Lin 2006b).

Recentemente, sistemas com taxa de crescimento $k_x(y)$ dependente da saída também passaram a ser considerados (Praly 2001, Praly & Jiang 2004, Lei & Lin 2006a, Krishnamurthy, Khorrami & Jiang 2002). Surgiram soluções que utilizam tanto HGO com ganho variante no tempo (Qian, Schrader & Lin 2003) (independentemente da dinâmica do sistema) quanto variando de forma dinâmica, e.g., por meio de uma equação de Riccati acionada pela taxa de crescimento $k_x(y)$ (Praly 2001, Lei & Lin 2005, Krishnamurthy & Khorrami 2002, Krishnamurthy & Khorrami 2003).

Vale ressaltar que estratégias de alto ganho vêm sendo utilizadas desde (Khalil & Saberi 1987, Saberi & Lin 1990), para sistemas não-lineares de fase mínima, com grau relativo arbitrário, direção de controle conhecida e com crescimento linear em todos os estados (globalmente Lipschitz).

Em (Lei & Lin 2005, Lei & Lin 2006a) e (Praly & Jiang 2004), regulação global e robusta foi obtida por meio de uma realimentação (linear) de estados estimados por um HGO e em (Krishnamurthy & Khorrami 2007), conjugando-se HGO com ganho variável e *backstepping*. O problema de estabilização global foi abordado em (Choi & Lim 2005, Lei & Lin 2006b).

Estratégias para Rastreamento

Pode-se concluir do histórico apresentado até o momento que a maioria dos trabalhos que tratam de sistemas com crescimento linear propõe esquemas adaptativos ou robustos (via realimentação de saída) como solução para o problema de estabilização/regulação global ou semi-global. Dentre eles, predominam esquemas que combinam alto ganho, *backstepping* e estimativas fornecidas por observadores de alto ganho, possivelmente com ganho variante no tempo.

O problema de rastreamento tem sido abordado por meio de estratégias que o transformam em um problema de estabilização ou de regulação do sistema que rege o erro de rastreamento. Essa é a abordagem utilizada nesta Tese.

Seguindo esta abordagem, em (Krishnamurthy et al. 2002), o problema de rastreamento foi resolvido, mas apenas plantas conhecidas foram tratadas. Ainda nesta linha, em (Krishnamurthy & Khorrami 2002, Krishnamurthy & Khorrami 2003), propõe-se uma solução para rastreamento de sistemas incertos baseada em alto ganho. No entanto, além da análise ser muito complexa, os autores apresentam apenas resultados de estabilização de sistemas variantes no tempo por meio de alto ganho e HGO com ganho variando dinamicamente. Eles alegam que seus resultados podem ser estendidos para rastreamento.

Em (Qu, Dorsey & Dawson 1994), foi proposta uma estratégia robusta para rastreamento, denominada de *Model Reference Robust Control* (MRRC), que utiliza *backstepping*. Do ponto de vista teórico, alta precisão pôde ser obtida. Porém, a magnitude do sinal de controle é função direta do inverso do parâmetro que deve ser feito pequeno para se obter alta precisão. Buscando melhorar o desempenho do MRRC, uma solução alternativa foi desenvolvida em (Chen, Tsuruoka, Ishida & Fukuda 1997) sob a forte hipótese do conhecimento do ganho de alta frequência de um subsistema linear considerado. Ainda buscando melhorar o conservadorismo do MRRC, em (Yan & Xu 2004b), é proposto um projeto alternativo (via *backstepping*) que reduz a amplitude do sinal de controle, mas é baseado em alto ganho linear, o que ainda pode acarretar excessivos sinais de controle.

Backstepping foi mais uma vez utilizado em (Chen & Xu 2001). Em (Bullinger & Allgower 2005), foi proposto um controlador que utiliza HGO e uma realimentação de alto ganho, com ambos os ganhos adaptativos, para resolver o problema de rastreamento prático.

A Tabela 1.1 apresenta um resumo que destaca a classe de não-linearidades e os problemas de controle abordados. Nota-se que poucas são as soluções, que utilizam apenas informação da saída, para o problema de rastreamento global/semi-global de sistemas não-lineares incertos com crescimento linear. A marcação com \times indica o problema e a classe de não-linearidades tratados nesta Tese. Trata-se de uma classe de plantas com não-linearidades que satisfazem uma condição similar a (1.2). É mais geral

TABELA 1.1: Resumo da revisão bibliográfica organizado de acordo com o problema de controle (**Estab.** - estabilização, **Reg.** - regulação e **Rastr.** - rastreamento) e a classe de não-linearidades. Destaca-se com um \times onde o trabalho desta Tese se situa.

Restrição	Estab./Reg.	Rastr.
$\phi_i(x) = \varphi_i(y)$	(Krstić et al. 1995, Marino & Tomei 1995, Teel & Praly 1994, Freeman & Kokotović 1993)	(Marino & Tomei 1995, Capítulo 7)
$ \phi_i(x) \leq \varphi_i(y)$		(Qu et al. 1994, Bullinger & Allgower 2005, Chen & Xu 2001)
$ \phi_i(x) \leq k_x(x_1 + \dots + x_i) + \varphi(y)$ $ \phi(x) \leq k_x x + \varphi(y)$	(Qian & Lin 2002, Lei & Lin 2006b)	\times
$ \phi_i(x) \leq k_x(y) x + \varphi(y)$	(Praly 2001, Choi & Lim 2005, Lei & Lin 2005, Lei & Lin 2006a, Praly & Jiang 2004)	(Krishnamurthy & Khorrami 2002, Krishnamurthy & Khorrami 2003)

do que a condição (1.5) por não impor que ϕ nem o seu majorante sejam triangulares no estado não medido. Porém, é mais particular por impor que a taxa de crescimento seja constante com majorante superior conhecido.

Com as estratégias de SMC via realimentação de saída propostas neste trabalho é possível obter boa precisão (ou até exatidão) no rastreamento sem necessitar de excessivos sinais de controle. E mais, utilizando análise por pequenos ganhos, tanto o projeto quanto a análise tornam-se mais simples quando comparados com soluções robustas baseadas em *backstepping*.

Além disso, apesar do esforço crescente de melhorar o transitório de sistemas adaptativos, SMC apresenta vantagens com respeito ao transitório e à robustez. No entanto, há um ônus: contornar uma possível ocorrência do conhecido fenômeno de *chattering*.

1.2.2 Controle a Estrutura Variável por Modos Deslizantes

O controle a estrutura variável (VSC) é caracterizado por uma estratégia de chaveamento entre sistemas com estruturas diferentes gerando uma lei de controle descontínua. Sob determinadas condições, além das trajetórias características dos sistemas chaveados, um novo movimento no espaço de estado pode ser criado denominado de *modo*

deslizante (Emelyanov 1970, Itkis 1976, Utkin 1992). Neste caso, o VSC é denominado de SMC.

A estratégia de chaveamento é desenvolvida de tal forma que as trajetórias do sistema alcancem e mantenham-se em uma superfície no espaço de estado (*superfície de deslizamento*), especificada conforme um comportamento dinâmico desejado (Emelyanov 1970, Utkin 1992).

Uma vez que o modo deslizante é atingido nesta superfície, pode-se garantir um desempenho invariante do sistema em malha fechada (**propriedade da invariância**) com respeito à incertezas da planta e distúrbios de entrada.

Sistemas a estrutura variável oferecem vantagens, tais como: robustez com respeito a incertezas paramétricas, perturbações casadas com o sinal de controle e dinâmicas não-modeladas, além de apresentar bom comportamento transitório.

Entretanto, o VSC convencional requer que o estado completo do sistema esteja disponível (Utkin 1978). Além disso, uma grande dificuldade, freqüentemente apontada por vários autores, é a possibilidade da ocorrência do fenômeno de *chattering* (Utkin 1992), que consiste em uma oscilação de alta freqüência do sinal de controle devido a imperfeições do chaveamento, resultando no *modo deslizante real* (Utkin 1992).

No modo deslizante *ideal*, a freqüência de chaveamento é infinita, enquanto que no deslizamento *real*, o controle oscila em alta freqüência, porém finita. É evidente que freqüência infinita não é realizável em situações práticas. Sendo assim, o deslizamento será referido como ideal quando a freqüência de chaveamento for muito maior do que a banda passante do sistema.

SMC via Realimentação de Saída

VSC utilizando apenas informação de saída foi desenvolvido inicialmente utilizando observadores assintóticos (Bondarev, Bondarev, Kostyleva & Utkin 1985). Para abordar sistemas lineares e não-lineares *incertos*, observadores baseados em modos deslizantes (Slotine, Hedrick & Misawa 1987, Walcott & Žak 1988, Edwards & Spurgeon 1998) e HGOs (Emelyanov, Korovin, Nersisian & Nisenzon 1992, Esfandiari & Khalil 1992, Oh & Khalil 1995, Lu & Spurgeon 1999) também foram desenvolvidos.

Na maior parte das referências citadas, aborda-se o problema de estabilização por realimentação de saída (Walcott & Žak 1988, Žak & Hui 1993, Oh & Khalil 1995). O

problema de rastreamento de trajetória (Oh & Khalil 1997), em particular especificado através de um modelo de referência, foi introduzido na literatura de VSC em (Young 1977), supondo acessíveis os estados da planta. O caso de realimentação apenas da saída foi considerado em (Ambrosino, Celentano & Garofalo 1984, Bartolini & Zolezzi 1988, Narendra & Annaswamy 1989, Hsu & Costa 1989, Hsu, Araújo & Costa 1994), utilizando a estrutura do MRAC (Sastry & Bodson 1989).

Seguindo esta abordagem, o controlador adaptativo por modelo de referência e a estrutura variável (VS-MRAC - *variable structure model reference adaptive control*), de (Hsu et al. 1997), foi aplicado a sistemas SISO e lineares. Neste caso, observadores explícitos de estado não são utilizados, e em seu lugar, utiliza-se filtros de avanço de fase (derivadores sucessivos), o que parece ser mais natural para sistemas incertos, assim como utilizar HGOs⁴.

O caso multivariável foi abordado em (Tao & Ioannou 1989, Chien, Sun, Wu & Fu 1996) para plantas lineares. Em (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002), através do controle vetorial unitário (Gutman & Leitmann 1975, Gutman 1979), a aplicação do VS-MRAC foi estendida para sistemas lineares multivariáveis, dando origem ao MRAC e vetor unitário (*unit vector model-reference adaptive control* – UV-MRAC).

A partir do trabalho desenvolvido em (Min & Hsu 2000), o VS-MRAC (originalmente concebido para plantas lineares) foi estendido para o controle de uma classe de sistemas não-lineares SISO com grau relativo igual ou inferior a dois. Posteriormente, em (Hsu et al. 2003), o UV-MRAC foi reprojetoado para sistemas multivariáveis e não-lineares com grau relativo unitário.

É importante salientar que tanto filtros em avanço quanto HGOs podem provocar o indesejável fenômeno de pico (*peaking phenomena*) nos sinais do controlador (Sussmann & Kokotović 1991), podendo degradar o desempenho do sistema, ou pior, levar à instabilidade (Khalil 2002).

Em (Khalil & Esfandiari 1993) e (Oh & Khalil 1997), atenua-se o fenômeno de pico por meio de saturação do sinal de controle, mas apenas resultados semi-globais foram obtidos. Além disso, esta estratégia pode prejudicar consideravelmente o transitório quando se deseja aumentar a região de atração. Os controladores inspirados na es-

⁴Vale ressaltar que ignorando a entrada do HGO relativa ao controle u , HGO e derivadores sucessivos (filtro em avanço) são estruturas bastante similares (Khalil 2002).

trutura do VS-MRAC (incluindo as estratégias deste trabalho) evitam o fenômeno de pico sem saturar o sinal de controle porque sua magnitude depende apenas de sinais medidos ou de estimativas que não são baseadas em alto ganho.

Estratégias sem Informação da Direção de Controle

Um desafio adicional para o controle de sistemas incertos é desconsiderar o prévio conhecimento da direção de controle. Problemas como frenagem em sistemas ABS (*Antilock Braking Systems*) (Drakunov, Özgüner, Dix & Ashrafi 1994, Drakunov, Özgüner, Dix & Ashrafi 1995) e controle multivariável por servovisão quando não se conhece o ângulo de rotação da câmera em torno do eixo óptico (Oliveira, Hsu & Peixoto 2006, Zengeroglu, Dawson, de Queiroz & Behal 1999) são exemplos práticos em que a direção de controle é desconhecida.

Destacam-se ainda o problema de controle de torque em acionamentos elétricos (Drakunov 1993) e o controle tolerante a falhas, onde um sistema supervisorio deve ser projetado de modo a tratar as mudanças no processo controlado (Frank, Steven & Birgit 2000). Outros exemplos são sistemas mecânicos em robótica, onde a variável de controle é a magnitude da força aplicada, enquanto sua direção depende das posições, velocidades e de diferentes fatores externos. Nesses sistemas, ocasionalmente, torna-se inviável ou mesmo indesejável o uso dessas informações para o projeto do controlador e assim prefere-se ter um esquema de controle onde essas medidas não sejam necessárias (Drakunov 1993).

De uma forma geral, o controle de sistemas sem o conhecimento da direção de controle tem atraído a atenção da comunidade de controle adaptativo desde o começo dos anos 80 (Morse 1982). Uma solução surgiu em (Nussbaum 1983), onde o então denominado ganho de *Nussbaum* tornou-se uma ferramenta padrão (Mudgett & Morse 1985), utilizada recentemente em (Y. Zhang & Soh 2000), (Imai, Costa & Hsu 2001) e (Jiang et al. 2004).

Embora, teoricamente, esta abordagem possa levar à solução rigorosa do problema, ela também resulta em um comportamento transitório muitas vezes inaceitável além de acarretar problemas de implementação (Mudgett & Morse 1985, Fu & Barmish 1986).

Para o SMC, poucos resultados estão disponíveis na literatura. Em (Drakunov 1993), um controlador por modos deslizantes com realimentação de estado foi utilizado

para uma ampla classe de sistemas não-lineares incertos. Em (G. Bartolini & Giacomini 2003), foi proposto um esquema com observador por modos deslizantes para sistemas não-lineares incertos de primeira ordem, onde bons transitórios são obtidos quando comparados com os resultados conseguidos com o ganho de Nussbaum.

Vale mencionar que, no contexto de algoritmos de otimização com função objetivo não diferenciável, encontra-se também conexão entre sistemas por modos deslizantes e direção de controle desconhecida (ou variante), onde problemas de otimização são solucionados variando a direção de busca (Korovin & Utkin 1974, Teixeira & Žak 1998).

Um esquema utilizando SMC e realimentação de saída para rastreamento de plantas lineares incertas foi introduzido em (Yan et al. 2003) utilizando um algoritmo de chaveamento baseado em uma função de monitoração para o erro de saída. Um controlador similar foi apresentado para sistemas não-lineares em (Yan & Xu 2004a) onde a abordagem do MRRC (Qu et al. 1994) foi adotada. Entretanto, em ambos (Yan et al. 2003) e (Yan & Xu 2004a), considera-se que a planta possua grau relativo unitário.

A Tabela 1.2 apresenta um resumo da revisão bibliográfica focando o SMC para rastreamento de plantas não-lineares com e sem o conhecimento da direção de controle.

TABELA 1.2: Resumo da revisão bibliográfica acerca do SMC via realimentação de saída para rastreamento de trajetória de sistemas não-lineares. Destaca-se com um \times onde o trabalho desta Tese se situa. (ρ é o grau relativo).

Grau Relativo	Global	Semi-Global
Direção de Controle Conhecida		
$\rho = 1$ e 2	(Min & Hsu 2000, Hsu et al. 2003)	
$\rho > 1$	\times -SISO	\times -MIMO (Oh & Khalil 1997)
Direção de Controle Desconhecida		
$\rho = 1$	(G. Bartolini & Giacomini 2003, Yan et al. 2003, Yan & Xu 2004a)	
$\rho > 1$		\times -SISO

1.3 Visão Geral da Tese

No **Capítulo 2**, o problema de rastreamento abordado nesta Tese é definido precisamente junto com a classe de sistemas e o conjunto de hipóteses necessárias, onde se

destaca que a taxa de crescimento é linear e constante. No **Capítulo 3**, o problema de rastreamento é transformado em um problema de regulação de um sistema com perturbações variantes no tempo. As estratégias de controle propostas são detalhadas nos **Capítulos 4, 6 e 7**. O problema e a classe de plantas são reformulados para o caso monovariável, no **Capítulo 5**. Conclusões sobre o trabalho e propostas para trabalhos futuros são apresentados no **Capítulo 8**. Para facilitar a leitura, o **Apêndice** será destinado a detalhes técnicos. Além disso, um resumo das contribuições obtidas durante o desenvolvimento desta Tese e dos trabalhos publicados encontram-se no Apêndice.

1.4 Notação e Terminologia

O máximo intervalo de tempo de definição de uma dada solução da equação diferencial que rege a dinâmica da planta em malha fechada é representado por $\mathcal{I}_0 := [0, t_M)$, onde t_M pode ser finito ou infinito. Para qualquer $t_* \in \mathcal{I}_0$ seja $\mathcal{I}_* := [t_*, t_M)$.

A norma Euclidiana de um vetor x e a correspondente norma induzida de uma matriz A são denotadas por $|x|$ and $|A|$, respectivamente, enquanto que a norma \mathcal{L}_{∞} de um sinal $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é definida como em (Ioannou & Sun 1996) e descrita por:

$$\|x_{t,t_*}\| := \sup_{t_* \leq \tau \leq t} |x(\tau)|.$$

Para $t_* = 0$ a notação $\|x_t\|$ é adotada. Utiliza-se $\lambda[A]$ para denotar o espectro de uma matriz A e $\lambda_m[A] := \max_i \{Re\{\lambda[A]\}\}$.

Uma função $\Psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ pertence à classe \mathcal{K} se for contínua, crescente e $\Psi(0) = 0$. Diz-se que $\Psi(a) \in \mathcal{K}_{\infty}$ se $\Psi(a) \in \mathcal{K}$ e $\lim_{a \rightarrow +\infty} \Psi(a) = +\infty$. Uma função $\Pi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ pertence à classe \mathcal{KL} se, para cada $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\Pi(\cdot, t) \in \mathcal{K}$ e, para cada $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\Pi(a, \cdot)$ é decrescente com $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Pi(a, t) = 0$. As definições de funções \mathcal{K} , \mathcal{K}_{∞} e \mathcal{KL} estão de acordo com (Khalil 2002, p. 144).

O símbolo “ s ” representa tanto a variável de Laplace quanto o operador diferencial “ d/dt ”, de acordo com o contexto. Assim como em (Ioannou & Sun 1996), a saída y de um sistema linear e invariante no tempo (LTI) com função de transferência $H(s)$ e entrada u é denotada por $H(s)u$. A convolução $h(t) * u(t)$, sendo $h(t)$ a resposta impulsiva de $H(s)$, será representada eventualmente por $H(s) * u$.

Seja (A_h, B_h, C_h, D_h) uma realização para o sistema LTI, com estado x_h . Esta representação para a convolução é útil principalmente quando o sistema LTI for BIBO estável pois, neste caso, a saída y pode ser representada por $y = H(s) * u + \pi$, com $\pi = C_h e^{A_h(t-t_*)} x_h(t_*)$ sendo um termo exponencialmente decrescente. Isto permite obter um majorante para $|y|$ da forma:

$$|y| \leq \|H(s)\|_\infty \|u_{t,t_*}\| + k_h |x_h(t_*)| e^{-\gamma_h(t-t_*)}, \quad \forall t \in \mathcal{I}_*,$$

onde $\|H(s)\|_\infty = \int_0^\infty |h(\tau)| d\tau$ é a norma \mathcal{H}_∞ de $H(s)$ ⁵, $k_h > 0$ é uma constante positiva apropriada e $0 < \gamma_h < \lambda_m[A_h]$. O símbolo Π representará uma função \mathcal{KL} genérica:

$$\Pi(\cdot, t) = \Psi(\cdot) e^{-\gamma_\pi(t-t_*)}, \quad \forall t \in \mathcal{I}_*,$$

onde $\gamma_\pi > 0$ é uma constante genérica e $\Psi \in \mathcal{K}_\infty$ é função da norma dos estados (em $t = t_*$) de filtros BIBO estáveis utilizados na implementação dos controladores propostos nesta Tese. Este termo será precisamente especificado nos Capítulos 4, 6 e 7. Eventualmente, será evidenciada apenas a dependência do tempo, i.e., $\Pi(t)$.

Dados um campo vetorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma função escalar diferenciável $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a derivada direcional de $h(x)$ ao longo de $f(x)$ é definida por (Khalil 2002, pp. 510) (Isidori 1995, pp. 8):

$$L_f h(x) := \frac{\partial h}{\partial x} f(x), \quad \frac{\partial h}{\partial x} := \left[\frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \right],$$

com $x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$. As seguintes notações serão utilizadas:

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial [L_f h]}{\partial x} g(x), \quad L_f^k h(x) = \frac{\partial [L_f^{k-1} h]}{\partial x} f(x),$$

sendo que $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial, $k = 1, 2, \dots$ e $L_f^0 h(x) = h(x)$. Frequentemente omite-se a variável x , ou seja, escreve-se simplesmente $L_f h, L_f^k h$ e $L_g L_f h$.

Diz-se que uma constante positiva k é de ordem $\tau \in \mathbb{R}^+$ quando existir outra constante positiva \bar{k} , independente de τ , que satisfaça $k \leq \tau \bar{k}$. O símbolo $\mathcal{O}(\tau)$ será utilizado para representar uma constante genérica de ordem τ .

⁵Ver (Desoer & Vidyasagar 1975) para maiores detalhes.

1.5 Conceitos Básicos

Esta seção apresenta resumidamente os conceitos básicos utilizados nesta Tese, que estão bem apresentados nos livros (Isidori 1995, Khalil 2002, Utkin 1992) e em (Hsu & Costa 1996). As definições de ISS e ISpS encontram-se em (Sontag & Wang 1995).

1.5.1 Grau Relativo

Como já dito na introdução, para uma função de transferência escalar, o grau relativo é a diferença entre o número de pólos e de zeros. Também é o número de vezes que a saída $y(t)$ precisa ser diferenciada em relação ao tempo até que a entrada u apareça. Para uma representação em espaço de estado (A, B, C) de um sistema com função de transferência estritamente própria, utiliza-se os parâmetros de Markov⁶ para definir o grau relativo (ρ). Se $CB \neq 0$ então $\rho = 1$, $\rho = 2$ se $CB = 0$ e $CAB \neq 0$, etc.

Vale lembrar que o grau relativo de sistemas não-lineares pode não ser definido. Para um sistema não-linear afim no controle como em (1.1), monovariável ($q = 1$), o grau relativo em um ponto x^o é igual a um se $L_g h \neq 0$ em $x = x^o$. Isto se deve pelo fato de que

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = L_f h + L_g h u,$$

e, portanto, a entrada u aparecerá na expressão de \dot{y} , se o “coeficiente” $L_g h$ for diferente de zero. Se $L_g h$ for nulo, pode-se derivar \dot{y} em relação ao tempo uma vez mais e verificar se a entrada u aparece na expressão de \ddot{y} , etc. O grau relativo é dito *uniforme* (Isidori 1995) (neste trabalho será denominado também de *global*) se for bem definido e constante em todo o espaço de estado ($\forall x^o \in \mathbb{R}^n$).

Será adotada a versão multivariável da noção de grau relativo de sistemas não-lineares apresentada em (Isidori 1995, pp. 220) e repetida, a seguir, por conveniência. Considere o sistema não-linear multivariável (1.1) reescrito na seguinte forma:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^q g_i(x) u_i, \quad y_i = h_i(x), \quad (1.6)$$

onde g_i , h_i , u_i e y_i são componentes de g, h, u e y respectivamente. O sistema (1.6)

⁶Os parâmetros de Markov $g_i := CA^{i-1}B$ são definidos de forma única pela matriz de transferência do sistema $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, por meio da expansão $G(s) = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i s^{-i}$ (Kailath 1980).

possui grau relativo vetorial $\{\rho_1, \dots, \rho_q\}$ em $x = x^o$ se:

(i) Para todo x em uma vizinhança de $x = x^o$, tem-se: $L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0, \forall i, j \in \{1, \dots, q\}, \forall k \in \{0, \dots, \rho_i - 2\}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) A matriz

$$K_{px} := \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_q} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_q} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_q-1} h_q(x) & \dots & L_{g_q} L_f^{\rho_q-1} h_q(x) \end{bmatrix}$$

for invertível para $x = x^o$.

Diz-se que o grau relativo é *global* se (i) e (ii) forem válidas $\forall x^o \in \mathbb{R}^n$ e *uniforme* quando, além de global, as seguintes igualdades se verificarem $\rho_1 = \dots = \rho_q$. Quando o sistema (1.6) é linear ($f(x) = Ax, g(x) = B$ e $h(x) = C$) e o grau relativo é uniforme e igual a ρ , a condição (i) pode ser expressa por meio dos parâmetros de Markov $CB \equiv CAB \equiv \dots \equiv CA^{\rho-2}B \equiv 0$ e a matriz K_{px} corresponde ao ganho de alta frequência da planta que é dado por $K_{px} = K_p = CA^{\rho-1}B$ (invertível). A noção de que o grau relativo corresponde ao número de vezes que se deve diferenciar a saída até o controle aparecer, pode ser facilmente generalizada para o caso multivariável. Neste trabalho, será considerada uma versão mais geral de (i) e (ii), onde serão considerados sistemas variantes no tempo.

1.5.2 Forma Normal

Considere a seguinte mudança de coordenadas que leva o estado x do sistema monovariável (1.1) para o estado $\bar{x} = [\eta^T \ \xi^T]^T$, com η e ξ definidos por:

$$\eta := T_\eta(x) \quad \text{e} \quad \xi = T_\xi(x) := \left[h \quad L_f h(x) \quad L_f^2 h(x) \quad \dots \quad L_f^{\rho-1} h(x) \right]^T, \quad (1.7)$$

onde $T_\eta(x) \in \mathbb{R}^{n \times n - \rho}$ é uma função apropriada. Pode-se mostrar por meio do Teorema de Frobenius⁷ que o sistema (1.1) possuir grau relativo ρ em $x = x^o$ é uma condição suficiente para encontrar T_η de tal forma que a transformação $T_n := \left[T_\eta^T \quad T_\xi^T \right]^T$ seja

⁷Ver (Isidori 1995, Proposição 4.1.3, pp 141).

um difeomorfismo local ($x = x^o$), portanto, uma transformação de coordenadas na vizinhança de $x = x^o$.

Além disso, pode-se garantir que existe $T_\eta(x) = [T_{\eta_1}(x) \ \dots \ T_{\eta_{n-\rho}}(x)]^T$ tal que $L_g T_j = 0$ para $j = 1, \dots, n - \rho$ e para todo x em torno de x^o .

Note que $y^{(i)} = L_f^i h = \xi_i$, $i = 0, 1, \dots, \rho$ e que para $j = 1, \dots, n - \rho$, tem-se:

$$\frac{dT_{\eta_j}}{dt} = \frac{\partial T_{\eta_j}}{\partial x} [f + gu] = L_f T_{\eta_j} + \underbrace{L_g T_j}_{=0} u = L_f T_{\eta_j}.$$

Nessas novas coordenadas, diz-se que o sistema se encontra na *forma normal* (Isidori 1995, Khalil 2002), dividindo o sistema original em um subsistema *interno*

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi), \quad (1.8)$$

e um subsistema *externo*

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{\rho-1} &= \xi_\rho, \\ \dot{\xi}_\rho &= L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) u, \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde x pode ser escrito em função de η e ξ por meio da inversa do difeomorfismo local $T_n(x)$. Para obter uma forma normal global não basta que o grau relativo seja uniforme (global), é necessário T_n ser um difeomorfismo global. Para tanto, de acordo com (Khalil 2002), uma condição suficiente é o jacobiano $\partial T_n(x)/\partial x$ ser invertível $\forall x$ e $T_n(x)$ ser próprio ($\lim_{|x| \rightarrow \infty} |T(x)| = \infty$). Em (Isidori 1995, Proposição 9.1.1, pp. 428) são fornecidas condições suficientes para se obter a forma normal de plantas monovariáveis.

Não basta que (1.6) possua grau relativo vetorial bem definido em $x = x^o$ para se ter uma versão multivariável da forma normal local (1.8) e (1.9). Entretanto, se adicionalmente for suposto que $\{g_1(x), \dots, g_q(q)\}$ forma uma distribuição involutiva⁸ próximo

⁸Pode-se encontrar uma definição em (Isidori 1995, pp. 17).

de $x = x^o$, pode-se obter a versão MIMO de acordo com (Isidori 1995, Proposição 5.1.2, pp. 222). Condições suficientes para a obtenção da forma normal global (MIMO) segue a mesma linha que o caso SISO (Isidori 1995, Proposição 9.1.1, pp. 428).

No caso particular monovariável em que $f(x) = Ax$, $g(x) = B$ e $h(x) = C$ (linear), a forma normal global pode ser obtida como segue. Considere a seguinte função de transferência:

$$G(s) := C(sI - A)^{-1}B = k_p \frac{N(s)}{D(s)},$$

onde $N(s)$ e $D(s)$ são polinômios mônicos e co-primos de graus m e n , respectivamente, e $k_p > 0$. Sejam $Q(s)$ o quociente (de grau $\rho = n - m$) e $R(s)$ o resto (de grau $\leq m$) da divisão de $D(s)$ por $N(s)$. Portanto, tem-se:

$$G(s) = k_p \frac{\frac{1}{Q(s)}}{1 + \frac{R(s)}{N(s)} \frac{1}{Q(s)}}. \quad (1.10)$$

A Figura 1.1, destaca o subsistema interno (R/N) e o subsistema externo ($1/Q$). Note

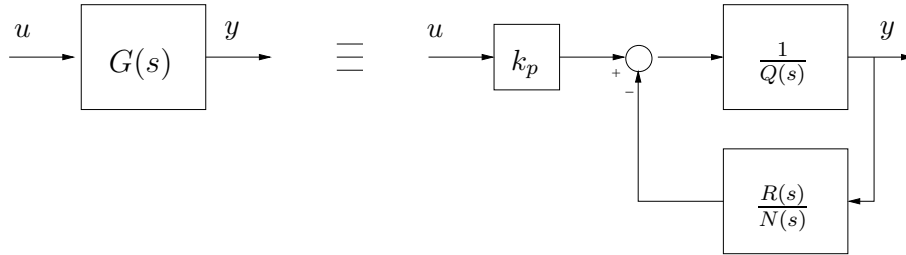


FIGURA 1.1: Forma normal de um sistema linear $G(s)$. Destacam-se o subsistema interno R/N e o subsistema externo $1/Q$.

que no caso particular em que $g(x) = B$ é constante, $\{g_1(x), \dots, g_q(q)\}$ é trivialmente uma distribuição involutiva, inclusive no caso linear MIMO, para o qual a forma normal é uma generalização imediata de (1.10).

1.5.3 Dinâmica dos Zeros

Considere o sistema não-linear (1.1), monovariável ($q = 1$) e com grau relativo igual a um. A lei de controle $u = (L_g h)^{-1}[v - L_f h]$ garante que $\dot{y} = v$. Esta lei realiza o que se denomina de linearização entrada-saída (Marino & Tomei 1995), pois cancela as não-linearidades presentes na equação de \dot{y} convertendo em $\dot{y} = v$.

Escolhendo-se novas coordenadas em que y seja uma das componentes do vetor de estado, as $n - 1$ equações restantes com $y(t) \equiv 0$ e $v(t) \equiv 0$ constituem a *dinâmica dos zeros*, ou seja, a dinâmica que resulta quando a saída é mantida nula.

No caso de grau relativo igual a dois, o sistema linearizado (via entrada-saída) é um duplo integrador, $\ddot{y} = v$. Neste caso, escolhendo coordenadas em que y e \dot{y} sejam componentes do vetor de estado, a dinâmica dos zeros é descrita pelas $n - 2$ equações restantes fazendo $y(t) \equiv \dot{y}(t) \equiv 0$ e $v(t) \equiv 0$. A dinâmica dos zeros é dada pela dinâmica que resulta do subsistema interno, (1.8), após fazer $\xi = 0$.

1.5.4 Sistemas Multivariáveis

Seja (A, B, C) uma realização da função de transferência $m \times m$ racional, estritamente própria e não-singular dada por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$.

- O *índice de observabilidade* do par $\{C, A\}$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$) é o menor inteiro ν_g , ($1 \leq \nu \leq n$), tal que

$$\mathcal{O}_\nu = \left[C^T \ (CA)^T \ \dots \ (CA^{\nu-1})^T \right]^T \quad (1.11)$$

tenha posto completo (Hsu et al. 2002). Este índice possui uma interpretação interessante: $(\nu_g - 1)$ é o maior número de derivadas temporais da saída necessário para se determinar a condição inicial do sistema descrito por (A, B, C) (Kailath 1980) (pp. 356–357).

- A matriz *interactor* associada à $G(s)$ é uma matriz triangular inferior da forma (Wolovich & Falb 1976):

$$\xi_G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21}(s) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(s) & h_{m2}(s) & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{diag} \{s^{\rho_1}, \dots, s^{\rho_q}\}, \quad (1.12)$$

onde os polinômios $h_{ij}(s)$ são nulos ou divisíveis por s e tais que o HFG de $G(s)$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi_G(s)G(s) \quad (1.13)$$

é finito e não-singular. Vale ressaltar que $\xi_G(s)$ definida em (1.12) é única e invariante com relação a compensações dinâmicas (Wolovich & Falb 1976). O *grau relativo* de uma planta MIMO está relacionado com o conceito da *matriz interactor* $\xi_G(s)$ associada a $G(s)$ (Wolovich & Falb 1976), (Weller & Goodwin 1994). Em particular, se $G(s)$ possuir *grau relativo uniforme* $\rho \geq 1$ então:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} s^\rho G(s). \quad (1.14)$$

1.5.5 Equações Diferenciais Descontínuas

Considere a versão variante no tempo do sistema genérico afim no controle (1.1):

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u, \quad (1.15)$$

sujeita a uma lei de controle descontínua u que assegure deslizamento ideal na superfície de deslizamento $\sigma(x(t), t) = 0$, com f e g sendo campos suaves. Durante o modo deslizante, as trajetórias de (1.15) são definidas no sentido de Filippov (Filippov 1964, Filippov 1988), isto é, elas são definidas como soluções satisfazendo a inclusão diferencial correspondente a (1.15), em quase todo lugar.

O sinal de controle u não é necessariamente uma função do tempo no sentido usual quando o modo de deslizamento é atingido. Para evitar o excesso de notação, $u_{eq}(t)$ denota funções localmente integráveis que são equivalentes a u , no sentido de *controle equivalente* (Utkin 1978), para qualquer solução de Filippov $x(t)$ do sistema em malha fechada. Deve ser enfatizado que a solução $x(t)$ é absolutamente contínua *por definição*. Então, para qualquer solução, u poderá ser substituído por $u_{eq}(t)$ no lado direito da equação diferencial que rege a dinâmica do sistema (Utkin 1992).

Controle Equivalente Estendido

O *controle equivalente* em sistemas dinâmicos com modos deslizantes é usualmente definido durante a fase de deslizamento (Utkin 1978, Capítulo II). O *controle equivalente estendido* foi definido por (Hsu & Costa 1996, Definição 1.2) como uma generalização que se aplica ao movimento completo do sistema, i.e., dentro e fora da superfície de deslizamento $\sigma(x(t), t) = 0$.

Seja $x(t)$ uma solução de (1.15) para $t \in [0, T)$. Então, o *controle equivalente estendido* é uma função localmente integrável definida em quase todo o intervalo $[0, T)$, obtida a partir da derivada total $\frac{d}{dt}\sigma(x(t), t)$ e de (1.15), e é dado por

$$u_{eq}(t) = [Sg(x(t), t)]^{-1} \left[\frac{d}{dt}\sigma(x(t), t) - Sf(x(t), t) - \frac{\partial}{\partial t}\sigma(x(t), t) \right], \quad (1.16)$$

onde $S := \frac{\partial}{\partial x}\sigma(x(t), t)$ e $\det[Sg(x(t), t)] \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [0, T)$, por hipótese. Essa expressão está bem definida uma vez que a solução $x(t)$ é absolutamente contínua por definição e, portanto, possui derivadas para quase todo o tempo.

No sentido usual, o *controle equivalente* é definido na superfície de deslizamento $\sigma(x(t), t) = 0$. Então, para obtê-lo basta fazer $\sigma \equiv 0$ em (1.16). Pode-se verificar que, para o caso particular em que $f(x, t) = Ax$, $g(x, t) = B$ e $\sigma(x, t) = Sx$ (onde A , B e S são matrizes constantes) o controle equivalente estendido é igual a $u_{eq} = u$, fora da superfície $\sigma \equiv 0$, e é dado pela realimentação de estados $u_{eq} = -(SB)^{-1}SAx$, durante o deslizamento.

Capítulo 2

Classe de Sistemas e Formulação do Problema

Neste trabalho considera-se a seguinte classe de plantas não-lineares:

$$\dot{x} = Ax + \phi(x, t) + B[u + \phi_c(x, t)], \quad y = Cx, \quad (2.1)$$

onde $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ é o estado da planta, $u \in \mathbb{R}^q$ é a entrada, $y \in \mathbb{R}^q$ é a saída medida, $n \geq q \geq 1$, $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi_c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^q$. Os termos ϕ_c e ϕ serão encarados como perturbações não-lineares incertas, sendo ϕ_c uma perturbação casada com respeito a entrada u , enquanto ϕ é descasada. As matrizes constantes A , B e C podem ser incertas. Note que apenas plantas multivariáveis quadradas (mesmo número de entradas e saídas) estão sendo abordadas.

Especificada uma *trajetória desejada* $y_m(t)$, o problema de rastreamento de trajetória consiste em projetar uma lei de controle u (via realimentação de saída) que assegure a convergência assintótica do *erro de saída* (ou *erro de rastreamento*)

$$e(t) := y(t) - y_m(t) \quad (2.2)$$

para zero, ou para uma pequena vizinhança do zero, mantendo todos os sinais do sistema em malha fechada uniformemente limitados, independentemente das incertezas. A trajetória $y_m(t)$ será especificada na Seção 2.4, como saída de um modelo linear suposto conhecido com entrada conhecida.

Se o problema for resolvido projetando-se u independentemente das condições iniciais (planta/controlador), diz-se que u garante *rastreamento global*. Por outro lado, resolvendo-se o problema a partir de um conjunto compacto *arbitrário* de condições iniciais, diz-se que u assegura *rastreamento semi-global*.

Supõe-se que todos os parâmetros incertos de (2.1) possuam limitantes inferiores e superiores conhecidos, permitindo o projeto de leis de controle por modo deslizante via realimentação de saída (OFSM). Sendo assim, a matriz de transferência do *subsistema linear* de (2.1),

$$G(s) := C(sI - A)^{-1}B,$$

que é incerta, pertence a um subconjunto \mathcal{P} de $\mathbb{R}^{q \times q}(s)$.

As hipóteses apresentadas a seguir devem ser satisfeitas para quaisquer valores das incertezas da planta, em particular $\forall G(s) \in \mathcal{P}$. Elas caracterizam uma classe de plantas não-lineares, de fase mínima, multivariáveis, com grau relativo bem definido e arbitrário e majoráveis linearmente pelo estado não medido.

2.1 Hipóteses Básicas

A seguinte hipótese básica é considerada:

(H0) O *subsistema linear* é controlável e observável, ou seja, (A, B, C) é uma realização de ordem mínima (n) para $G(s)$, com $G(s)$ estritamente própria e de posto (normal) completo.

Além disso, supõe-se que:

(H1) Os zeros de transmissão de $G(s)$ têm parte real estritamente negativa.

(H2) $G(s)$ possui grau relativo vetorial uniforme $\rho \geq 1$ e matriz interactor diagonal.

A hipótese (H0) e a hipótese de **fase mínima** (H1) são usuais no controle por modelo de referência (MRC) e são necessárias uma vez que a formulação do MRC (Ioannou & Sun 1996) será adotada para abordar o problema de rastreamento de trajetória. A hipótese (H2) não precisa ser tão restritiva. Na realidade, basta que $G(s)$ possua grau relativo vetorial¹ $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q\}$. Restringir o grau relativo vetorial a ser uniforme

¹A definição encontra-se na Seção 1.5.

($\rho_1 = \dots = \rho_q = \rho$) e a matriz *interactor* a ser diagonal é apenas conveniente para simplificar a análise, o projeto e a notação, e em nada compromete o resultado principal desta Tese.

Sem perda de generalidade, considera-se que todos os termos lineares em x de (2.1) estão concentrados no termo Ax e que, portanto, $\phi(x, t)$ e $\phi_c(x, t)$ contêm apenas termos não-lineares em x . Considera-se também que as perturbações $\phi(x, t)$ e $\phi_c(x, t)$ são localmente Lipschitz em x ($\forall x$), sendo ϕ_c contínua por partes em t e ϕ suficientemente suave em seus argumentos, ou seja, as componentes de ϕ são funções reais de x_1, \dots, x_n, t com derivadas parciais de qualquer ordem, definidas e contínuas (Isidori 1995, pp. 6).

A definição de Filippov para equações diferenciais com lado direito descontínuo (Filippov 1964) é adotada. Apenas o símbolo u , sem o argumento t , representa uma lei de controle chaveada que não é uma função usual do tempo durante o regime em modo deslizante. Entretanto, u sempre pode ser substituído pelo controle equivalente estendido $u_{eq}(t)$, definido na Seção 1.5, no lado direito da equação diferencial que rege a dinâmica do sistema.

2.2 Hipóteses Estruturais

Reescreva a planta (2.1) na seguinte forma:

$$\dot{x} = \underbrace{Ax + \phi(x, t)}_{f(x, t)} + \sum_{i=1}^q B_i(u_i + \phi_{c_i}), \quad y_i = C_i x := h_i(x), \quad (2.3)$$

onde B_i são as colunas de B , C_i são as linhas de C e u_i, y_i, ϕ_{c_i} são os elementos de u, y e ϕ_c , respectivamente. A estratégia de análise adotada neste trabalho foi inspirada na representação da planta não-linear (2.3) na forma normal (Isidori 1995, pp. 224). Nesta forma o sistema é particionado em dois subsistemas denominados de interno e externo, ver Seção 1.5 para maiores detalhes.

O subsistema externo é constituído por um sistema linear com entrada u e saída y perturbado por termos não-lineares *casados* com u . Sob determinadas condições o subsistema interno não é acionado por u e é constituído por um sistema linear (com dinâmica regida pelos zeros de $G(s)$) perturbado por termos não-lineares *descasados*.

A finalidade desta partição é explorar o fato de $G(s)$ ser de fase mínima e projetar

a lei de controle para rejeitar a perturbação não-linear que surge casada na equação da dinâmica externa.

O procedimento a seguir não consiste exatamente no desenvolvimento das hipóteses necessárias para a obtenção da forma normal para o sistema não-linear (2.1). É um procedimento similar, que sob certas condições torna-se equivalente, e que consiste em:

- transformar apenas (A, B, C) para a forma normal (Khalil 2002, pp.514) e
- desenvolver a equação que rege a dinâmica do vetor (derivadas das saídas)

$$\xi := [y_1 \quad \dot{y}_1 \quad \dots \quad y_1^{(\rho-1)} \quad \dots \quad y_q \quad \dot{y}_q \quad \dots \quad y_q^{(\rho-1)}]^T \in \mathbb{R}^{q\rho \times 1}, \quad (2.4)$$

com ρ definido em (H2).

2.2.1 Transformação do Subsistema Linear

De acordo com (Isidori 1995, Proposição 5.1.2, pp.222) (ver também (Khalil 2002, pp.514)), (H2) é uma condição suficiente² para transformar (A, B, C) para a forma normal $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ por meio da seguinte transformação de similaridade:

$$T_l := [T_\eta^T \quad T_\vartheta^T]^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (2.5)$$

onde $T_\vartheta \in \mathbb{R}^{q\rho \times n}$ é dado por

$$T_\vartheta := [C_1^T \quad (C_1 A)^T \quad \dots \quad (C_1 A^{\rho-1})^T \quad \dots \quad C_q^T \quad (C_q A)^T \quad \dots \quad (C_q A^{\rho-1})^T]^T, \quad (2.6)$$

e $T_\eta \in \mathbb{R}^{(n-q\rho) \times n}$ é escolhida de tal forma que $T_\eta B \equiv 0$ e que T_l seja invertível. A existência de T_η é assegurada pelo fato de que as colunas de B geram uma distribuição não-singular e involutiva, uma vez que B possui colunas constantes e linearmente independentes, pois $G(s)$ possui posto completo por hipótese.

Agora, considere a mudança de coordenadas $\bar{x} := [\eta^T \quad \vartheta^T]^T = T_l x$ para o sistema (2.3), com $\vartheta = T_\vartheta x$ ($\in \mathbb{R}^{q\rho \times 1}$) e $\eta = T_\eta x$ ($\in \mathbb{R}^{(n-q\rho) \times 1}$). Pode-se obter a seguinte

²Na realidade basta que $G(s)$ possua grau relativo vetorial bem definido, não é necessário que seja uniforme.

equação (apêndice):

$$\dot{\eta} := A_0\eta + B_0y + T_\eta\phi, \quad (2.7)$$

onde o termo $T_\eta\phi$ é considerado como uma perturbação descasada exógena e A_0 é Hurwitz, pois seus autovalores são dados pelos zeros de $G(s)$. Por outro lado, diretamente da definição de $\vartheta = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & \dots & \vartheta_{q\rho} \end{bmatrix}^T$, pode-se verificar que ($j \in \{1, 2, \dots, q\}$):

$$\vartheta_{(j-1)\rho+i} = \vartheta_{(j-1)\rho+i+1} + C_j A^{i-1} \phi \quad (i = 1, \dots, \rho - 1),$$

$$\vartheta_{j\rho} = C_j A^\rho x + C_j A^{\rho-1} B u + C_j A^{\rho-1} \phi.$$

Portanto, definindo-se $K_\vartheta \in \mathbb{R}^{q \times q\rho}$ e $K_\eta \in \mathbb{R}^{q \times (n-q\rho)}$ por $\begin{bmatrix} K_\eta & K_\vartheta \end{bmatrix} := C A^\rho T_l^{-1}$, a dinâmica de ϑ pode ser representada por

$$\dot{\vartheta} = [A_\rho + B_\rho K_\vartheta] \vartheta + B_\rho K_p [u + K_p^{-1} K_\eta \eta] + [T_\vartheta \phi + B_\rho K_p \phi_c], \quad (2.8)$$

$$y = C_\rho \vartheta, \quad (2.9)$$

onde $K_p = C A^{\rho-1} B$ é o ganho de alta frequência (HFG) de (A, B, C) e $A_\rho \in \mathbb{R}^{q\rho \times q\rho}$, $B_\rho \in \mathbb{R}^{q\rho \times q}$ e $C_\rho \in \mathbb{R}^{q \times q\rho}$ são definidos por³:

$$A_\rho := \text{bloco diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \circ \\ & \ddots & 1 \\ \circ & & 0 \end{bmatrix}, \rho \times \rho \right\}, \quad B_\rho := \text{bloco diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \rho \times 1 \right\},$$

$$C_\rho := \text{bloco diag} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, 1 \times \rho \right\}. \quad (2.10)$$

Consequentemente, tem-se:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \bar{C} \\ B_\rho K_\eta & A_\rho + B_\rho K_\vartheta \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_\rho K_p \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & C_\rho \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

A dinâmica de ϑ será utilizada no Apêndice para obter um majorante para a norma do estado x da planta. Por hora ela pode ser ignorada.

³Notação retirada de (Kailath 1980).

2.2.1.1 Hipótese de Crescimento Linear

Considere as seguintes partições:

$$T_l \phi = \begin{bmatrix} \phi_0^T & \phi_\vartheta^T \end{bmatrix}^T \quad \text{e} \quad T_l B \phi_c = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{c\vartheta}^T \end{bmatrix}^T, \quad \phi_{c\vartheta} := T_\vartheta B \phi_c = B_\rho K_p \phi_c,$$

onde T_l e T_ϑ estão definidos em (2.5) e (2.6), respectivamente. Impõe-se a seguinte condição de crescimento linear com respeito *apenas* aos estados não medidos:

(H3) Existem constantes $\epsilon^*, k_x^* \geq 0$ conhecidas e funções $\varphi_0, \varphi_\vartheta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, conhecidas tais que, para $\epsilon \in [0, \epsilon^*]$ e $k_x \in [0, k_x^*]$:

$$|\phi_0| \leq \epsilon |x| + \varphi_0(y, t) \quad \text{e} \quad |\phi_\vartheta|, |\phi_{c\vartheta}| \leq k_x |x| + \varphi_\vartheta(y, t),$$

onde φ_i ($i \in \{0, \vartheta\}$) são contínuas por partes em t e contínuas em y e satisfazem $\varphi_i \leq \Psi(|y|) + k_\psi$, com $\Psi \in \mathcal{K}_\infty$ localmente Lipschitz.

As constantes ϵ e k_x são referidas como *as taxas de crescimento* e as funções $\varphi_0, \varphi_\vartheta$ como *funções de majoração*. A taxa de crescimento ϵ deve ser limitada a um valor apropriado para permitir a obtenção de um limitante superior para a norma do estado x da planta⁴. Em contraste com trabalhos anteriores (Hsu et al. 2003)(Hsu, Peixoto, Cunha, Costa & Lizarralde 2006), nenhuma restrição será imposta à taxa k_x .

Vale ressaltar que a não linearidade apesar de ser majorável linearmente pelo estado não medido não precisa ser triangular e nem majorável de forma triangular, como em alguns casos na literatura (Lei & Lin 2006b).

De acordo com (H3) não se impõe nenhuma restrição forte de crescimento sobre φ_0 e φ_ϑ . Então, o fenômeno de escape em tempo finito (Khalil 2002) não pode ser descartado, *a priori*. Portanto, t_M pode ser finito.

2.2.2 Equação que Rege a Dinâmica das Derivadas das Saídas

No que segue, serão impostas condições suficientes sobre a planta (2.3) para se obter a dinâmica de ξ (2.4) com as não-linearidades casadas com a entrada u . Para considerar

⁴Ver demonstração da Proposição 2 no Apêndice. Como consequência pode-se verificar que a planta goza da propriedade denominada UO (*unboundedness observability*) (Jiang, Teel & Praly 1994).

explicitamente a dependência do tempo presente em $\phi(x, t)$, sejam as seguintes funções:

$$\beta_{i,k} := \frac{\partial \beta_{i,k-1}}{\partial x} f + \frac{\partial \beta_{i,k-1}}{\partial t} + \frac{\partial [L_f^{k-1} h_i]}{\partial t} \in \mathbb{R}, \quad \beta_{i,0} := 0, \quad (2.12)$$

onde $k \in \{1, \dots, \rho\}$ e $i \in \{1, \dots, q\}$. Estas funções $\beta_{i,k}$ surgem naturalmente ao se derivar no tempo sucessivamente a saída y até a derivada de ordem ρ . A seguinte hipótese assegura que a planta não-linear (2.3) possua grau relativo vetorial uniforme, (*strong*⁵) e igual a ρ .

(H4.a) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se:

$$L_{B_j}[L_f^k h_i] + \frac{\partial \beta_{i,k}}{\partial x} B_j \equiv 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, q\}, \quad \forall k \in \{0, \dots, \rho - 2\},$$

e a seguinte matriz é invertível:

$$K_{pxt} := \begin{bmatrix} L_{B_1}[L_f^{\rho-1} h_1] + \frac{\partial \beta_{1,\rho-1}}{\partial x} B_1 & \dots & L_{B_q}[L_f^{\rho-1} h_1] + \frac{\partial \beta_{1,\rho-1}}{\partial x} B_q \\ \vdots & & \vdots \\ L_{B_1}[L_f^{\rho-1} h_q] + \frac{\partial \beta_{q,\rho-1}}{\partial x} B_1 & \dots & L_{B_1}[L_f^{\rho-1} h_q] + \frac{\partial \beta_{q,\rho-1}}{\partial x} B_q \end{bmatrix}.$$

De acordo com a hipótese (H4.a), a não-linearidade ϕ não altera o grau relativo do subsistema linear. Da mesma forma que a hipótese (H2), (H4.a) pode ser relaxada no sentido de permitir grau relativo vetorial não necessariamente uniforme.

Para tornar viável o projeto da lei de controle, é natural impor alguma restrição com respeito ao ganho de alta frequência K_{pxt} do sistema não-linear. Em (Hsu, Peixoto, Cunha, Costa & Lizarralde 2006), foi imposto que a norma $|K_{pxt} - K_p|$ devia ser suficientemente pequena, onde K_p é o ganho de alta frequência (HFG) de $G(s)$. A fim de simplificar a análise, sem com isso perder os conceitos principais, a seguinte hipótese será assumida:

(H4.b) $K_{pxt} = K_p = CA^{\rho-1}B$.

Agora, computando-se $y_i^{(k)}$ ($\forall k \in \{0, \dots, \rho - 1\}$ e $\forall i \in \{1, \dots, q\}$) com (H4) em mãos:

$$[y_i \quad \dot{y}_i \quad \dots \quad y_i^{(\rho-1)}]^T = T_i(x, t) \in \mathbb{R}^{\rho \times 1}, \quad (2.13)$$

⁵As funções β poderiam ser evitadas utilizando-se derivadas de Lie modificadas como em (Diao & Passino 2001).

onde $T_i^T(x, t) := \begin{bmatrix} L_f^0 h_i + \beta_{i,0} & L_f h_i + \beta_{i,1} & \dots & L_f^{\rho-1} h_i + \beta_{i,\rho-1} \end{bmatrix}$. Além disso, tem-se:

$$y^{(\rho)} = K_p \left[u + K_p^{-1} \begin{bmatrix} L_f^\rho h_1 + \beta_{1,\rho} & \dots & L_f^\rho h_q + \beta_{q,\rho} \end{bmatrix}^T + \phi_c \right]. \quad (2.14)$$

A partir de (2.14) e (2.4), tem-se que a dinâmica de ξ é descrita por:

$$\dot{\xi} = A_\rho \xi + B_\rho K_p [u + d_\phi(x, t) + K_p^{-1} (K_\eta \eta + K_\vartheta \xi)], \quad (2.15)$$

$$y = C_\rho \xi, \quad (2.16)$$

onde (A_ρ, B_ρ, C_ρ) , K_η e K_ϑ foram definidos na Seção 2.2.1 e

$$d_\phi(x, t) := K_p^{-1} \begin{bmatrix} L_f^\rho h_1 + \beta_{1,\rho} & \dots & L_f^\rho h_q + \beta_{q,\rho} \end{bmatrix}^T + \phi_c - K_p^{-1} [K_\eta \eta + K_\vartheta \xi], \quad (2.17)$$

será considerado como uma perturbação não-linear exógena, casada com a entrada u . Pode-se verificar que no caso linear ($\phi \equiv 0$ e $\phi_c \equiv 0$) tem-se $\xi = \vartheta$ e $d_\phi \equiv 0$. Além disso, de acordo com $T_i(x, t)$ em (2.13), ξ satisfaz:

$$\xi = T_\xi(x, t) := \begin{bmatrix} T_1^T & T_2^T & \dots & T_q^T \end{bmatrix}^T. \quad (2.18)$$

Portanto, definindo-se $T_{nl}(x, t) := \begin{bmatrix} (T_\eta x)^T & T_\xi^T(x, t) \end{bmatrix}^T$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \eta^T & \xi^T \end{bmatrix}^T = T_{nl}(x, t), \quad (2.19)$$

com a dinâmica de η dada em (2.7) e a dinâmica de ξ dada em (2.15). Note que, (2.7) e (2.15)–(2.16) não constituem necessariamente uma forma normal (Isidori 1995) para o sistema não-linear (2.3). E mais, não necessariamente, (2.19) se configura uma mudança de coordenadas global (i.e., $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t$). Para tanto, $T_{nl}(x, t)$ tem que ser um difeomorfismo global (variante no tempo, (Choi & J.T. 2003)). Se assim for, a dinâmica de η (2.7) se confunde com a dinâmica interna da forma normal, enquanto que a dinâmica de ξ (2.15) se confunde com a dinâmica externa (Khalil 2002, pp.514) (Isidori 1995).

Como foi discutido na Seção 1.5, para plantas invariantes no tempo e monovariáveis a hipótese (H4.a) é suficiente para garantir que T_{nl} seja um difeomorfismo *local* e condições suficientes para que T_{nl} seja um difeomorfismo *global* também foram apresentadas.

No entanto, as análises e os projetos desenvolvidos neste trabalho utilizam as equações (2.7) e (2.15) mas não exigem que estas representem a forma normal da planta, ou seja, não é necessário que T_{nl} seja um difeomorfismo global. Exige-se apenas que T_{nl} seja tal que a seguinte hipótese se verifique.

(H5) Existe uma função $\Psi_\xi \in \mathcal{K}$ tal que $|x| \leq \Psi_\xi(|\xi|) + k_\xi$, onde $k_\xi \geq 0$ é uma constante.

Esta condição pode parecer um pouco restritiva mas é satisfeita por uma ampla classe de não-linearidades (triangulares), como será verificado na Seção 2.3. A hipótese (H5) é necessária para permitir a conclusão de que as normas dos sinais do sistema em malha fechada estão limitadas, a partir da informação de que a saída e suas derivadas (de ordem até $\rho - 1$) estão limitadas em norma. Vale ressaltar que, sendo A_0 em (2.7) Hurwitz, (H3) e (H5) (juntas) implicam que a dinâmica de η é ISS com respeito a $|\xi|$, e como consequência, o sistema não-linear é de fase mínima.

Por fim, para obter um limitante superior para a norma de d_ϕ (2.17), a seguinte hipótese será considerada:

(H6) Existe uma função $\varphi_d(|x|, t)$, não negativa, conhecida, contínua por partes em t e \mathcal{K}_∞ em $|x|$ tal que $|d_\phi(x, t)| \leq \varphi_d(|x|, t) \leq \Psi(|x|) + k_\psi$, com $\Psi \in \mathcal{K}_\infty$ localmente Lipschitz e $k_\psi \geq 0$ uma constante.

A hipótese (H6) não é restritiva pois a continuidade de $d_\phi(x, t)$ em relação a x assegura a existência de φ_d .

2.3 Exemplo da Classe de Sistemas

O exemplo a seguir ilustra uma ampla classe de plantas (2.1) que se adequam às hipóteses (H1)–(H6): aquelas em que (A, B, C) encontra-se na forma canônica do controlador (Kailath 1980) e $\phi(x, t)$ é triangular nos estados não medidos, ou seja, $\phi^T(x, t) := \begin{bmatrix} \phi_1(x_1, y, t) & \phi_2(x_1, x_2, y, t) & \dots & \phi_n(x, y, t) \end{bmatrix}$. Além disso, pode-se mostrar neste caso que T_{nl} é um difeomorfismo global variante no tempo (Choi & J.T. 2003).

Exemplo 2.1 Considere o sistema SISO:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \phi_1(x_1, t), \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \phi_2(x_1, x_2, t), \\ \dot{x}_3 &= u + \phi_3(x_1, x_2, x_3, t), \\ y &= x_1,\end{aligned}\tag{2.20}$$

que pode ser escrito na forma (2.3) com $f(x) = [x_2 + \phi_1 \ x_3 + \phi_2 \ \phi_3]^T$, $B_1 = [0 \ 0 \ 1]^T$, $h_1(x) = x_1$, (A, B, C) na forma canônica controlável e $\phi_c \equiv 0$.

O subsistema linear possui função de transferência dada por $G(s) = 1/s^3$. Portanto, (H0)–(H2) são verificadas e $\rho = 3$. Notando que $L_f^0 h_1 = x_1$ e $L_f h_1 = x_2 + \phi_1$ obtém-se de (2.12): $\beta_{1,0} = \beta_{1,1} = 0$, $\beta_{1,2} = \partial\phi_1/\partial t$ e

$$L_{B_1}[L_f^0 h_1] + \frac{\partial\beta_{1,0}}{\partial x} B_1 \equiv L_{B_1}[L_f h_1] + \frac{\partial\beta_{1,1}}{\partial x} B_1 \equiv 0.\tag{2.21}$$

Além disso, $L_f^2 h_1 = [\partial\phi_1/\partial x_1 \ 1 \ 0] f = \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(x_2 + \phi_1) + x_3 + \phi_2$ o que implica:

$$K_{pxt} = L_{B_1}[L_f^2 h_1] + \frac{\partial\beta_{1,2}}{\partial x} B_1 = 1 = CA^2 B \neq 0.$$

Portanto, (H4.a) e (H4.b) são válidas. Derivando-se $y = y_1 = x_1$ duas vezes, tem-se:

$$\dot{y} = L_f h_1 + L_{B_1} h_1 u = L_f h_1 = x_2 + \phi_1, \quad \ddot{y} = L_f^2 h_1 + \beta_{1,2},$$

o que leva a $T_\xi = T_1 = \left[x_1 \ x_2 + \phi_1 \ \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(x_2 + \phi_1) + x_3 + \phi_2 + \frac{\partial\phi_1}{\partial t} \right]^T$. Neste caso $T_{nl} = T_\xi$ é um difeomorfismo com inversa definida por $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y} - \phi_1(y, t)$ e $x_3 = \ddot{y} - \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(x_2 + \phi_1) - \phi_2 - \frac{\partial\phi_1}{\partial t}$. Considere, por exemplo:

$$\phi_1 = \theta_1 y^2 + \sin(t), \quad \phi_2 = \frac{x_2^3}{\theta_2 x_2^2 + 1} + y^3 \quad e \quad \phi_3 = e^y + \theta_3,$$

onde ϕ_2 foi inspirada nos exemplos de (Lei & Lin 2005) e θ_i ($i = 1, 2, 3$) são parâmetros incertos tais que $\underline{\theta}_i \leq \theta_i \leq \bar{\theta}_i$ com $\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i$ conhecidos e $\underline{\theta}_2 \neq 0$. Note que não é difícil de verificar que (H5) é satisfeita e que (H3) é válida com $\varphi_\vartheta = |y|^3 + |\bar{\theta}_1|y^2 + e^y + 1 + |\bar{\theta}_3|$ e $k_x^* = 1/|\underline{\theta}_2|$. Um exemplo em que (H3) é violada é dado por $\phi_1 = y^2 + x_2^2$.

2.4 Modelo de Referência

A trajetória desejada ($y_m \in \mathbb{R}^q$) é especificada por:

$$y_m = M(s) r, \quad M(s) = \text{diag} \left\{ \frac{k_m}{(s + \gamma_1)}, \dots, \frac{k_m}{(s + \gamma_q)} \right\} L^{-1}(s), \quad (2.22)$$

onde $k_m > 0$ e $\gamma_j > 0$ ($\forall j \in \{1, \dots, q\}$) são constantes e $L(s)$ é o polinômio Hurwitz:

$$L(s) = s^{\rho-1} + a_{\rho-2}s^{\rho-2} + \dots + a_0 = L_1(s)L_2(s) \cdots L_{\rho-1}(s), \quad L_i(s) = (s + \alpha_i), \quad (2.23)$$

sendo $\alpha_i > 0$ constantes $\forall i \in \{1, \dots, \rho-1\}$. Supõe-se que o sinal de referência $r(t) \in \mathbb{R}^q$ é contínuo por partes e uniformemente limitado. Considerando a notação

$$(s + \gamma_i)L(s) = s^\rho + \bar{a}_{i,\rho-1}s^{\rho-1} + \dots + \bar{a}_{i,0} \quad (i = 1, \dots, q),$$

e os vetores $\bar{a}_i^T = \begin{bmatrix} -\bar{a}_{i,0} & -\bar{a}_{i,1} & \dots & -\bar{a}_{i,\rho-1} \end{bmatrix}$ ($i = 1, \dots, q$), seja:

$$\bar{K}_m := \begin{bmatrix} \bar{a}_1^T & 0_{1 \times \rho} & 0_{1 \times \rho} & \dots & 0_{1 \times \rho} \\ 0_{1 \times \rho} & \bar{a}_2^T & 0_{1 \times \rho} & \dots & 0_{1 \times \rho} \\ 0_{1 \times \rho} & 0_{1 \times \rho} & \bar{a}_3^T & \dots & 0_{1 \times \rho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{1 \times \rho} & 0_{1 \times \rho} & 0_{1 \times \rho} & \dots & \bar{a}_q^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times q\rho}.$$

Considere a seguinte realização mínima (A_m, B_m, C_m) para $M(s)K_m^{-1}$ ($K_m := k_m I$):

$$\dot{\xi}_m = A_m \xi_m + B_m K_m r, \quad y_m = C_m \xi_m, \quad (2.24)$$

onde $B_m := B_\rho$, $C_m := C_\rho$ e $A_m := A_\rho + B_\rho \bar{K}_m$, com A_ρ , B_ρ e C_ρ definidos em (2.10) e

$$\xi_m := \begin{bmatrix} y_{m_1} & \dot{y}_{m_1} & \dots & y_{m_1}^{(\rho-1)} & \dots & y_{m_q} & \dot{y}_{m_q} & \dots & y_{m_q}^{(\rho-1)} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{q\rho}. \quad (2.25)$$

Note que se impõe um modelo de ordem ρ , sem zeros, e que se pressupõe o conhecimento de $y_m(t)$ e de suas derivadas temporais que compõem $\xi_m(t)$. Vale ressaltar que há casos em que apenas a trajetória y_m é considerada conhecida (Gong & Qian 2007).

Capítulo 3

Controle por Modo Deslizante para Rastreamento de Trajetória

Este capítulo tem como objetivo descrever o que há de comum no projeto e na análise de estabilidade dos controladores por modos deslizantes via realimentação de saída propostos nos Capítulos 4, 6 e 7. No Capítulo 4 é proposta uma solução para o problema formulado no Capítulo 2, onde se considera plantas multivariáveis (MIMO) da classe (2.1). Os Capítulos 6 e 7 abordam o caso monovariável (SISO).

Para descrever o que há em comum, será considerado o caso MIMO, ou seja, plantas da forma (2.1) que satisfaçam as hipóteses (H0)–(H6) do Capítulo 2. As equações e hipótese específicas do caso SISO serão apresentadas no Capítulo 5 que funcionará como suporte para os Capítulos 6 e 7. A estratégia comum consiste em:

- transformar o problema de rastreamento em um problema de regulação da equação do erro de rastreamento onde as não-linearidades figuram como uma perturbação de entrada (casada) de um sistema linear;
- obter um majorante para a norma dessa perturbação a partir da saída e/ou de estimativas que *não* sejam baseadas em alto ganho, portanto, livre de pico;
- definir uma superfície de deslizamento - função da saída e possivelmente de estimativas baseadas em alto ganho obtidas a partir da saída - que aproxime uma superfície de deslizamento definida para o caso de realimentação de estados;
- utilizar o teorema de pequenos ganhos para obter os resultados de estabilidade.

O Capítulo está organizado como segue. Primeiro, é descrito um desenvolvimento alternativo para a equação do erro de rastreamento, em contraste com o desenvolvimento tradicional das estratégias anteriores baseadas no MRAC (Cunha 2004). Em seguida, introduz-se resumidamente a estrutura básica da lei de controle utilizada para abordar sistemas multivariáveis: o controle vetorial unitário (*unit vector control* – UVC).

Então, define-se a superfície de deslizamento supondo os estados acessíveis, apresentando a análise de estabilidade que servirá de base para a análise dos controladores via realimentação de saída, descrita na seqüência. Por fim, são apresentados os passos para o projeto dos controladores via realimentação de saída destacando os sinais (que não são baseados em alto ganho) responsáveis pela magnitude do sinal de controle.

3.1 Equação do Erro de Rastreamento

Seguindo o desenvolvimento descrito no Capítulo 2, com a planta (2.1) satisfazendo as hipóteses (H0)–(H2) e (H4), obtém-se o subsistema externo (2.15)–(2.16), que reescrito em função de (A_m, B_m, C_m) (definidos na Seção 2.4) é dado por:

$$\dot{\xi} = A_m \xi + B_m K_p [u + d_\phi + K_p^{-1} K_\eta \eta + K_p^{-1} (K_\vartheta - \bar{K}_m) \xi], \quad y = C_m \xi. \quad (3.1)$$

com \bar{K}_m dado na Seção 2.4. Portanto, de (2.24) e (3.1) o vetor $x_e := \xi - \xi_m$ e o erro de saída e satisfazem

$$\dot{x}_e = A_m x_e + B_m K_p [u + d], \quad e = C_m x_e, \quad (3.2)$$

$$e = M(s) K^* [u + d], \quad K^* = K_m^{-1} K_p, \quad (3.3)$$

onde a *perturbação equivalente de entrada* é definida por:

$$d(x, \xi, t) := d_\phi + K_p^{-1} K_\eta \eta + K_p^{-1} (K_\vartheta - \bar{K}_m) \xi - (K^*)^{-1} r. \quad (3.4)$$

O problema de rastreamento da saída y do sistema (2.15)–(2.16) passa a ser encarado como um problema de regulação da saída e do sistema (3.2) descrito na forma de espaço de estado, ou na forma de entrada-saída (3.3). O UVC, apresentado a seguir, servirá de base para a lei de controle proposta para regulação da equação do erro.

3.2 O Controle Vetorial Unitário (UVC)

Considere o sistema

$$\dot{x} = K_p u, \quad u = S_p U, \quad x \in \mathbb{R}^q, \quad q \geq 1, \quad (3.5)$$

onde $x \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de estados, K_p é o ganho de alta frequência de u para x e S_p é uma matriz apropriada. A lei descontínua U , baseada no vetor unitário, tem a forma:

$$U = -\varrho(x, t) \frac{\sigma(x)}{|\sigma(x)|}, \quad |\sigma| \neq 0, \quad (3.6)$$

com $\sigma(x)$ sendo uma função vetorial. A *função de modulação* $\varrho(x(t), t) \geq 0$ ($\forall x, t$) contínua em t é projetada para assegurar o deslizamento ideal na variedade $\sigma(x) = 0$. Durante o deslizamento a solução $x(t)$ é definida no sentido de Filippov (Seção 1.5.5). Doravante, assume-se $U = 0$ se $\sigma(x) = 0$, a fim de definir completamente a lei de controle, entretanto, isto não significa que o controle equivalente (Seção 1.5.5) seja nulo para $\sigma(x) = 0$.

A motivação principal para aplicar VSC baseado no controle vetorial unitário em sistema multivariáveis está no (Baida 1993, Teorema) que trata do caso particular do sistema (3.5) em malha fechada com U dado por (3.6), $\varrho(x, t) = 1$ ($\forall x, t$) e $\sigma(x) = x$:

$$\dot{x} = -K_p S_p \frac{x}{|x|}. \quad (3.7)$$

De acordo com (Baida 1993) a origem $x = 0$ do sistema (3.7) é estável (assintoticamente estável, instável) se e somente se a origem do sistema

$$\dot{z} = -K_p S_p z$$

for estável (assintoticamente estável, instável). Portanto a origem de (3.7) é globalmente assintoticamente estável se e somente se $-K_p S_p$ for Hurwitz. Em contraste, nenhuma condição necessária e suficiente é conhecida para sistemas à estrutura variável, com dimensão maior do que dois, que utilizam outra função de chaveamento que não o vetor unitário (Hsu et al. 2002).

3.3 Realimentação de Estados

Quando o estado ξ está disponível para realimentação (conseqüentemente $x_e = \xi - \xi_m$) pode-se definir a superfície de deslizamento

$$\sigma(t) = Sx_e(t) = 0, \quad (3.8)$$

onde $S \in \mathbb{R}^{q \times qp}$ é uma matriz apropriada. Considerando $\sigma = Sx_e$ como uma equação de saída para a dinâmica de x_e (3.2) e a lei de controle $u = S_p U$, obtém-se:

$$\sigma = \bar{M}(s)[U + S_p^{-1}d], \quad (3.9)$$

onde $\bar{M}(s) := S(sI - A_m)^{-1}B_m K_p S_p \in \mathbb{R}^{q \times q}(s)$. Se a matriz $S \in \mathbb{R}^{q \times qp}$ for projetada para que $\bar{M}(s)$ seja da forma:

$$\bar{M}(s) := \text{diag} \left\{ \frac{1}{s + \gamma_1}, \dots, \frac{1}{s + \gamma_q} \right\} \bar{K}, \quad \gamma_j > 0 \quad (\forall j \in \{1, \dots, q\}), \quad (3.10)$$

e a matriz $S_p \in \mathbb{R}^{q \times q}$ (invertível) for escolhida para que $-\bar{K} = -S B_m K_p S_p$ seja Hurwitz¹, então é possível mostrar por meio do Lema 3.1 (apresentado no final desta seção) que ocorre deslizamento em $\sigma = 0$ utilizando a lei de controle baseada no vetor unitário

$$U = -\varrho(x, \xi, t) \frac{\sigma(t)}{|\sigma(t)|}, \quad |\sigma(t)| \neq 0, \quad (3.11)$$

com a função de modulação ϱ satisfazendo

$$\varrho \geq (1 + k_d) |S_p^{-1}d(x, \xi, t)| + k_\sigma |\sigma(t)| + \delta, \quad (3.12)$$

a menos de termos exponencialmente decrescentes, onde $\delta \geq 0$ é uma constante arbitrariamente pequena e k_d e k_σ são constantes não-negativas apropriadas. Note que para implementar ϱ o estado x também deve estar disponível.

De fato, aplicando o Lema 3.1 a (3.9) pode-se concluir que $|\sigma|$ converge exponencialmente para zero e que ocorre deslizamento ideal em $\sigma \equiv 0$ após algum tempo finito

¹Em particular pode-se escolher S tal que (A_m, B_m, S) seja uma realização para a função de transferência $ML(s)K_m^{-1}$, com $L(s)$ dado em (2.23). Neste caso, $\bar{M}(s) = MLK^*S_p$ e $\bar{K} = K_p S_p$. Portanto, S_p deve ser projetada para que $-K_p S_p$ seja Hurwitz.

quando $\delta > 0$. Além disso, utilizando a proposição a seguir, é fácil concluir que a origem de (3.2) é GES, notando que (3.2) é GES para entrada nula ($u \equiv d \equiv 0$). Portanto, rastreamento global e exato pode ser obtido².

Proposição 1 *A dinâmica que descreve x_e em (3.2) é ISS³ com respeito a $\sigma = Sx_e$ se S for tal que $\bar{M}(s)$ tenha a forma (3.10).*

Prova: De (3.10) e (3.9), tem-se que $\dot{\sigma} + \bar{\Gamma}\sigma = \bar{K}S_p^{-1}[u+d]$, onde $\bar{\Gamma} := \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_q\}$. Como S_p é escolhido para que $-\bar{K}$ seja Hurwitz, então \bar{K} é invertível. Portanto:

$$[u + d] = S_p \bar{K}^{-1} [\dot{\sigma} + \bar{\Gamma}\sigma]. \quad (3.13)$$

Sendo assim, substituindo (3.13) em (3.2), conclui-se que $\dot{x}_e = A_m x_e + B_m S_p \bar{K}^{-1} [\dot{\sigma} + \bar{\Gamma}\sigma]$. Além disso, usando a simples transformação $\bar{x}_e = x_e - B_m S_p \bar{K}^{-1} \sigma$, obtém-se $\dot{\bar{x}}_e = A_m \bar{x}_e + (A_m B_m + B_m S_p \bar{K}^{-1} \bar{\Gamma}) \sigma$, de onde pode-se verificar que a dinâmica de \bar{x}_e (conseqüentemente, de x_e) é ISS com respeito a σ , uma vez que A_m é Hurwitz. ■

Observação 1 *Pode-se obter o resultado da Proposição 1 com $\bar{M}(s)$ mais geral que (3.10), a única restrição necessária é que $\bar{M}(s)$ tem que ser de fase mínima e tem que possuir grau relativo vetorial uniforme e unitário.*

²Para demonstrar que a dinâmica de x_e é GES não é necessário utilizar a Proposição 1. Na realidade, com a função de Lyapunov utilizada na demonstração do Lema 3.1, pode-se assegurar que (3.2) é GES. Destaca-se a Proposição 1 para ser utilizada futuramente.

³Pode-se dizer também que (3.2) é OSS - Estável no Sentido Saída-Estado (*Output-State-Stable*).

Lema Auxiliar

O lema a seguir fornece a base para demonstrar o resultado de estabilidade da equação do erro (3.2) quando o estado da planta estiver disponível para realimentação.

Lema 3.1 *Considere o sistema MIMO*

$$\varepsilon(t) = \bar{M}(s) [U + d(t) + \pi(t)] , \quad (3.14)$$

com \bar{M} definido em (3.10). Assume-se que $-\bar{K}$ é Hurwitz, o sinais $d(t)$ e $\pi(t)$ são LI e $|\pi(t)| \leq R_1 \exp(-\lambda_1 t)$, $\forall t \in \mathcal{I}_*$ e para algumas constantes $R_1 \geq 0$ e $\lambda_1 > 0$. Se $U = -\varrho(t)\varepsilon/|\varepsilon|$ e ϱ satisfaz

$$\varrho(t) + R_2 \exp(-\lambda_2 t) \geq \delta + c_\varepsilon |\varepsilon| + (1 + c_d) |d(t)| , \quad \forall t \in \mathcal{I}_* , \quad (3.15)$$

onde ϱ é LI, $R_2 \geq 0$ e $\lambda_2 > 0$ são constantes, $\delta \geq 0$ é uma constante arbitrária e c_ε e c_d são constantes não negativas apropriadas, então $\exists c_1, c_2, \lambda_r > 0$ tais que a desigualdade

$$|\varepsilon(t)| \leq [c_1 |x_e(t_*)| + c_2 R] \exp(-\lambda_r t) \quad (3.16)$$

é satisfeita $\forall t \in \mathcal{I}_*$, onde $R = \max\{R_1, R_2\}$ e x_e o estado de qualquer realização estabilizável e detectável de (3.14) (possivelmente não-mínima). Se $\delta > 0$, então $\varepsilon(t)$ se torna identicamente nulo após algum tempo finito $t_s \geq 0$. Além disso, se $\gamma_j = \gamma > 0$, então pode-se escolher $c_\varepsilon = 0$ em (3.15).

Prova: Vide (Hsu et al. 2002, Corolário 1) ou (Cunha 2004, Corolário 2.2). ■

Observação 2 *Esse Lema é uma generalização para o caso multivariável do lema correspondente para sistemas SISO apresentado em (Hsu et al. 1997). No caso mono-variável, o mesmo resultado pode ser obtido com $c_d = 0$ em (3.15) e por meio de uma versão do (Hsu et al. 1997, Lema 1), onde se relaxa a hipótese do sistema ser SPR para ASPR (almost strictly positive real).*

Uma versão mais geral do Lema 3.1 é o (Cunha 2004, Lema 2.2) onde $\bar{M}(s)$ não precisa ter a forma (3.10), precisa apenas ser de fase mínima e possuir grau relativo vetorial uniforme e unitário. Entretanto, é necessário incluir um termo filtrado da saída ε (3.14) na desigualdade (3.15).

3.4 Realimentação de Saída

Quando apenas y está disponível para realimentação é necessário redefinir a superfície de deslizamento, o controle vetorial unitário U e a lei de controle u . Utilizando alguma estimativa $\hat{\sigma}$ da variável σ , obtida a partir da saída mensurável y , a nova superfície de deslizamento é dada por:

$$\hat{\sigma} = 0, \quad (3.17)$$

A lei de controle u e o controle vetorial unitário U são redefinidos por:

$$u = S_p U, \quad U = -\varrho(v(t)) \frac{\hat{\sigma}(t)}{|\hat{\sigma}(t)|}, \quad (3.18)$$

onde a função de modulação $\varrho(v(t))$ é contínua em t e $v(t)$ é um vetor composto por funções absolutamente contínuas não-negativas obtidas a partir de sinais disponíveis. Definindo-se o erro $\tilde{\sigma} := \sigma - \hat{\sigma}$, obtém-se diretamente de (3.9):

$$\hat{\sigma} = \bar{M}(s)[U + S_p^{-1}d] - \tilde{\sigma}. \quad (3.19)$$

De acordo com a seção anterior, se a perturbação $\tilde{\sigma}$ fosse identicamente nula, o Lema 3.1 seria suficiente para assegurar regulação da equação do erro (3.2) para uma função de modulação que satisfizesse (3.12). No caso de realimentação de saída a análise é mais complexa. Para considerar a perturbação $\tilde{\sigma}$ na análise de estabilidade utiliza-se o Lema C.1 (apresentado no Apêndice).

3.4.1 Análise de Estabilidade

Utilizando o Lema C.1 e a Proposição 1, assegura-se *apenas* que (3.2) é ISS com respeito à perturbação $\tilde{\sigma}$, se S for escolhido para que $\bar{M}(s)$ tenha a forma (3.10) com $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_q$ e a função de modulação ϱ satisfizer (3.12) com $k_\sigma = 0$, ou seja, se a seguinte desigualdade se verificar:

$$\varrho \geq (1 + k_d)|S_p^{-1}d(x, \xi, t)| + \delta, \quad (3.20)$$

a menos de termos exponencialmente decrescentes, com $\delta \geq 0$ sendo uma constante arbitrariamente pequena e k_d uma constante não-negativa apropriada⁴. Em contraste com o caso de realimentação de estados, a desigualdade (3.20) não é suficiente para se obter diretamente rastreamento global/semi-global.

Na realidade, pode-se mostrar que a seguinte desigualdade é válida⁵:

$$|x_e(t)| \leq \Pi + \Psi_{\gamma_1}(\|\tilde{\sigma}_{t,t_*}\|), \quad \forall t \in \mathcal{I}_*, \quad (3.21)$$

onde $\Psi_{\gamma_1}(\|\tilde{\sigma}_{t,t_*}\|) = k_{\gamma_1}\|\tilde{\sigma}_{t,t_*}\|$, $\Pi \in \mathcal{KL}$ (exponencial) e Π, t_*, \mathcal{I}_* estão definidos na Seção 1.4. Por outro lado, as superfícies de deslizamento ($\hat{\sigma} = 0$) dos Capítulos 4, 6 e 7 serão implementadas a partir de três alternativas para $\hat{\sigma}$ obtidas, respectivamente, por meio de: um filtro em avanço de fase baseado em estrutura variável, um HGO com ganho variante no tempo e um filtro em avanço de fase híbrido baseado em modos deslizantes de segunda ordem.

Todas as três alternativas são obtidas por estimativas baseadas em alto ganho. De forma geral, o alto ganho é função do inverso de um pequeno parâmetro $\epsilon > 0$. Será demonstrado que as alternativas para $\hat{\sigma}$ propostas garantem que a dinâmica que descreve o erro $\tilde{\sigma}$ é ISpS com respeito a $|x_e|$, ou seja, existem $\Psi_{\gamma_2} \in \mathcal{K}$ e $\Pi \in \mathcal{KL}$ (exponencial) tais que

$$|\tilde{\sigma}(t)| \leq \Pi + \epsilon \Psi_{\gamma_2}(\|(x_e)_{t,t_*}\|) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad \forall t \in \mathcal{I}_*, \quad (3.22)$$

onde o termo de ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ surge devido às perturbações uniformemente limitadas presentes em $\phi(x, t)$ e $\phi_c(x, t)$ e à trajetória de rastreamento $y_m(t)$ que também é uniformemente limitada.

No caso linear ($\phi \equiv 0$ e $\phi_c \equiv 0$), o “ganho” ISpS é linear $\Psi_{\gamma_2}(\|(x_e)_{t,t_*}\|) = k_{\gamma_2}\|(x_e)_{t,t_*}\|$. Desta forma, combinando as duas propriedades (ISS e ISpS) é possível assegurar rastreamento global/semi-global aplicando o teorema dos pequenos ganhos (Jiang et al. 1994) às equações (3.21) e (3.22).

⁴Com certo abuso de notação foi utilizado o mesmo símbolo ϱ para a função de modulação que na Seção anterior.

⁵Além disso, assim como o Lema 3.1, o Lema C.1 requer o prévio conhecimento da direção de controle. Entretanto, como será visto no Capítulo 7, mesmo sem conhecer a direção de controle a desigualdade (3.21) se verifica com o auxílio de uma função de monitoração apropriada que identificará a direção de controle correta.

Entretanto, no caso não-linear, em geral Ψ_{γ_2} é uma função não-linear em seu argumento, portanto apenas rastreamento semi-global têm sido obtido. Nos Capítulos 4 e 7 novos resultados semi-globais são apresentados, enquanto que no Capítulo 6 é introduzido um HGO com *ganho variável* que permite obter uma propriedade ISpS similar àquela do caso linear, resultando em rastreamento global.

3.4.2 Projeto do Controlador

São considerados conhecidos para o projeto dos controladores desta Tese: os limitantes das incertezas paramétricas da planta; o índice de observabilidade ν_g de $G(s)$ (ou ao menos um limitante superior); a ordem n da planta; o grau relativo vetorial uniforme ρ , a referência r e os estados do ξ_m do modelo de referência $M(s)$. No Capítulo 7 a direção de controle será considerada desconhecida.

Em linhas gerais, os controladores desenvolvidos nos Capítulos 4, 6 e 7 são projetados da seguinte forma. O primeiro passo é obter um valor mínimo para o pequeno parâmetro ϵ associado ao alto ganho utilizado na implementação da superfície de deslizamento. Conhecendo limitantes superiores e inferiores para os parâmetros da planta é possível determinar $\epsilon^* > 0$, tal que $\forall \epsilon \in (0, \epsilon^*]$ estabilidade é assegurada. Entretanto, na prática, atribui-se um valor inicial a ϵ e depois o diminui até um valor $\underline{\epsilon} > 0$ tal que o desempenho seja aceitável. A existência de $\underline{\epsilon}$ é garantida pela teoria.

O passo seguinte consiste em obter majorantes para a norma da perturbação d construídos com sinais disponíveis para poder implementar a função de modulação ϱ que satisfaça (3.20). Deve-se ressaltar que d (3.4) é uma função do estado da planta e, portanto, não é mensurável. Entretanto, por meio das hipóteses (H3) e (H6) e da expressão alternativa para d , desenvolvida no Apêndice, é possível obter um majorante para $|d|$ a partir de sinais conhecidos e/ou estimados.

É importante destacar que estimativas baseadas em alto ganho podem provocar o indesejável fenômeno de pico (Sussmann & Kokotović 1991) que, se for transferido para a planta por meio do sinal de controle u , pode degradar consideravelmente o desempenho do sistema ou até levar à instabilidade (Khalil 2002).

Note que qualquer pico eventual em $\hat{\sigma}$ nunca é transferido para a lei de controle u pois é bloqueado pelo quociente $\hat{\sigma}/|\hat{\sigma}|$ (ou pela função sinal no caso SISO). Desta

forma, u só pode ter pico se a função de modulação for implementada com estimativas baseadas em alto ganho. Sendo assim, para evitar pico no sinal de controle u , a função de modulação será implementada da seguinte forma:

$$\varrho(v(t)) := \theta_\varrho^T v(t) + \delta, \quad (3.23)$$

onde θ_ϱ é um vetor positivo de projeto, $\delta \geq 0$ uma constante arbitrária e $v(t)$ é um vetor positivo composto por de sinais medidos e estimativas que não são baseadas em alto ganho.

As seções a seguir apresentam, respectivamente, o fenômeno de pico em mais detalhes (Seção 3.5) e as componentes do vetor $v(t)$ (Seção 3.6). Os vetores θ_ϱ correspondentes aos controladores de cada um dos Capítulos 4, 6 e 7 serão determinados com o auxílio das Proposições 2 e 3 (Seção 3.6).

3.5 Fenômeno de Pico

Um termo da forma

$$p(t) := (a/\epsilon^b)e^{-ct/\epsilon},$$

onde $a, b, c > 0$ são constantes, apresenta um comportamento transitório do tipo impulsivo, quando $\epsilon \rightarrow 0$, onde o pico transitório atinge valores da ordem de $\mathcal{O}(1/\epsilon)$ antes de decair rapidamente para zero. Este comportamento é conhecido como *fenômeno de pico* (Khalil 2002).

O conceito de *tempo de extinção de pico*, apresentado a seguir, é útil tanto para a análise quanto para o projeto de controladores que exibam pico. O tempo de extinção de pico t_e é definido como a solução de

$$(a/\epsilon^b)e^{-ct_e/\epsilon} = 1,$$

para cada valor de $\epsilon \in (0, 1]$. Note que t_e é uma função de ϵ que satisfaz $t_e(\epsilon) \leq \bar{t}_e(\epsilon)$, onde $\bar{t}_e(\epsilon) \in \mathcal{K}$. Uma discussão mais detalhada a respeito do fenômeno de pico e do tempo de extinção de pico pode ser encontrada em (Cunha 2004, Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2005).

3.6 Estimativas Sem Alto Ganho (Sem Pico)

O conceito de aproximação por filtro de primeira ordem (*first order approximation filter* - FOAF), descrito em (Hsu et al. 2003, Lemma 2) e em (Cunha 2004) e resumido a seguir, é fundamental para o projeto e para a análise dos controladores desta Tese.

3.6.1 Aproximações por Filtros de Primeira Ordem

Considere uma função de transferência matricial (em s), incerta, dada por $G_F(s, \theta_F)$, onde θ_F é um vetor de parâmetros incertos que pertencem a um conjunto compacto Ω_F conhecido. Seja (A_F, B_F, C_F, D_F) uma realização mínima de $G_F(s, \theta_F)$ e suponha que $G_F(s, \theta_F)$ é própria e BIBO estável, $\forall \theta_F \in \Omega_F$.

O filtro de primeira ordem com função de transferência

$$\frac{c_F}{(s + \gamma_F)}, \quad (c_F, \gamma_F > 0)$$

é uma aproximação por filtro de primeira ordem (FOAF) para $G_F(s, \theta_F)$, se

$$|g_F(t, \theta_F)| \leq c_F e^{-\gamma_F t} + |D_F| \delta(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \theta_F \in \Omega_F, \quad (3.24)$$

onde $g_F(t, \theta_F)$ é a resposta impulsiva de $G_F(s, \theta_F)$ e $\delta(t)$ é a função delta de Dirac. A existência do par (c_F, γ_F) é uma consequência direta da BIBO estabilidade de $G_F(s, \theta_F)$.

Daqui por diante, por simplicidade, o par (c_F, γ_F) será referido como uma aproximação por filtro de primeira ordem (FOAF). Para calcular as constantes (c_F, γ_F) pode-se utilizar um técnica simples baseada em formas quadráticas de Lyapunov, como em (Hsu et al. 2003, Lemma 2), ou uma técnica um pouco mais complexa, porém menos conservativa, baseada em métodos de otimização (Cunha, Costa & Hsu 2003). Em ambos os caso, γ_F satisfaz $0 < \gamma_F < \lambda_m[A_F]$.

3.6.2 Estimativas do Estado da Planta e da Perturbação

Nesta seção serão fornecidos majorantes para $|x(t)|$ e $|d(t)|$, a menos de termos exponencialmente decrescentes, parametrizados em função do seguinte vetor $v(t)$ de sinais

disponíveis, ou *vetor regressor*:

$$v^T(t) := [v_1^T(t) \ v_2^T(t) \ v_3^T(t) \ v_4^T(t) \ v_5^T(t)] \in \mathbb{R}^{16}, \quad (3.25)$$

onde v_1, \dots, v_5 serão definidos a seguir. A componente $v_1(t)$ é definida por:

$$v_1^T(t) := [|\omega_1(t)| \ |\omega_2(t)| \ |e(t)|] \in \mathbb{R}_+^3, \quad (3.26)$$

onde $e(t)$ é o erro de rastreamento e $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^{\rho-1}$ são vetores de estado dos filtros de entrada e saída:

$$\dot{\omega}_1 = \Phi\omega_1 + \Gamma u, \quad \dot{\omega}_2 = \Phi\omega_2 + \Gamma y, \quad (3.27)$$

com Φ sendo uma matriz Hurwitz de projeto e Γ um vetor constante tal que (Φ, Γ) seja controlável. A componente $v_2(t)$ é composta por um sinal escalar apenas,

$$v_2(t) := |u_a(t)| \in \mathbb{R}_+, \quad (3.28)$$

onde o *controle médio*

$$u_a(t) := \frac{1}{\tau_a s + 1} u, \quad \tau_a > 0, \quad (3.29)$$

é usado somente para obter estimativas menos conservativas. A componente v_3 será composta por sinais filtrados. Com $\varphi_0, \varphi_\vartheta$ dados em (H3),

$$F_\gamma(s) := \frac{1}{(s + \gamma_v)},$$

e $\gamma_v > 0$ sendo uma constante apropriada, define-se $v_3(t)$ por:

$$\begin{aligned} v_3^T(t) &:= \left[\bar{v}^T \ |F_\gamma(s)\varphi_0(y(t), t)| \ |F_\gamma(s)\varphi_\vartheta(y(t), t)| \right] \in \mathbb{R}_+^6, \\ \bar{v}^T(t) &:= \left[|F_\gamma(s)|\omega_1(t)| \ |F_\gamma(s)|\omega_2(t)| \ |F_\gamma(s)|e(t)| \ |F_\gamma(s)|u_a(t)| \right] \in \mathbb{R}_+^4. \end{aligned} \quad (3.30)$$

No que segue, $\Pi(t)$ denota um termo exponencialmente decrescente (ver Seção 1.4) devido às condições iniciais da planta, do modelo de referência, dos filtros de I/O, do filtro da média e dos filtros utilizados na implementação de v . Este termo Π será definido precisamente em cada um dos Capítulos 4, 6 e 7, como função do vetor completo

de estados correspondente. De acordo com a proposição a seguir é possível obter um majorante para a norma do estado x da planta parametrizado pelos sinais v_2 e v_3 , a menos de um termo Π exponencialmente decrescente (ver Seção 1.4).

Proposição 2 [Majorante para a Norma do Estado da Planta] *Suponha que (H0)–(H3) sejam verificadas. Então, existem vetores constantes com elementos não-negativos θ_{x2}, θ_{x3} tais que o estado x da planta (2.3) satisfaz ($\forall t \in \mathcal{I}_*$)*

$$|x| \leq \hat{x} + \Pi, \quad \hat{x} := \theta_{x2}^T v_2 + \theta_{x3}^T v_3 = \theta_x^T v, \quad (3.31)$$

com $\theta_x^T := [0 \quad \theta_{x2}^T \quad \theta_{x3}^T \quad 0 \quad 0]$, v em (3.25), v_2 em (3.28) e v_3 em (3.30).

Prova: Ver Apêndice. ■

Utilizando o majorante \hat{x} , a Hipótese (H6) e expressão alternativa para d desenvolvida no Apêndice, é possível obter um majorante para $|d|$ parametrizado por v_1 e por v_4 , com v_4 definido por:

$$v_4^T(t) := [\varphi_d(\hat{x}, t) \quad F_\gamma(s)\varphi_d(\hat{x}(t), t) \quad |r(t)| \quad |\xi_m(t)|] \in \mathbb{R}^4, \quad (3.32)$$

onde $r(t)$ é o sinal de referência do modelo $M(s)$ com vetor de estado ξ_m (2.24), φ_d, Ψ são definidos em (H6) e \hat{x} em (3.31). Na realidade a seguinte proposição é válida:

Proposição 3 [Majorante para a Norma da Perturbação de Entrada] *Suponha que (H0)–(H4) e (H6) sejam verificadas. Então, existem vetores constante com elementos não-negativos θ_{d1} e θ_{d4} tais que a perturbação d em (3.4) satisfaz ($\forall t \in \mathcal{I}_*$)*

$$|d| \leq \theta_{d1}^T v_1 + \theta_{d4}^T v_4 + \Pi = \theta_d^T v + \Pi, \quad (3.33)$$

com $\theta_d^T := [\theta_{d1}^T \quad 0 \quad 0 \quad \theta_{d4}^T \quad 0]$, v_1 em (3.26), v_4 em (3.32) e v em (3.25).

Prova: Ver Apêndice. ■

Finalmente, a componente v_5 do vetor $v(t)$, que será útil no Capítulo 6, é dada por:

$$v_5^T := [\Psi(c_x \hat{x}) \quad |F_\gamma(s)\Psi(c_x \hat{x})|] \in \mathbb{R}_+^2, \quad (3.34)$$

com Ψ em (H6) e $c_x \geq 1$ sendo uma constante apropriada.

3.6.3 Proposição Auxiliar

A seguinte proposição é fundamental para que a desigualdade (3.22) se verifique.

Proposição 4 [Majorante para a Norma do Vetor v] *Suponha que (H0)–(H6) sejam verificadas. Então, existem uma constante $c_v \geq 0$ e uma função $\Psi_v \in \mathcal{K}$ tais que*

$$|v| \leq \Psi_v(\|(x_e)_{t,t^*}\|) + c_v + \Pi, \quad \forall t \in \mathcal{I}_*, \quad (3.35)$$

com v em (3.25).

Prova: No que segue k_i 's denotam constantes positivas e Ψ 's funções da classe \mathcal{K} . Lembrando que $\xi = x_e + \xi_m$ e que ξ_m é uniformemente limitado, pode-se concluir a partir de (H5), utilizando a Propriedade 1, que existem uma função Ψ_1 e k_1 tais que $|x| \leq \Psi_1(|x_e|) + k_1$. Portanto, de (H6) e de (3.4) obtém-se a seguinte desigualdade $|d| \leq \Psi_2(|x_e|) + k_2$.

Agora, reescreva a dinâmica de ω_1 , dada em (3.27), da seguinte forma

$$\dot{\omega}_1 = \Phi\omega_1 + \Gamma[u + d] - \Gamma d. \quad (3.36)$$

Da demonstração da Proposição 1 – equação (3.13) – tem-se que $u+d = S_p \bar{K}^{-1}[\bar{\sigma} + \bar{\Gamma}\sigma]$. Logo, aplicando o conceito de FOAF a (3.36), as seguintes desigualdades se verificam

$$|\omega_1| \leq \frac{1}{s + \gamma_1} * |\sigma| + \Psi_3(|x_e|) + k_3 + \Pi \leq \Psi_4(\|(x_e)_{t,t^*}\|) + k_3 + \Pi,$$

onde a relação $\sigma = Sx_e$ foi utilizada para desenvolver a última desigualdade. Analogamente, pode-se obter uma desigualdade similar para $|u_a|$, com u_a definido em (3.29). Logo a componente v_2 (3.28) satisfaz uma desigualdade análoga a (3.35). Além disso, relembrando que a dinâmica de ω_2 em (3.27) é ISS em relação a y , que o erro de rastreamento $e = y - y_m$, que $y = C_\rho \xi = C_\rho x_e + C_\rho \xi_m$ e que y_m, ξ_m são uniformemente limitados, conclui-se que a norma da componente v_1 (3.26) também satisfaz uma desigualdade análoga a (3.35). O mesmo raciocínio pode ser aplicado as componentes v_3, v_4 e v_5 , definidas em (3.30), (3.32) e (3.34), respectivamente. ■

Capítulo 4

Controle de Plantas Multivariáveis

Neste Capítulo propõe-se uma solução para o problema de rastreamento via realimentação de saída de uma classe de sistemas não-lineares, incertos e multivariáveis. A abordagem por modelo de referência e modo deslizante é adotada para projetar uma lei de controle, baseada no controle vetorial unitário, para plantas com grau relativo uniforme e *arbitrário*. A solução proposta é uma generalização do controlador adaptativo por modelo de referência e vetor unitário (*unit vector model-reference adaptive control* – UV-MRAC) de (Cunha 2004, Capítulo 7) (ver também (Hsu et al. 2003)).

Em contraste com (Oh & Khalil 1997), o fenômeno de pico é evitado sem precisar saturar o sinal de controle. A saturação do sinal de controle possui uma desvantagem notável. Para aumentar a região de atração do sistema em malha fechada o nível de saturação tem que ser aumentado. Com isso sinais contendo pico com amplitudes cada vez maiores são transmitidos para a planta, podendo acarretar transitórios inaceitáveis.

O texto deste Capítulo é organizado como segue. A Seção 4.1 apresenta a formulação do problema com base no Capítulo 2. A estrutura do controlador proposto é descrita na Seção 4.2. Em seguida, na Seção 4.3, define-se a variável de deslizamento e majorantes para erros auxiliares são fornecidos. A análise de estabilidade é conduzida na Seção 4.4. Detalhes de projeto, simulações e conclusões são apresentados nas Seções 4.5, 4.6 e 4.7, respectivamente. Por fim, algumas demonstrações são deixadas para a Seção 4.8.

4.1 Formulação do Problema

Neste Capítulo considera-se plantas da forma (2.1) ou (2.3), que satisfaçam as hipóteses (H0)–(H6) (vide Capítulo 2) e, adicionalmente, a seguinte hipótese:

(H7) Existe uma matriz S_p , conhecida, tal que $-K_p S_p$ é Hurwitz.

A Hipótese (H7) representa uma redução significativa no conhecimento prévio do ganho de alta frequência da planta (Hsu et al. 2002). Em (Tao & Ioannou 1988, Tao & Ioannou 1989, Chien et al. 1996) foi necessário assumir que a matriz $K_p S_p$ seja definida positiva (e simétrica, em alguns casos), o que é mais restritivo.

Diz-se que o sistema MIMO (2.1) possui direção de controle conhecida se for possível obter S_p satisfazendo (H7). Para sistemas SISO ($K_p \in \mathbb{R}$), esta propriedade equivale a conhecer o $\text{sgn}(K_p)$, sendo $S_p = \text{sgn}(K_p) \in \{1, -1\}$. O objetivo de controle e o modelo de referência estão descritos no Capítulo 2, ver equações (2.2) e (2.22).

4.2 O Controlador UV-MRAC

Para tratar o caso de plantas com grau relativo $\rho > 1$ arbitrário a estratégia é aproximar o problema para o caso de grau relativo unitário. O operador $L(s)$, dado em (2.23), é não-causal mas pode ser aproximado pelo filtro de avanço de fase \mathcal{L} , baseado no vetor unitário, apresentado na Figura 4.1, onde $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{N-1}$ ($N := \rho - 1$) são denominados de *erros auxiliares*, $\hat{\sigma} = \varepsilon_N = 0$ é a superfície de deslizamento e $L_1(s), \dots, L_N(s)$ estão de acordo com (2.23). Assume-se que as funções de modulação *auxiliares* $\varrho_1, \dots, \varrho_{N-1}$ e a função de modulação $\varrho (= \varrho_N)$ são adequadas para que modos de deslizamento ideais comecem em algum tempo finito em cada malha com UVC.

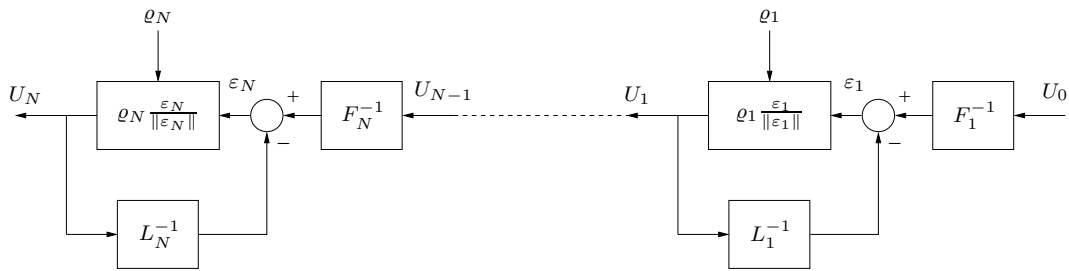


FIGURA 4.1: Filtro de avanço a estrutura variável baseado no vetor unitário, bloco \mathcal{L} da Figura 4.2.

Os filtros de média $F_i^{-1}(\tau s)$ da Figura 4.1 são filtros passa-baixas com função de transferência $F_i^{-1}(\tau s) = [f_{avi}(\tau s)I]^{-1}$, onde $f_{avi}(\tau s)$ são polinômios Hurwitz em τs tais que $f_{avi}(0) = 1$, por exemplo, $f_{avi}(\tau s) = \tau s + 1$. Caso a constante de tempo $\tau > 0$ seja suficientemente pequena, os filtros de média fornecem uma aproximação para os controles equivalentes $(U_{i-1})_{eq} \approx F_i^{-1}(\tau s)U_{i-1}$ (Utkin 1978).

De acordo com a análise de estabilidade (Seção 4.4), a constante de tempo τ é o único parâmetro de projeto que deve ser ajustado para aumentar a região de estabilidade. Ele é escolhido pequeno o suficiente para garantir que o erro de rastreamento e a região de estabilidade sejam ambos aceitáveis.

A idéia central da estratégia do controlador UV-MRAC para grau relativo $\rho > 1$ é a introdução do erro de predição (Hsu et al. 1994)

$$\hat{e} = M(s)L(s)K^{\text{nom}} [U_0 - L^{-1}(s)U_N], \quad (4.1)$$

onde K^{nom} é um valor nominal de $K = K^*S_p$ tal que $(K^{\text{nom}})^{-1}K$ seja Hurwitz, $S_p \in \mathbb{R}^{q \times q}$ é uma matriz de projeto que satisfaz (H7) e $L(s)$ é dado em (2.23). O controle U_0 é um UVC projetado para criar o modo de deslizamento ideal necessário na primeira malha de controle vetorial unitário. O caso de grau relativo unitário pode ser tratado fazendo-se $L(s) = \mathcal{L} = I$. Então, $\hat{e} \equiv 0$ e conseqüentemente a malha interna do erro de predição é eliminada. A lei de controle proposta é dada por (ver Figura 4.2)

$$u = -S_p U_N, \quad U_N = \varrho \frac{\hat{\sigma}}{|\hat{\sigma}|}, \quad \text{com } \hat{\sigma} = \varepsilon_N, \quad (4.2)$$

onde a função de modulação $\varrho(v(t))$ contínua em t é dada por

$$\varrho(v(t)) := \theta_\varrho^T v(t) + \delta, \quad (4.3)$$

sendo $v(t)$ o vetor de sinais disponíveis definido na Seção 3.6.2, θ_ϱ um vetor constante de elementos não-negativos apropriados e $\delta \geq 0$ uma constante arbitrária.

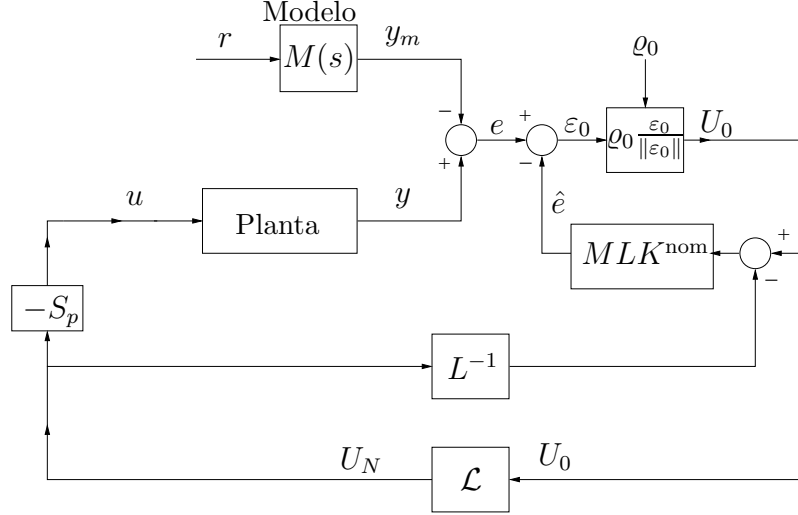


FIGURA 4.2: UV-MRAC para plantas não-lineares com grau relativo uniforme $\rho \geq 2$. Para simplificar o esquema, a implementação de ϱ_0 foi omitida. A realização do filtro de avanço \mathcal{L} , baseado no vetor unitário, é apresentada na Figura 4.1.

4.3 Equações de Erros Auxiliares

Nesta seção são apresentadas as expressões dos erros auxiliares de forma adequada para o projeto do controlador e para a análise de estabilidade (Hsu et al. 1997, Hsu et al. 2002). No que segue, $\pi(t)$ denota genericamente um termo exponencialmente decrescente devido às condições iniciais envolvidas na equação do erro (3.2) e nos seguintes filtros BIBO estáveis: (i) $F_i^{-1}(\tau s)$ e $L_i^{-1}(s)$ ($i = 1, \dots, N$) do filtro de avanço \mathcal{L} da Figura 4.1 e (ii) $L^{-1}(s)$ e $ML(s)K^{\text{nom}}$ do controlador da Figura 4.2.

De (3.3) e (4.1) o erro auxiliar $\varepsilon_0 = e - \hat{e}$ pode ser reescrito como:

$$\varepsilon_0 = M(s)K^* * [u + d] - M(s)L(s)K^{\text{nom}} * [U_0 - L^{-1}(s) * U_N] + \pi. \quad (4.4)$$

Portanto, de (4.2), lembrando que $K := K^*S_p$ e definindo

$$\bar{U} := -(K^{\text{nom}})^{-1}K^*d - [I - (K^{\text{nom}})^{-1}K]U_N, \quad (4.5)$$

obtém-se para ε_0 :

$$\varepsilon_0 = M(s)L(s)K^{\text{nom}} * [-U_0 - L^{-1}(s) * \bar{U}] + \pi. \quad (4.6)$$

Os erros auxiliares do filtro de avanço são dados por

$$\varepsilon_i = F_i^{-1}(\tau s) * U_{i-1} - L_i^{-1}(s) * U_i + \pi. \quad (4.7)$$

Estas expressões para os erros auxiliares podem ser manipuladas resultando em:

$$\varepsilon_i = L_i^{-1}(s) \left[-U_i - F_{1,i}^{-1}(\tau s) L_{i+1,N}^{-1}(s) * \bar{U} \right] - \pi_{ei} - \pi_{0i}, \quad (i=1, \dots, N) \quad (4.8)$$

$$\pi_{ei} = L_{i-1}(s) F_i^{-1}(\tau s) * [\pi_{e,i-1} + \varepsilon_{i-1}], \quad (i=2, \dots, N) \quad (4.9)$$

$$\pi_{0i} = [M(s) F_{1,i}(\tau s) L_{i,N}(s) K^{\text{nom}}]^{-1} * \varepsilon_0, \quad (i=1, \dots, N) \quad (4.10)$$

onde $L_{N+1,N}(s) := 1$, $\pi_{e1} \equiv 0$ e, para $i = 1, \dots, N$:

$$L_{i,N}(s) := L_i(s) L_{i+1}(s) \dots L_N(s) \quad \text{e} \quad F_{1,i}(\tau s) := F_1(\tau s) F_2(\tau s) \dots F_i(\tau s).$$

4.3.1 Equação da Variável de Deslizamento

A variável de deslizamento $\hat{\sigma} = \varepsilon_N$ satisfaz:

$$\hat{\sigma} = L_N^{-1}(s) (K^{\text{nom}})^{-1} K * [-U_N + S_p^{-1} d] - \tilde{\sigma}, \quad (4.11)$$

onde

$$\tilde{\sigma} := \tilde{W}(s, \tau) * \left\{ [I - (K^{\text{nom}})^{-1} K] U_N + (K^{\text{nom}})^{-1} K * d \right\} + \pi_{eN} + \pi_{0N} + \pi, \quad (4.12)$$

com $\tilde{W}(s, \tau) := (F_{1,N}(\tau s) - 1) F_{1,N}^{-1}(\tau s) L_N^{-1}(s) I$. Comparando (4.11) com (3.19), pode-se verificar que $\hat{\sigma} = \varepsilon_N$ é uma aproximação para $\sigma = Sx_e$, quando S é tal que $\bar{M}(s) = S(sI - A_m)^{-1} B_m K_p S_p = (K^{\text{nom}})^{-1} K L_N^{-1}(s)$.

4.3.2 Majorantes para a Norma dos Erros Auxiliares

Considere o sistema do erro (3.2), (4.6), (4.8) e (4.11). A fim de levar em consideração de forma completa as condições iniciais, utiliza-se o vetor de estado z assim definido:

$$z^T := \left[(z^0)^T, \hat{\sigma}^T, x_e^T \right], \quad (4.13)$$

$$(z^0)^T := \left[\varepsilon_0^T, \dots, \varepsilon_{N-1}^T, (x_{\mathcal{F}}^0)^T \right], \quad (4.14)$$

onde $x_{\mathcal{F}}^0$ denota termos transitórios devido às condições iniciais, que decrescem exponencialmente para zero, correspondentes: (i) a dinâmica interna (2.7), (ii) aos filtro de entrada e saída (3.27), (iii) ao filtro da média (3.29), (iv) aos operadores $L^{-1}(s)$ (Figura 4.2) e $F_{1,i}^{-1}(\tau s)L_{i+1,N}^{-1}(s)$ do filtro de avanço (Figura 4.1) e (v) aos filtros BIBO estáveis de (3.30), (3.32) e (3.34) utilizados na síntese das funções de modulação.

Com z em (4.13), pode-se verificar que $|\pi| \leq \Pi$, onde:

$$\Pi(t) := \Psi_{\pi}(|z(t_*)|)e^{-\gamma(t-t_*)}, \quad \forall t \in \mathcal{I}_*, \quad (4.15)$$

onde Ψ_{π} denota uma função (genérica) da classe \mathcal{K}_{∞} e $\gamma > 0$ uma constante (genérica). O seguinte teorema é utilizado para obter majorantes para os erros auxiliares.

Teorema 4.1 *Para $N = \rho - 1 \geq 1$, suponha que $-K^{\text{nom}}$ e $-(K^{\text{nom}})^{-1}K$ são matrizes Hurwitz. Considere os erros auxiliares (4.6) e (4.8). Se as funções de modulação auxiliares satisfizerem, $\forall t \in \mathcal{I}_*$*

$$\begin{aligned} \varrho_0(t) &\geq (1 + c_{d0}) \left| L^{-1}(s) * \bar{U} \right| + c_{\varepsilon 0} |\varepsilon_0|, \\ \varrho_i(t) &\geq (1 + c_{di}) \left| F_{1,i}^{-1}(\tau s) L_{i+1,N}^{-1}(s) * \bar{U} \right|, \end{aligned} \quad (4.16)$$

($i = 1, \dots, N - 1$), a menos de termos exponencialmente decrescentes, com constantes apropriadas $c_{\varepsilon 0} \geq 0$ e $c_{di} \geq 0$, então:

$$|\varepsilon_{i-1}(t)|, |\pi_{ei}(t)|, |\pi_{0i}(t)| \leq \Pi, \quad \forall t \in \mathcal{I}_*, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (4.17)$$

Prova: Ver Seção 4.8. ■

4.4 Análise de Estabilidade

O teorema a seguir estabelece a propriedade de estabilidade *semi-global* do sistema do erro. Conseqüentemente, rastreamento semi-global é garantido.

Teorema 4.2 *Suponha que as hipóteses (H0)–(H7) sejam verificadas, que as matrizes $-K^{\text{nom}}$ e $-(K^{\text{nom}})^{-1}K$ sejam Hurwitz, as funções de modulação auxiliares satisfaçam (4.16) e que o controle seja dado por (4.2) com a função de modulação $\varrho(t)$ (4.3) satisfazendo*

$$\varrho(t) \geq (1 + c_{dN})|S_p^{-1}d| + \delta, \quad \forall t \in \mathcal{I}_*, \quad (4.18)$$

a menos de termos exponencialmente decrescentes, onde $c_{dN} \geq 0$ é uma constante apropriada e $\delta \geq 0$ é uma constante arbitrária. Então, para $\tau > 0$ suficientemente pequeno, a origem do sistema do erro (3.2), (4.6), (4.8) e (4.11), com estado z definido em (4.13), é semi-globalmente exponencialmente estável com respeito a um conjunto residual de ordem τ , i.e., existem uma constante positiva R_0 , que pode ser escolhida arbitrariamente grande para τ suficientemente pequeno, uma função positiva $a(\cdot)$ e $\Psi(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ tais que

$$|z(t)| \leq \Psi(|z(0)|)e^{-a(|z(0)|)t} + \mathcal{O}(\tau), \quad \forall t \geq 0,$$

uma vez que $|z(0)| \leq R_0$. Além disso, todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados.

Prova: A demonstração encontra-se na Seção 4.8. ■

Observação 3 (Rastreamento Global) *Sob as condições do Teorema 4.2 e, além disso, se as Hipóteses (H3) e (H6) forem verificadas com funções globalmente Lipschitz então, o resultado se torna global. Caso a condição Lipschitz global não seja satisfeita, estabilidade exponencial global ainda pode ser obtida se a planta apresentar grau relativo uniforme e unitário ($\rho = 1$), ver (Hsu et al. 2003).*

Observação 4 (Ausência de Pico) *Vale ressaltar que o quociente $\frac{\hat{\sigma}}{|\hat{\sigma}|}$ da lei de controle u (4.2) bloqueia a transmissão de qualquer pico eventual presente em $\hat{\sigma}$ para u e que a função de modulação é implementada com os sinais $v(t)$ que não contém pico. Portanto, a componente de z , x_e , também é livre de pico pois (3.2) é ISS.*

4.4.1 Realização de Modos Deslizantes Ideais

A realização de modos deslizantes é importante pois impede a ocorrência do fenômeno de *chattering* no sinal de controle, ao menos em condições ideais. Os modos deslizantes ideais do UV-MRAC ocorrem nas *superfícies auxiliares* $\varepsilon_i \equiv 0$ ($i = 0, 1, \dots, N - 1$) e em $\hat{\sigma} = \varepsilon_N \equiv 0$. Os Teoremas 4.1 e 4.2 asseguram que, para $N \geq 1$, as N primeiras superfícies ($i = 0, 1, \dots, N - 1$) são alcançadas assintoticamente. Pode-se demonstrar que $\hat{\sigma} \equiv 0$ também é alcançada assintoticamente de acordo com o seguinte corolário.

Corolário 4.2.1 *Sob as hipóteses do Teorema 4.2 e com uma função de modulação ϱ apropriada, $\hat{\sigma}(t)$ também tende a zero assintoticamente se a seguinte função de transferência for de fase mínima, ou seja, se todos os seus zeros de transmissão possuírem parte real negativa:*

$$L_N^{-1}(s)[I + [(K^{\text{nom}})^{-1}K - I]F_{1,N}(\tau s)]. \quad (4.19)$$

Prova: A equação para $\hat{\sigma}$ pode ser reescrita na forma

$$\hat{\sigma} = L_N^{-1}(s)[I + \Delta K F^{-1}(\tau s)] * \{-U_N + F_d(\tau s) * d\} - \pi_{eN} - \pi_{0N} - \Pi, \quad (4.20)$$

onde $\Delta K := (K^{\text{nom}})^{-1}K - I$, $F(\tau s) := F_{1,N}(\tau s)$ e

$$F_d(\tau s) := [I + \Delta K F^{-1}(\tau s)]^{-1} F^{-1}(\tau s) (K^{\text{nom}})^{-1} K^*.$$

A prova do corolário segue aplicando-se o (Hsu et al. 2002, Lema 1, p. 291) à equação (4.20). Este lema é uma versão mais geral do Lema 3.1, onde a função de transferência $\bar{M}(s)$ precisa ser apenas de fase mínima e possuir ganho de alta frequência anti-Hurwitz.

Uma condição suficiente para $\hat{\sigma} \rightarrow 0$ resulta da aplicação do teorema de pequenos ganhos à função de transferência $\Delta K F^{-1}(\tau s)$ com realimentação unitária. Obtém-se a seguinte condição suficiente $|\Delta K| \|F^{-1}(\tau s)\|_\infty < 1$, onde $\|\cdot\|_\infty$ denota a norma \mathcal{H}_∞ . A função de modulação ϱ deve satisfazer (4.18) e também, de acordo com o (Hsu et al. 2002, Lema 1, p. 291), a seguinte desigualdade

$$\varrho(t) \geq (1 + c_{dN1})|F_d(\tau s) * d|. \quad (4.21)$$

Um simples FOAF pode ser utilizado para se obter ϱ a partir de $|d|$. ■

4.5 Projeto das Funções de Modulação

Funções de modulação que satisfaçam (4.16), (4.18) e (4.21), a menos de termos que decrescem para zero em módulo, podem ser implementadas usando somente os sinais disponíveis v apresentados na Seção 3.6.2. Os termos adicionais devido ao transitório dos filtros utilizados na implementação das funções de modulação podem ser incluídos no estado z^0 , que já foi considerado na análise de estabilidade.

Para o projeto de ϱ_i , $i = 0, \dots, N$, aplica-se o conceito de FOAF aos operadores envolvidos nas desigualdades (4.16), considerando a definição de \bar{U} (4.5). Para ϱ_0 obtém-se,

$$\varrho_0 = \delta_0 + c_{d0} \hat{L}^{-1}(s) \theta_d^T v + c_{U0} |L^{-1}(s) U_N|, \quad (4.22)$$

com θ_d dado na Proposição 3, constantes apropriadas c_{d0} , $c_{U0} > 0$, $\delta_0 \geq 0$ arbitrário e $\hat{L}^{-1}(s)$ sendo um FOAF para $L^{-1}(s)$. De maneira similar, para ϱ_i , $i = 1, \dots, N - 1$, tem-se

$$\varrho_i = \delta_i + c_{di} |\hat{F}_l^{-1}(s) \theta_d^T v + c_{Ui} |F_{1,i}^{-1}(\tau s) L_{i+1,N}^{-1}(s) U_N|, \quad (4.23)$$

com $\delta_i \geq 0$ arbitrário, constantes apropriadas c_{di} , $c_{Ui} > 0$ e $\hat{F}_l^{-1}(s)$ sendo um FOAF para $F_{1,i}^{-1}(\tau s) L_{i+1,N}^{-1}(s)$. Note que as funções de modulação ϱ_i , $i = 1, \dots, N - 1$ são funções de ϱ . A função de modulação ϱ deve ser projetada para satisfazer (4.18) e (4.21). Obtém-se:

$$\delta_N + c_{dN} \theta_d^T v + \hat{F}_d(s) \theta_d^T v \leq \varrho = \theta_\varrho^T v + \delta_N, \quad (4.24)$$

onde $\hat{F}_d(s)$ é um FOAF para $F_d(\tau s)$, $\delta_N \geq 0$ é uma constante arbitrária, $c_{dN} \geq 0$ e θ_ϱ é escolhido apropriadamente de acordo com a definição do sinal $v(t)$, apresentada na Seção 3.6.2.

4.6 Simulações

A fim de avaliar o desempenho do controlador proposto, considere a planta (2.1) com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

e ϕ, ϕ_c dados por

$$\phi^T(x, t) = \begin{bmatrix} \Delta_1 x_1^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_c^T(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & \Delta_2 x_2 \sin(\Delta_3 t) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

onde os parâmetros incertos são limitados da seguinte forma $0.6 \leq b_{21} \leq 2$, $-6 \leq b_{22} \leq -2$, $0.09 \leq b_{41}, b_{42} \leq 0.11$, $1 \leq \Delta_1 \leq 3$, $0 \leq \Delta_2 \leq 0.5$ e $8 \leq \Delta_3 \leq 10$. A perturbação não-linear é composta por uma função quadrática do sinal de saída $y_1 = x_1$ e não é casada com respeito ao sinal de controle. Portanto, neste exemplo, o sistema não-linear é localmente Lipschitz e a perturbação ϕ não pode ser cancelada por sinais de controle triviais devido as incertezas. O subsistema linear possui grau relativo uniforme $\rho=2$ e matriz de ganho de alta frequência dada por

$$K_p = \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Verifica-se facilmente que a matriz incerta $-K_p$ é sempre Hurwitz. Portanto, (H7) é satisfeita com $S_p = I$. O modelo de referência escolhido é

$$M(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{(s+4)^2}, \frac{1}{(s+4)^2} \right\}. \quad (4.28)$$

O sistema não apresenta zeros e as hipóteses (H0)–(H2) e (H4) são satisfeitas. As perturbações refletidas para o subsistema com estado $\xi = [x_1 \ x_2 + \Delta_1 x_1 \ x_3 \ x_4]^T$ resultam na perturbação casada $d_\phi = K_p^{-1} [2\Delta_1 x_1 x_2 \ \Delta_2 x_2 \sin(\Delta_3 t)]^T$. Portanto, em (H5) tem-se: $\psi_\xi = 4|\xi| + \Delta_1 |\xi|^2$ e $k_\xi = 0$. A função de majoração de (H6) é dada por: $\varphi_d = \Psi = |K_p^{-1} [6|C||x| + 0.5]|x|$. A perturbação equivalente de entrada da equação

do erro (d) é majorada de acordo com a Proposição 3, com $\theta_{d1} = [4 \ 1 \ 2]^T$, $\theta_{d4} = [1 \ 5 \ 3 \ 0]^T$ e $\gamma_v = 0.5$. Na hipótese (H3): $k_x^* = 0.5$ e $\varphi_\vartheta = 3|y|^2$.

Os filtros de entrada e saída foram escolhidos com $\det(sI - \Phi) = (s + 10)^2$ e os seguinte parâmetros nominais (K_p^{nom}) foram considerados: $b_{21} = 0.66$, $b_{22} = -2$, $b_{41} = 0.095$ e $b_{42} = 0.095$. As funções de modulação (4.22)(4.24) foram implementadas com $c_{U0} = c_{d0} = 1$, $c_{U1} = c_{d1} = 0.2$, $\delta_0 = \delta_1 = 0.1$, $K^{\text{nom}} = K_p^{\text{nom}}$.

Na simulação mostrada na Figura 4.3, os sinais de referência r_1 e r_2 são, respectivamente, uma onda quadrada de amplitude 1 e frequência 4 rad/s e uma senóide de amplitude 1 e frequência 3 rad/s . Os parâmetros verdadeiros da planta, desconhecidos por hipótese, são $b_{21} = 1$, $b_{22} = -3$, $b_{41} = 0.1$, $b_{42} = 0.1$, $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 0.5$ e $\Delta_3 = 10$. O

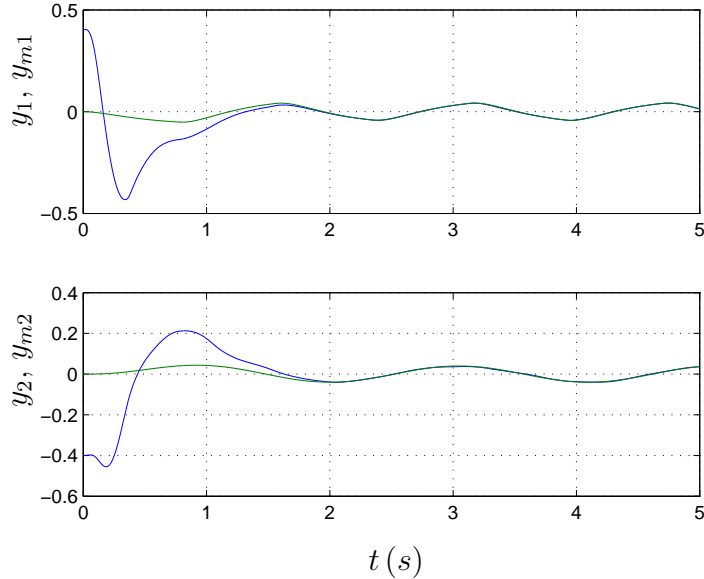


FIGURA 4.3: Simulação dos sinais de saída da planta e do modelo de referência.

rastreamento da saída do modelo pela saída da planta é visível na Figura 4.3. A constante de tempo dos filtros de média ($\tau = 0.01$ s) foi escolhida suficientemente pequena de forma a manter a região de estabilidade grande e, ao mesmo tempo, o erro residual de saída pequeno.

4.7 Conclusões

Neste Capítulo foi descrito o desenvolvimento de um controlador para o rastreamento do sinal de saída de um modelo de referência utilizando-se apenas realimentação de

saída. Plantas não-lineares, multivariáveis e incertas foram consideradas. O controlador proposto é uma extensão do controlador UV-MRAC, introduzido em (Hsu et al. 2003), para sistemas com grau relativo uniforme e arbitrário. Todos os termos não-lineares são reduzidos a perturbações equivalentes na entrada de um subsistema linear.

Verificou-se que o UV-MRAC assegura, em geral, estabilidade exponencial semi-global com respeito a um pequeno conjunto residual. A constante de tempo τ dos filtros da média é o único parâmetro de projeto utilizado para aumentar o domínio de estabilidade. Esta constante de tempo é o análogo do pequeno parâmetro que caracteriza os observadores de alto ganho utilizados em controladores baseados em modo deslizante e realimentação de saída. Além disso, o domínio de estabilidade é aumentado sem que ocorra o fenômeno de pico e sem a necessidade de, *a priori*, o sinal de controle ser limitado globalmente. Por fim, foi verificado que o UV-MRAC garante estabilidade exponencial global com respeito a um conjunto residual da ordem de τ , quando a norma da perturbação não-linear equivalente puder ser majorada por uma função da classe \mathcal{K} e que seja globalmente Lipschitz.

Simulações ilustram o desempenho do esquema proposto na presença de uma perturbação polinomial, dependente da saída e descasada. A partir de testes experimentais realizados anteriormente com o controlador similar VS-MRAC, aplicado a um veículo submarino real (Cunha, Costa & Hsu 1995), acredita-se que UV-MRAC também apresentará um bom desempenho, mesmo na presença de ruído de medição.

4.8 Demonstrações

4.8.1 Demonstração do Teorema 4.1

Segundo o Lema 3.1 (Seção 3.3), se a função de modulação auxiliar ϱ_0 satisfizer a desigualdade (4.16) então ε_0 em (4.6) satisfaz $|\varepsilon_0(t)| \leq \Pi, \forall t \in \mathcal{I}_*$. De (4.10) pode-se escrever $\pi_{0i} = H_i(s) * \varepsilon_0 = h_i(t) * \varepsilon_0(t)$, com $H_i(s)$ BIBO estável ($i = 1, \dots, N$). Uma vez que $|\varepsilon_0(t)| \leq \Pi$, então $|\pi_{0i}| \leq \Pi, \forall t \in \mathcal{I}_*$.

Agora, uma vez que $\pi_{e1} \equiv 0$, pode-se aplicar o Lema C.1 (com $\beta(t) \equiv 0$) à equação (4.8) resultando em $|\varepsilon_1(t)| \leq \Pi, \forall t \in \mathcal{I}_*$, se ϱ_1 satisfizer (4.16). Utilizando-se um

argumento similar, conclui-se recursivamente a partir de (4.8), (4.9) e do Lema C.1 (com $\beta(t) \equiv 0$) que, para $(i = 2, \dots, N)$, $|\pi_{ei}(t)|, |\varepsilon_{i-1}(t)| \leq \Pi, \forall t \in \mathcal{I}_*$, se ϱ_i satisfizer (4.16). ■

4.8.2 Demonstração do Teorema 4.2

Com U_N dado em (4.2), ϱ em (4.3) e d satisfazendo a desigualdade da Proposição 3, pode-se assegurar pela Proposição 4 que:

$$\left| [I - (K^{\text{nom}})^{-1}K]U_N + (K^{\text{nom}})^{-1}K^*d \right| \leq \Psi_1(\|(x_e)_{t,t_*}\|) + k_1 + \Pi,$$

onde $\Psi \in \mathcal{K}$ e $k_1 \geq 0$ é uma constante. Notando que, em (4.12), $\tilde{W}(s, \tau)$ é uma função de transferência de ordem $\mathcal{O}(\tau)$, pode-se concluir que o termo

$$\beta := \tilde{W}(s, \tau) * \left\{ [I - (K^{\text{nom}})^{-1}K]U_N + (K^{\text{nom}})^{-1}K^*d \right\}$$

de $\tilde{\sigma}$ (4.12) satisfaz $|\beta| \leq \tau\Psi_2(\|(x_e)_{t,t_*}\|) + \mathcal{O}(\tau) + \Pi$, onde $\Psi_2 \in \mathcal{K}$. Além disso, de acordo com Teorema 4.1, $|\pi_{eN}|, |\pi_{0N}| \leq \Pi$. Conseqüentemente, tem-se que:

$$|\tilde{\sigma}| \leq \Pi + \tau\Psi_3(\|(x_e)_{t,t_*}\|) + \mathcal{O}(\tau),$$

onde $\Psi_3 \in \mathcal{K}$. Agora, aplicando o Lema C.1 a (4.11), com ϱ satisfazendo (4.18), e utilizando a Proposição 1, pode-se concluir que:

$$|x_e(t)| \leq \Pi + \tau\Psi_1(\|(x_e)_{t,t_*}\|) + \mathcal{O}(\tau). \quad (4.29)$$

De (4.29) e utilizando o teorema dos pequenos ganhos (Jiang et al. 1994), pode-se garantir que não ocorre escape em tempo finito ($t_M \rightarrow \infty$) e que z satisfaz a desigualdade do teorema, assegurando rastreamento SEMI-global. Para maiores detalhes ver (Hsu, Peixoto, Cunha, Costa & Lizarralde 2006). ■

Capítulo 5

Particularização para Sistemas Monovariáveis

Este capítulo especializa o problema e a classe de sistemas (Capítulo 2) e reformula as principais equações do Capítulo 3 para o caso monovariável (SISO), que será o foco dos próximos dois capítulos. A extensão para plantas multivariáveis poderá ser desenvolvida futuramente utilizando-se o controle vetorial unitário.

5.1 Particularização das Hipóteses

Considera-se a versão SISO ($q = 1$) do sistema descrito em (2.1) ou (2.3)

$$\dot{x} = \underbrace{Ax + \phi(x, t)}_{f(x, t)} + B[u + \phi_c(x, t)], \quad y = Cx := h(x), \quad (5.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado da planta, $u \in \mathbb{R}$ é a entrada, $y \in \mathbb{R}$ é a saída medida, $n \geq 1$, $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi_c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Os termos ϕ_c e ϕ continuam sendo encarados como perturbações supostas localmente Lipschitz em x ($\forall x$), sendo ϕ_c contínua por partes em t e ϕ suficientemente suave em seus argumentos, ou seja, as componentes de ϕ são funções reais de x, t com derivadas parciais de qualquer ordem, definidas e contínuas (Isidori 1995, pp. 6). A definição de Filippov continua sendo adotada e o controle equivalente estendido (Utkin 1978) (Hsu et al. 2002, Seção 2.3) denotado por $u_{eq}(t)$ (Seção 1.5).

As matrizes constantes A, B e C podem ser incertas. Supõe-se que todos os parâmetros incertos de (5.1) possuam limitantes inferiores e superiores conhecidos. A função de transferência $G(s) := C(sI - A)^{-1}B$ do *subsistema linear* (A, B, C) de (5.1), que é incerta, pertence a um subconjunto \mathcal{P} de $\mathbb{R}(s)$. Serão consideradas as hipóteses básicas sobre $G(s)$, descritas na Seção 2.1. A hipótese (H0) não se altera:

(H0) Ver Hipótese (H0).

As hipóteses (H1) e (H2) serão reescritas como:

(H1) $G(s)$ é de fase mínima.

(H2) $G(s)$ possui grau relativo $\rho \geq 1$.

Os estados \bar{x} é redefinido apropriadamente pela transformação $\bar{x} := [\eta^T \ \vartheta^T]^T = T_l x$ com T_l de (2.5) redefinido por

$$T_l := [T_\eta^T \ C^T \ (CA)^T \ \dots \ (CA^{\rho-1})^T]^T. \quad (5.2)$$

A estrutura da equação que descreve a dinâmica de η (2.7), se mantém, ou seja:

$$\dot{\eta} := A_0\eta + B_0y + T_\eta\phi, \quad (5.3)$$

onde A_0 é Hurwitz¹. As funções $\beta_{i,k}$, dadas em (2.12), são redefinidas através da seguinte recorrência:

$$\beta_k := \frac{\partial\beta_{k-1}}{\partial x}f + \frac{\partial\beta_{k-1}}{\partial t} + \frac{\partial[L_f^{k-1}h]}{\partial t}, \quad \beta_0 := 0, \quad (5.4)$$

onde $k \in \{1, \dots, \rho\}$. A hipótese (H4) se reduz a:

(H4.a) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se:

$$L_B[L_f^k h + \beta_k] \equiv 0, \quad \forall k \in \{0, \dots, \rho - 2\},$$

$$\text{e } k_{prt} := L_B[L_f^{\rho-1}h + \beta_{\rho-1}] \neq 0.$$

¹Os autovalores de A_0 são os zeros de $G(s)$.

($\mathcal{H4.b}$) $k_{pxt} = k_p = CA^{\rho-1}B$, onde k_p é o ganho de alta frequência (HFG) de $G(s)$.

O vetor ξ é redefinido por:

$$\xi := [y \quad \dot{y} \quad \dots \quad y^{(\rho-1)}]^T, \quad (5.5)$$

e, de ($\mathcal{H4}$), tem-se que

$$\xi = T_\xi(x, t), \quad (5.6)$$

onde $T_\xi^T(x, t) := \begin{bmatrix} L_f^0 h + \beta_0 & L_f h + \beta_1 & \dots & L_f^{\rho-1} h + \beta_{\rho-1} \end{bmatrix}$. Além disso, a dinâmica de ξ mantém a mesma estrutura que em (2.15):

$$\dot{\xi} = A_\rho \xi + B_\rho k_p [u + d_\phi(x, t) + k_p^{-1}(K_\vartheta \xi + K_\eta \eta)], \quad y = C_\rho \xi, \quad (5.7)$$

onde $[K_\eta \ K_\vartheta] := CA^\rho T_l^{-1}$ e

$$d_\phi(x, t) := k_p^{-1}(L_f^\rho h + \beta_\rho - K_\vartheta \xi - K_\eta \eta) + \phi_c, \quad (5.8)$$

e (A_ρ, B_ρ, C_ρ) representa um cascata de ρ integradores. As hipóteses (H3), (H5) e (H6) não se alteram. Considere as seguintes hipóteses, apenas para manter uma notação uniforme:

($\mathcal{H3}$) Ver hipótese (H3).

($\mathcal{H5}$) Ver hipótese (H5).

($\mathcal{H6}$) Ver hipótese (H6).

5.2 Particularização do Modelo de Referência

A trajetória desejada ($y_m \in \mathbb{R}$) passa a ser especificada por:

$$y_m = M(s) r, \quad M(s) = \frac{k_m}{(s + \gamma)L(s)}, \quad (5.9)$$

onde $k_m > 0$ e $\gamma > 0$ são constantes e $L(s)$ é o polinômio Hurwitz:

$$L(s) = s^{\rho-1} + a_{\rho-2}s^{\rho-2} + \dots + a_0. \quad (5.10)$$

Supõe-se que o sinal de referência $r(t) \in \mathbb{R}^q$ é contínuo por partes e uniformemente limitado. Considere a seguinte realização mínima para $M(s)$ dado em (5.9):

$$\dot{\xi}_m = A_m \xi_m + B_m k_m r, \quad y_m = C_m \xi_m, \quad (5.11)$$

onde $B_m := B_\rho$, $C_m := C_\rho$ e $A_m := A_\rho + B_\rho \bar{K}_m$, com

$$\bar{K}_m = \begin{bmatrix} -\gamma a_0 & -(a_0 + \gamma a_1) & -(a_1 + \gamma a_2) & \dots & -(a_{\rho-3} + \gamma a_{\rho-2}) & -(a_{\rho-2} + \gamma) \end{bmatrix},$$

obtido a partir dos coeficientes do polinômio característico de $M(s)$ e

$$\xi_m := [y_m \quad \dot{y}_m \quad \dots \quad y_m^{(\rho-1)}]^T \in \mathbb{R}^\rho. \quad (5.12)$$

5.3 Reformulação da Equação do Erro

A equação do erro de rastreamento é desenvolvida da mesma forma que na Seção 3.1. O vetor $x_e := \xi - \xi_m$ e o erro de saída $e = y - y_m$ satisfazem as seguintes versões monovariáveis das equações (3.2) e (3.3):

$$\dot{x}_e = A_m x_e + B_m k_p [u + d], \quad e = C_m x_e, \quad (5.13)$$

$$e = k^* M(s) [u + d], \quad k^* = k_p / k_m, \quad (5.14)$$

onde a *perturbação equivalente de entrada* é redefinida por:

$$d := d_\phi + (K_\vartheta - \bar{K}_m) \xi / k_p + K_\eta \eta / k_p - r / k^* \quad (5.15)$$

com \bar{K}_m definido na Seção 5.2.

5.4 Controle Via Realimentação de Estados

Seguindo os mesmos passos da Seção 3.3, quando x e ξ estão disponíveis para realimentação pode-se escolher

$$\sigma = Sx_e = 0, \quad S := [a_0 \quad \dots \quad a_{\rho-2} \quad 1], \quad (5.16)$$

como a superfície de deslizamento, onde S é tal que (A_m, B_m, S) é uma realização não-mínima para $k_m^{-1}ML(s) = 1/(s + \gamma)$, com $a_0, \dots, a_{\rho-2}$ e $L(s)$ definidos em (5.10). No caso monovariável, o controle que era baseada no vetor unitário (3.11) confunde-se com o tradicional VSC que utiliza a função sinal:

$$u = s_p U, \quad U = -\varrho(x(t), t) \operatorname{sgn}(\sigma(t)),$$

onde $s_p \in \{-1, 1\}$ depende do sinal do ganho de alta frequência da planta. No Capítulo 6, supõe-se que o sinal de k_p é conhecido e escolhe-se $s_p = \operatorname{sgn}(k_p)$. Já no Capítulo 7, esta hipótese será descartada e s_p chaveará entre -1 e 1 até identificar o sinal correto de k_p .

Portanto, de (5.13) (compare com (3.9)) tem-se:

$$\sigma = k_m^{-1}ML(s)k_p s_p [U + s_p^{-1}d], \quad (5.17)$$

que é a forma entrada-saída do sistema (5.13) considerando como saída σ ao invés de e . Suponha que $k_p s_p > 0$ e que ϱ satisfaça

$$\varrho(x(t), t) \geq |d(x, t)| + \delta, \quad (5.18)$$

a menos de termos exponencialmente decrescentes, onde $\delta \geq 0$ é uma constante arbitrariamente pequena. Então, notando que $ML(s)$ é SPR, pode-se aplicar o (Hsu et al. 1997, Lema 1) a (5.17) e concluir, ao menos, que (5.13) é GES. Se $\delta > 0$, mostra-se que ocorre deslizamento ideal em $\sigma \equiv 0$ após algum tempo finito. Portanto, rastreamento global e exato pode ser obtido².

²O (Hsu et al. 1997, Lema 1) é uma versão do Lema 3.1 para sistemas monovariáveis.

5.5 Controle Via Realimentação de Saída

Da mesma forma que na Seção 3.3, a superfície de deslizamento é dada por

$$\hat{\sigma} = 0, \quad (5.19)$$

onde $\hat{\sigma}$ é alguma estimativa de σ obtida da saída mensurável y . A lei de controle u é redefinida por:

$$u = s_p U, \quad U = -\varrho(v(t)) \operatorname{sgn}(\hat{\sigma}(t)), \quad (5.20)$$

onde a função de modulação $\varrho(v(t))$ é contínua em t e $v(t)$ é o vetor composto por funções absolutamente contínuas não-negativas obtidas a partir de sinais disponíveis, definido na Seção 3.6.2. Definindo-se o erro $\tilde{\sigma} := \sigma - \hat{\sigma}$, tem-se que (3.9) implica:

$$\hat{\sigma} = k_m^{-1} M L(s) k_p s_p [U + s_p^{-1} d] - \tilde{\sigma}. \quad (5.21)$$

A análise de estabilidade segue o roteiro do caso MIMO, ou seja, é baseada no teorema de pequenos ganhos. A função de modulação ϱ , implementada a partir dos sinais $v(t)$, deve ainda satisfazer a desigualdade (5.18).

5.6 Comentários

Neste capítulo o problema de rastreamento de trajetória e a classe de sistemas descritos no Capítulo 2, no âmbito de sistemas multivariáveis, foram reformulados para o caso monovariável. Foi dada ênfase nas equações básicas para o projeto e a análise dos controladores propostos nos próximos dois Capítulos 6 e 7. Destaca-se, entretanto, que resultados GLOBAIS são obtidos no Capítulo 6 em contraste com o resultado SEMI-global do caso MIMO (capítulo anterior). Além disso, o desafio adicional de se resolver o problema de rastreamento sem o conhecimento da direção de controle ($\operatorname{sgn}(k_p)$) é suplantado no Capítulo 7.

Capítulo 6

Controle de Plantas Monovariáveis

Várias abordagens para tratar o problema de rastreamento global via realimentação de saída têm sido propostas na literatura. Atualmente, a maioria delas conjuga: *backstepping*, técnicas de alto ganho variante no tempo (e.g., HGO com ganho variável) e algum tipo de adaptação (Krishnamurthy et al. 2002)(Krishnamurthy, Khorrami & Chandra 2003)(Praly 2001)(Lei & Lin 2005)(Chitour 2002). Em contraste, poucos resultados estão disponíveis no domínio de controle robusto, onde robustez e bons transitórios são características vantajosas.

Controle por modo deslizante via realimentação de saída (OFSM) que utiliza HGO representa uma importante classe de abordagens robustas, a qual, em geral, leva somente a rastreamento semi-global no âmbito de sistemas não-lineares (Esfandiari & Khalil 1992)(Oh & Khalil 1997)(Hsu, Peixoto, Cunha, Costa & Lizarralde 2006).

Em (Cunha, Hsu, Costa & Lizarralde 2005), combinando o esquema do MRAC e um HGO, utilizado apenas para gerar a superfície de deslizamento, um controle por OFSM livre de pico foi desenvolvido para sistemas lineares.

Motivado por (Cunha et al. 2005)(Praly 2001)(Ortega 1993) este capítulo estende a aplicabilidade de (Cunha et al. 2005) para plantas não-lineares (2.3) e mostra que controle por OFSM baseado em HGO pode garantir rastreamento global prático, fazendo o ganho do HGO variar dinamicamente (como função dos sinais disponíveis do sistema). É assegurado que todos os sinais do sistema permanecem limitados e convergência exponencial no espaço do erro, para um conjunto residual pequeno. Acredita-se o controlador proposto neste capítulo, ver também (Peixoto, Hsu, Costa & Lizarralde 2007),

é o primeiro controlador por OFSM que assegura rastreamento *global* para a classe de plantas não-lineares considerada.

Este Capítulo é organizado como segue. A Seção 6.1 apresenta a formulação do problema com base no Capítulo 5. A estrutura do controlador proposto é descrita na Seção 6.2. Em seguida, na Seção 6.3, o HGO com ganho variável é apresentado seguido da análise de estabilidade (Seção 6.4). Detalhes de projeto, simulações e conclusões são apresentados nas Seções 6.5, 6.6 e 6.7, respectivamente. As demonstrações são deixadas para a Seção 6.8.

6.1 Formulação do Problema

Neste Capítulo considera-se plantas da forma (5.1) que satisfaçam as hipóteses $(\mathcal{H}0)$ – $(\mathcal{H}4)$ e $(\mathcal{H}6)$, vide Capítulo 5. A hipótese $(\mathcal{H}5)$ será relaxada, exigindo-se apenas que a matriz $T_\xi = \xi$, de (5.6), satisfaça a seguinte hipótese:

$(\mathcal{H}5')$ $|T_\xi| \rightarrow +\infty$ quando $|x| \rightarrow +\infty$ (T_ξ é radialmente ilimitada com respeito a x).

Para verificar que $(\mathcal{H}5')$ é uma condição menos restritiva do que $(\mathcal{H}5)$ e do que supor que T_{nl} seja um difeomorfismo global, seja $T_{nl}(x, t) = T_\xi(x, t) = x^2 + x + 1$, com $x \in \mathbb{R}$. Neste exemplo, T_{nl} não é globalmente invertível, mas $(\mathcal{H}5')$ se verifica.

Como foi mencionado no Capítulo 2, $(\mathcal{H}5')$ é necessária para permitir que as normas dos sinais do sistema em malha fechada estejam limitadas se a saída e suas derivadas (de ordem até $\rho - 1$) estiverem limitadas em norma. Supõe-se ainda que a direção de controle é conhecida. A hipótese $(\mathcal{H}7)$, ver Capítulo 4, se reduz a:

$(\mathcal{H}7)$ O sinal do ganho de alta frequência k_p do subsistema linear é conhecido.

Para tratar a derivada temporal do ganho variável do observador, suponha que:

$(\mathcal{H}8)$ A função de majoração $\Psi \in \mathcal{K}_\infty$ e a constante k_ψ das hipóteses $(\mathcal{H}3)$ e $(\mathcal{H}6)$ são conhecidas e a norma de $\frac{d\Psi(a)}{da}$ é limitada de forma afim em $\Psi(a)$.

O objetivo de controle está descrito no Capítulo 2 e o modelo de referência é dado no Capítulo 5, ver equação (5.9).

6.2 Controlador e Variável de Deslizamento

Quando apenas y está disponível para realimentação, escolhe-se:

$$\hat{\sigma} := S\hat{x}_e = 0, \quad \hat{x}_e := \hat{\xi} - \xi_m, \quad (6.1)$$

como a superfície de deslizamento, com $\hat{\xi}$ sendo a estimativa de ξ (5.5) fornecida pelo HGO apresentado na próxima seção e S dado em (5.16). Define-se o controle u por¹:

$$u = -\varrho(v(t))\text{sgn}(\hat{\sigma}(t)), \quad (6.2)$$

onde a *função de modulação* $\varrho(v(t))$ contínua em t é dada por

$$\varrho(v(t)) := \theta_\varrho^T v(t) + \delta, \quad \theta_\varrho = \theta_d, \quad (6.3)$$

sendo $\delta \geq 0$ uma constante arbitrária, $v(t)$ o vetor de sinais disponíveis definido na Seção 3.6.2 e θ_d dado pela Proposição 3. Seja o *erro de estimação* definido por:

$$\tilde{x}_e := x_e - \hat{x}_e = \xi - \hat{\xi} := \tilde{\xi}. \quad (6.4)$$

Então, de (5.16) e (5.17) a variável de deslizamento $\hat{\sigma} = \sigma - S\tilde{x}_e$ satisfaz:

$$\hat{\sigma} = k^* ML(s)[u + d] - S\tilde{x}_e. \quad (6.5)$$

Utilizando o Lema C.2 (uma versão SISO do Lema C.1), dada no Apêndice, a desigualdade (5.18) assegura uma propriedade ISS de \tilde{x}_e para x_e , como será visto na Seção 6.4.1. A novidade do esquema proposto é que a estimativa $\hat{\xi}$ é fornecida por um HGO com ganho variável que permite obter uma propriedade ISpS de x_e para \tilde{x}_e , que combinada com a propriedade ISS acima, assegura rastreamento global por meio do teorema de pequenos ganhos.

Assim como em (Cunha et al. 2005), um pico eventual em $\hat{\sigma}$ é bloqueado pela função sinal $\text{sgn}(\cdot)$ em (3.18) e o sinal de controle u é livre de pico uma vez que $\varrho(v(t))$ é

¹Note que, sem perda de generalidade, esta lei corresponde a lei (5.20) com $s_p = \text{sgn}(k_p) = 1$ ($k_p > 0$).

implementado utilizando somente sinais medidos ou estimativas que não sejam baseadas em alto ganho. O controlador está esquematizado na Figura 6.1.

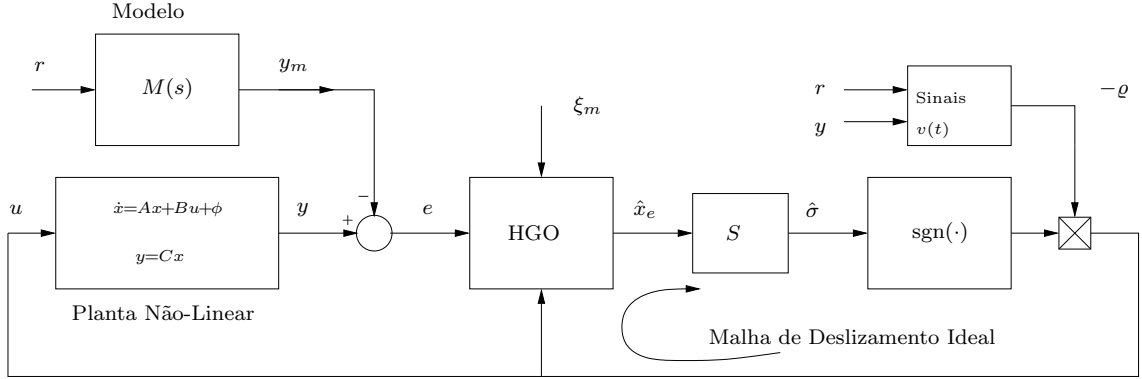


FIGURA 6.1: VS-MRAC global utilizando um HGO para gerar $\hat{\sigma}(t)$. O HGO fornece uma malha de deslizamento ideal (*ideal sliding loop* - ISL).

6.3 Observador de Alto Ganho com Ganho Variável

A estimativa $\hat{\xi}$ para ξ , dado em (2.15), é fornecida pelo HGO:

$$\dot{\hat{\xi}} = A_\rho \hat{\xi} + B_\rho k_p^{\text{nom}} u + H_\mu L_o (y - C_\rho \hat{\xi}), \quad (6.6)$$

onde L_o e H_μ são dados por

$$L_o := [l_1 \quad \dots \quad l_\rho]^T \text{ e } H_\mu := \text{diag}(\mu^{-1}, \dots, \mu^{-\rho}) \quad (6.7)$$

e k_p^{nom} é um valor nominal para k_p . O ganho do observador L_o é tal que o polinômio $s^\rho + l_1 s^{\rho-1} + \dots + l_\rho$ é Hurwitz. Neste Capítulo, não se utiliza um ganho constante μ . Permite-se μ variar no tempo como uma função de $v(t)$, i.e., $\mu = \mu(v(t))$ ($\neq 0, \forall t \in \mathcal{I}_0$).

6.3.1 Dinâmica do Erro de Observação

Assim com em (Oh & Khalil 1997)(Cunha et al. 2005), a transformação

$$\zeta := T_\mu \tilde{\xi} = T_\mu \tilde{x}_e, \quad T_\mu := [\mu^\rho H_\mu]^{-1}, \quad (6.8)$$

é a chave para representar a dinâmica do erro de observação \tilde{x}_e em uma forma conveniente que permite demonstrar que a dinâmica de \tilde{x}_e goza de uma propriedade ISpS com respeito a x_e devido, fundamentalmente, as seguintes propriedades:

$$(i) T_\mu(A_\rho - H_\mu L_o C_\rho) T_\mu^{-1} = \frac{1}{\mu} A_o \quad (ii) T_\mu B_\rho = B_\rho \quad \text{e} \quad (iii) \dot{T}_\mu T_\mu^{-1} = \frac{\dot{\mu}}{\mu} A_\delta,$$

onde $A_o := A_\rho - L_o C_\rho$ e $A_\delta := \text{diag}(1 - \rho, 2 - \rho, \dots, 0)$. Utilizando (i), (ii) e (iii), pode-se concluir de (5.7), (6.4), (6.6) e (6.8) que

$$\mu \dot{\zeta} = A_o \zeta + B_\rho k_p [\mu \nu] + \Delta(t) \zeta, \quad (6.9)$$

onde

$$\Delta(t) := \dot{\mu}(t) A_\delta, \quad \nu(t) := [\kappa u_{eq}(t) + d + (\bar{K}_m x_e + \bar{K}_m \xi_m + k_m r) / k_p], \quad (6.10)$$

$\kappa = (k_p - k_p^{\text{nom}}) / k_p$ e o sinal descontínuo u foi substituído pelo controle equivalente estendido $u_{eq}(t)$ definido na Seção 1.5.5, o que será conveniente para uso futuro.

6.3.2 O Parâmetro μ Variável

No caso linear ($\phi_0, \phi_\vartheta \equiv 0$): (i) a dinâmica de η (5.3) é ISS em relação a y , (ii) $d_\phi \equiv 0$ e (iii) obtém-se rastreamento global com $\mu = \bar{\mu}$ constante. Neste caso, (iii) implica $\Delta \equiv 0$ e, conseqüentemente, o sistema do erro de observação (6.9) é ISS em relação a $\mu \nu$, uma vez que A_o é Hurwitz. Além disso, (i) e (ii) implicam $|d|$ e $|\varrho|$ serem majorados de forma afim em $|x_e|$ (Cunha et al. 2005). Desta forma, com ν em (6.10) pode-se escrever:

$$|\mu \nu| \leq \bar{\mu} k_\nu \| (x_e)_{t, t_*} \| + \mathcal{O}(\bar{\mu}) + \Pi, \quad \forall t \in \mathcal{I}_*, \quad (6.11)$$

para alguma constante $k_\nu > 0$, onde Π é um termo exponencialmente decrescente (ver Seção 1.4) que depende do estado em $t = t_*$, a ser definido precisamente na Seção 6.4. Portanto, de (6.9), uma propriedade ISpS de $|x_e|$ para ζ (ou \tilde{x}_e) pode ser assegurada, com ganho ISpS *linear* e proporcional a $\bar{\mu}$.

No caso não-linear, a idéia principal é obter uma propriedade ISpS similar, escolhendo $\mu(v(t))$ de tal forma que (6.11) seja válida e que (6.9) permaneça ISS com

respeito a $\mu(t)v(t)$. Seja $\theta_\mu^T := [\theta_{\mu 1}^T \ \theta_{\mu 2} \ \theta_{\mu 3}^T \ 0 \ \theta_{\mu 5}^T]$, com $\theta_{\mu 1}, \theta_{\mu 2}, \theta_{\mu 3}, \theta_{\mu 5}$ sendo vetores constantes (elementos positivos) apropriados. Propõe-se que o parâmetro μ varie no tempo da seguinte forma:

$$\mu(v(t)) := \frac{\bar{\mu}}{1 + \theta_\mu^T v(t) + f_\mu(t)}, \quad (6.12)$$

$$f_\mu(t) := (\|(\omega_1)_t\| + \|e_t\|)e^{-\lambda_\mu t}, \quad (6.13)$$

onde $\bar{\mu}, \lambda_\mu > 0$ são constantes. Para cada trajetória do sistema, $\mu(v(t))$ é uma função absolutamente contínua e $\mu \leq \bar{\mu}$. Note que, $\mu(t)$ é sempre limitado em qualquer subintervalo finito de \mathcal{I}_0 . Por isso, tem-se

$$\mu(v(t)) \in [\underline{\mu}, \bar{\mu}], \quad \forall t \in \mathcal{I}_*, \quad (6.14)$$

para algum $\underline{\mu} \in (0, \bar{\mu})$. Devido a (6.14), H_μ (6.7) e T_μ (6.8) são bem definidos $\forall t \in \mathcal{I}_*$. O lema a seguir é fundamental para se demonstrar a propriedade ISpS mencionada.

Lema 6.1 *Para $(i = 1, \dots, N)$, onde N é um inteiro positivo, sejam $s_i(t)$ um sinal escalar positivo ($\forall t$) e k_i, \bar{k}_i constantes positivas. Então tem-se que:*

$$\left| \frac{\bar{k}_1 s_1(t) + \dots + \bar{k}_N s_N(t)}{1 + k_1 s_1(t) + \dots + k_N s_N(t)} \right| < \max_i \{\bar{k}_i / k_i\}, \quad \forall t.$$

Prova: A demonstração é uma consequência direta da desigualdade $\bar{k}_i \leq k_M k_i$, onde $k_M = \max_i \{\bar{k}_i / k_i\}$ e do fato de que $a/(1+a) < 1, \forall a \in \mathbb{R}_+$. ■

Lembrando que $\theta_\mu^T := [\theta_{\mu 1}^T \ \theta_{\mu 2} \ \theta_{\mu 3}^T \ 0 \ \theta_{\mu 5}^T]$ e $\theta_\varrho^T := [\theta_{\varrho 1}^T \ 0 \ 0 \ \theta_{\varrho 4}^T \ 0]$, com $\theta_{\varrho 1} = \theta_{d1}$, $\theta_{\varrho 4} = \theta_{d4}$ e θ_{d1}, θ_{d4} dados na Proposição 3, pode-se concluir de (6.3) e (6.12) que:

$$|\mu \varrho| = \bar{\mu} \left| \frac{\theta_\varrho^T v + \delta}{1 + \theta_\mu^T v + f_\mu} \right| \leq \bar{\mu} \left| \frac{\theta_{\varrho 1}^T v_1 + \theta_{\varrho 4}^T v_4 + \delta}{1 + \theta_{\mu 1}^T v_1 + \theta_{\mu 5}^T v_5} \right|.$$

Por outro lado, das definições de v_4 (3.32) e v_5 (3.34), existe um vetor constante com elementos positivos θ_a tal que $|\theta_{\varrho 4}^T v_4| \leq \theta_a^T v_5 + k_a + \Pi$, onde a constante positiva k_a surge do fato de que as componentes ξ_m e r de v_4 são uniformemente limitadas. Então, usando o Lema 6.1, pode-se verificar que $|\mu(t)\varrho(t)| \leq \mathcal{O}(\bar{\mu}) + \Pi(t), \forall t \in \mathcal{I}_*$.

Além disso, de acordo com (H6) e (H8): $|d_\phi| \leq \varphi_d(|x|, t) \leq \Psi(|x|) + k_\psi$. Com o

majorante para $|x|$ obtido da Proposição 2, $\Psi(|x|) \leq \Psi(\hat{x} + \Pi) \leq \Psi(2\hat{x}) + \Psi(2\Pi) \leq \Psi(2\hat{x}) + \Pi$, onde as duas últimas desigualdades provêm da Propriedade 1 de funções da classe \mathcal{K} (ver Apêndice) e do fato de que Ψ é localmente Lipschitz, respectivamente.

Note que $\Psi(2\hat{x})$ é uma componente do vetor v_5 (com $c_x = 2$ em (3.34)), portanto, existe um vetor constante com elementos positivos θ_b tal que $|d_\phi| \leq \theta_b^T v_5 + \Pi + k_\psi$. Agora, com ϱ em (6.3), lembrando que $|\theta_{\rho_4}^T v_4| \leq \theta_a^T v_5 + k_a + \Pi$ e que $|u_{eq}| \leq \varrho$, pode-se concluir que ν , em (6.10), satisfaz $|\nu| \leq \theta_c^T v_1 + \theta_d^T v_5 + \Pi + k_b$, onde θ_c, θ_d são vetores constantes com elementos positivos e $k_b \geq 0$ é uma constante.

Finalmente, utilizando mais uma vez o Lema 6.1, verifica-se que $|\mu\nu| \leq \mathcal{O}(\bar{\mu}) + \Pi$, conseqüentemente, (6.11) também se verifica, apesar de ser menos conservadora². No que segue será verificado que, após um tempo finito, (6.9) é ISS de $\mu\nu$ para ζ .

6.3.3 Derivada Temporal do Parâmetro μ

A derivada temporal de μ (6.12) é o sinal contínuo por partes (em t):

$$\dot{\mu}(v(t)) = -\frac{\mu^2}{\bar{\mu}} \left[\theta_{\mu 1}^T \dot{v}_1 + \theta_{\mu 2}^T \dot{v}_2 + \theta_{\mu 3}^T \dot{v}_3 + \theta_{\mu 5}^T \dot{v}_5 + \dot{f}_\mu \right]. \quad (6.15)$$

A proposição a seguir fornece majorantes para as normas de $\dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{v}_3, \dot{v}_5$ e \dot{f}_μ .

Proposição 5 [Majorantes Auxiliares] *Sob as hipóteses $(\mathcal{H}0)$ – $(\mathcal{H}4)$, $(\mathcal{H}6)$ e $(\mathcal{H}8)$, considere (3.26), (3.28), (3.30), (3.32), (3.34) e (6.13) e suponha que ϱ seja dado por (6.3). Então, tem-se, para quase todo $t \in \mathcal{I}_*$*

$$|\dot{v}_1|, |\dot{v}_2|, |\dot{v}_3| \leq \theta_1^T v_1 + \theta_2 v_2 + \theta_3^T v_3 + \theta_4^T v_5 + k_1 + \Pi, \quad (6.16)$$

$$|\dot{v}_5| \leq \theta_5^T v_5 + (k_2 \Psi(\hat{x}) + k_3)(|\dot{v}_2| + |\dot{v}_3|), \quad (6.17)$$

$$|\dot{f}_\mu| \leq \theta_6^T v_1 + \theta_7 v_2 + \theta_8^T v_3 + \theta_9^T v_5 + \lambda_\mu f_\mu + k_4 + \Pi, \quad (6.18)$$

onde $\theta_1, \dots, \theta_9$ são vetores constantes de elementos não-negativos apropriados, $k_1, \dots, k_4 \geq 0$ são constantes.

Prova: Ver Seção 6.8. ■

²Este conservadorismo se deve ao fato de que d_ϕ e $\Psi(|x|)$ incorporam termos lineares e não-lineares. Esta abordagem foi escolhida apenas por apresentar uma notação mais simples.

Agora, usando o Lema 6.1, \hat{x} de (3.31), μ de (6.12), $\dot{\mu}$ de (6.15), (6.16), (6.17) e (6.18) pode-se concluir em seqüência que $\mu|\dot{v}_1|$, $\mu|\dot{v}_2|$, $\mu|\dot{v}_3|$, $(\mu^2/\bar{\mu})|\dot{v}_5|$, $\mu|\dot{f}_\mu|$ podem ser limitados superiormente por $\mathcal{O}(\bar{\mu}) + \mu\Pi$ ($\forall t \in \mathcal{I}_*$). Logo, de (6.15), tem-se que:

$$|\dot{\mu}(t)| \leq \mathcal{O}(\bar{\mu}) + \mu\Pi, \quad \forall t \in \mathcal{I}_*. \quad (6.19)$$

A seguinte proposição é útil para demonstrar que $|\dot{\mu}|$ não afeta a estabilidade de A_o em (6.9), ao menos após algum tempo finito.

Proposição 6 *Considere (H8), μ dado em (6.12) e f_μ em (6.13). Se t_M for finito, então para qualquer constante $R > 0$, existe um tempo finito $t_{\mu 1} \in \mathcal{I}_0$ tal que*

$$\mu R \leq \mathcal{O}(\bar{\mu}), \quad \forall t \in [t_{\mu 1}, t_M]. \quad (6.20)$$

Prova: Ver Seção 6.8. ■

Seja $t_\mu \in \mathcal{I}_0$ o primeiro instante de tempo tal que $\mu\Pi \leq \mathcal{O}(\bar{\mu})$. A existência de t_μ é assegurada no que segue. Como Π é uniformemente limitado, se t_M for finito, a Proposição 6 garante que existe $t_{\mu 1} \in \mathcal{I}_0$ tal que $\mu\Pi \leq \mathcal{O}(\bar{\mu})$, $\forall t \in [t_{\mu 1}, t_M]$. Além disso, como Π decai exponencialmente, se $t_M = +\infty$, então $\exists t_{\mu 2} \in [0, +\infty)$ tal que, $\mu\Pi \leq \mathcal{O}(\bar{\mu})$, $\forall t \in [t_{\mu 2}, +\infty)$. Portanto, existe $t_{\mu 3} \leq t_{\mu 1}$ ou $t_{\mu 2}$, tal que $\mu\Pi \leq \mathcal{O}(\bar{\mu})$ ($\forall t \in [t_{\mu 3}, t_M]$). Desta forma, de (6.19), tem-se

$$|\dot{\mu}(t)| \leq \mathcal{O}(\bar{\mu}), \quad \forall t \in [t_\mu, t_M], \quad (6.21)$$

e, conseqüentemente, o termo Δ não afeta a estabilidade de A_o em (6.9), $\forall t \in [t_\mu, t_M] := \mathcal{I}_\mu$ e para $\bar{\mu}$ suficientemente pequeno. Isto permitirá concluir que (6.9) é ISS de $\mu\nu$ para ζ , neste intervalo de tempo.

6.4 Análise de Estabilidade: Propriedades ISS

A fim de levar em consideração de forma completa as condições iniciais do sistema do erro (5.13) e (6.9), seja:

$$z^T(t) := [z^0(t), x_e^T(t), \zeta^T(t)], \quad (6.22)$$

$$z^0(t) := z^0(t_*)e^{-\gamma(t-t_*)},$$

$$z^0(t_*) := [|\eta(t_*)| \quad |\omega_1(t_*)| \quad |\omega_2(t_*)| \quad |u_a(t_*)| \quad |x_F(t_*)|],$$

onde $t_* \in [0, t_M)$ é um instante genérico e $x_F(t_*)$ é o estado (em $t = t_*$) dos filtros BIBO estáveis envolvidos em (3.30), (3.32) e (3.34). Da mesma forma que no Capítulo 4, o termo Π é definido por:

$$\Pi(t) := \Psi_\pi(|z(t_*)|)e^{-\gamma(t-t_*)}, \quad \forall t \in \mathcal{I}_*, \quad (6.23)$$

onde $\Psi_\pi \in \mathcal{K}_\infty$ é uma função genérica e $\gamma > 0$ uma constante genérica. Nesta seção será demonstrado que, durante o intervalo $[0, t_\mu)$, todos os sinais do sistema em malha fechada permanecem uniformemente limitados.

Então, a análise de estabilidade é concluída por meio do teorema de pequenos ganhos (Jiang et al. 1994), considerando $t_* = t_\mu$.

6.4.1 Propriedade ISS de $|\zeta|$ para x_e

Se ϱ satisfizer (5.18), então aplicando o Lema C.2 (dado no Apêndice) a (6.5) e a Proposição 1 (reformulada para o caso SISO), pode-se concluir que

$$|x_e(t)| \leq k_e \|\zeta_{t, t_\mu}\| + \Pi, \quad \forall t \in \mathcal{I}_\mu, \quad (6.24)$$

onde k_e é uma constante positiva, notando que $\tilde{x}_e = T_\mu^{-1}\zeta$ implica $|\tilde{x}_e| \leq |\zeta|$, pois $|T_\mu^{-1}| \leq 1$ para $\mu < 1$.

6.4.2 Propriedade ISpS de $|x_e|$ para ζ

Um majorante para $|\zeta|$ será desenvolvido reescrevendo (6.9) em uma *nova escala de tempo* $t'(t)$, definida com a solução de

$$dt'/dt = 1/\mu(t), \quad t'(t_*) = t'_*.$$

Note que, com μ em (6.14), $t'(t)$ é bem definido $\forall t \in \mathcal{I}_*$ e é limitado enquanto t for limitado. No que segue, $\Pi(t')$ é um limitante superior para $\Pi(t(t'))$ obtido do limitante

inferior de μ (6.14). Analogamente para um termo $\Pi(t)$, i.e., $\Pi(t)$ é um limitante superior para um termo $\Pi(t'(t))$ obtido do limitante superior de μ em (6.14). Além disso, algumas vezes a variável dependente $t(t')$ será omitida para simplificar a notação.

Nova Escala de Tempo: na nova escala de tempo, (6.9) pode ser reescrita como:

$$\frac{d\zeta}{dt'} = A_o\zeta + k_p B_c \mu\nu + \Delta\zeta. \quad (6.25)$$

Considere (6.11) com $t_* = t_\mu$ e defina $t'_M := t'(t_M)$ e $t'_\mu := t'(t_\mu)$. É evidente que, se (6.11), (6.14), (6.21) forem válidos $\forall t \in [t_\mu, t_M)$, então continuarão válidos $\forall t' \in [t'_\mu, t'_M)$. Portanto, pode-se concluir que

$$|\Delta\zeta| \leq \bar{\mu}k_\delta|\zeta|, \quad |\mu\nu| \leq \bar{\mu}k_\nu|x_e(t')| + \mathcal{O}(\bar{\mu}) + \Pi(t'), \quad (6.26)$$

com algum abuso de notação, i.e. $x_e(t(t'))$ substituído por $x_e(t')$. Agora, de (6.25), tem-se

$$|\zeta| \leq \frac{1}{s + \gamma_o} * [\bar{\mu}k_\delta c_\delta|\zeta| + c_\nu|\mu\nu|] + \Pi(t'), \quad (6.27)$$

onde (c_ν, γ_o) e (c_δ, γ_o) são FOAFs para $k_p(sI - A_o)^{-1}B_\rho$ e $(sI - A_o)^{-1}$, respectivamente. Então, aplicando o Lema C.4 (dado no Apêndice) a (6.27) e considerando (6.26), o seguinte majorante é válido $\forall t' \in [t'_\mu, t'_M)$:

$$|\zeta| \leq \bar{\mu}k_\zeta \left[\sup_{t'_\mu \leq \tau \leq t'} |x_e(t(\tau))| \right] + \Pi(t') + \mathcal{O}(\bar{\mu}), \quad (6.28)$$

onde k_ζ é uma constante positiva, caso $\bar{\mu} < \gamma_o/(k_\delta c_\delta)$.

Escala de Tempo Original: Utilizando o mapeamento $t'(t) = \int_{t_\mu}^t \frac{1}{\mu(\tau)} d\tau$, obtém-se:

$$|\zeta(t)| \leq \bar{\mu}k_\zeta \|(x_e)_{t, t_\mu}\| + \Pi(t) + \mathcal{O}(\bar{\mu}), \quad \forall t \in \mathcal{I}_\mu, \quad (6.29)$$

o que caracteriza uma propriedade ISpS (Sontag & Wang 1995) de $|x_e|$ para ζ , onde $\bar{\mu}k_\zeta$ é o ganho ISpS.

6.4.3 Resultado de Estabilidade GLOBAL

O teorema a seguir resume o resultado principal deste capítulo.

Teorema 6.1 *Considere o sistema do erro (5.13) e (6.9) com lei de controle (6.2) e μ dado em (6.12). Suponha que (H0)–(H8) sejam válidas e que a função de modulação ϱ satisfaça (5.18). Então, para $\bar{\mu} > 0$ suficientemente pequeno, existem $\Psi_z(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ e constantes positivas a, b tais que o estado completo do erro, z em (6.22), satisfaz*

$$|z(t)| \leq [\Psi_z(|z(0)|) + b] e^{-at} + \mathcal{O}(\bar{\mu}), \quad (6.30)$$

$\forall t \geq 0$ e $\forall z(0)$, i.e., GAS do sistema do erro com respeito a um conjunto compacto $\{z : |z| \leq b\}$ e convergência exponencial de $z(t)$ para um conjunto residual de ordem $\mathcal{O}(\bar{\mu})$ são garantidos, com ambos os conjuntos independentes das condições iniciais. Além disso, todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados.

Prova: Ver Seção 6.8. ■

6.4.4 Realização de Modo Deslizante Ideal

Evita-se *chattering* de frequência finita (ao menos em condições ideais) e produz-se modo deslizante ideal devido à *malha de deslizamento ideal* (*ideal sliding loop*– ISL) (Hsu 1997) formada ao redor da função relé (ver Figura 6.1), de acordo com o seguinte corolário.

Corolário 6.1.1 *Adicionalmente as hipóteses do Teorema 6.1, se*

$$\varrho \geq |\bar{K}_m \xi_m - k_m r| + \delta \quad \text{com} \quad \delta > 0$$

então $\hat{\sigma} \equiv 0$ é alcançado em tempo finito.

Prova: Ver Seção 6.8. ■

6.5 Projeto do Controlador

Nesta seção são descritos os elementos necessários para implementar a lei de controle

$$u = -\varrho(v(t)) \operatorname{sgn}(\hat{\sigma}(t)).$$

Das Hipóteses $(\mathcal{H}0)$ – $(\mathcal{H}8)$ obtém-se as constantes k_x, ϵ, k_ψ e as funções $\varphi_0, \varphi_\theta, \varphi_d$ e Ψ . Para poder obter o majorante \hat{x} da norma do estado x , conhecido k_x , deve-se estimar o maior valor permitido para ϵ em $(\mathcal{H}3)$ e especificar os pólos do modelo de referência e dos filtros de entrada e saída, ou seja, $L(s)$ e γ em (5.9) e a matriz Φ em (3.27). Dado y_m e conhecidos $L(s)$ e γ , determina-se k_m e r para que (5.9) se verifique. Então, o vetor $\xi_m(t)$ é obtido de (5.11):

$$\dot{\xi}_m = A_m \xi_m + B_m k_m r, \quad y_m = C_m \xi_m,$$

onde $B_m := B_\rho$, $C_m := C_\rho$ e $A_m := A_\rho + B_\rho \bar{K}_m$, com \bar{K}_m definido na Seção 5.2 e

$$A_\rho := \begin{bmatrix} 0 & 1 & \circ \\ & \ddots & 1 \\ \circ & & 0 \end{bmatrix}, \quad B_\rho := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_\rho := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

A tabela a seguir apresenta os parâmetros do controlador de forma resumida. O

Elemento	Parâmetros
Modelo de Referência: ξ_m – (5.11)	$k_m, (A_m, B_m, C_m)$
Vetor Regressor: $v(t)$ – (3.25)	$\gamma_v, \tau_a > 0, \Phi, \Gamma, c_x \geq 1$
Função de Modulação: ϱ – (6.3)	θ_ρ e $\delta > 0$
HGO: $\hat{\xi}$ – (6.6) (6.12)	$\theta_\mu, \lambda_\mu \geq 0, k_p^{\text{nom}}, L_o, \bar{\mu}$
Superfície de Deslizamento: $\hat{\sigma}$ – (6.1)	S (see (5.10) and (5.16))

parâmetro γ_v é obtido das demonstrações das Proposições 2 e 3. A matriz Φ deve satisfazer a condição imposta na demonstração da Proposição 2 e Γ é tal que (Φ, Γ) seja controlável.

Uma escolha possível para ϱ satisfazer (5.18) e a desigualdade do Corolário 6.1.1, a menos de termos que decrescem para zero em módulo, é dada por:

$$\varrho(v(t)) := \theta_\rho^T v(t) + \delta,$$

com θ_o obtido a partir do vetor θ_d da Proposição 3 e do termo $|\bar{K}_m \xi_m - k_m r|$ e $\delta \geq 0$ sendo uma constante arbitrária. A estimativa $\hat{\xi}$ é fornecida pelo HGO (6.6)

$$\dot{\hat{\xi}} = (A_\rho - H_\mu L_o C_\rho) \hat{\xi} + B_\rho k_p^{\text{nom}} u + H_\mu L_o y,$$

onde L_o e H_μ são dados por

$$L_o := [l_1 \quad \dots \quad l_\rho]^T \text{ e } H_\mu := \text{diag}(\mu^{-1}, \dots, \mu^{-\rho})$$

e k_p^{nom} é um valor nominal para k_p . O ganho L_o do observador é tal que $s^\rho + l_1 s^{\rho-1} + \dots + l_\rho$ é um polinômio Hurwitz. O parâmetro μ variável é dado por (6.12):

$$\mu(v(t)) := \frac{\bar{\mu}}{1 + \theta_\mu^T v(t) + f_\mu(t)}, \quad f_\mu(t) := (\|(\omega_1)_t\| + \|e_t\|) e^{-\lambda_\mu t},$$

onde $\theta_\mu^T := [\theta_{\mu 1}^T \quad \theta_{\mu 2}^T \quad \theta_{\mu 3}^T \quad 0 \quad \theta_{\mu 5}^T]$, com $\theta_{\mu 1}, \theta_{\mu 2}, \theta_{\mu 3}, \theta_{\mu 5}$ sendo vetores constantes (elementos positivos arbitrários) e $\lambda_\mu > 0$ uma constante arbitrária. A variável de deslizamento $\hat{\sigma}$ é definida por (6.1)

$$\hat{\sigma} := S \hat{x}_e, \quad \hat{x}_e := \hat{\xi} - \xi_m, \quad S := [a_0 \quad \dots \quad a_{\rho-2} \quad 1],$$

com $a_0, \dots, a_{\rho-2}$ sendo os coeficiente de $L(s) = s^{\rho-1} + a_{\rho-2} s^{\rho-2} + \dots + a_0$ em (5.10). Baseado na teoria, a escolha de $\bar{\mu}$ pode resultar muito conservadora para implementação. Para evitar isso, atribui-se um valor ao parâmetro $\bar{\mu}$ suficientemente grande. Em seguida, diminui-se $\bar{\mu}$ até que um desempenho aceitável seja obtido, o que é garantido pela teoria. O vetor θ_μ é arbitrário, entretanto, se $|\theta_\mu|$ aumenta então $\bar{\mu}$ pode ser escolhido maior.

6.6 Simulações

Para ilustrar o comportamento variante no tempo de $\mu(t)$, considere o caso simples onde (5.1) se reduz a uma planta linear incerta, instável ($\rho=2$), com função de transferência

$$G(s) := C(sI - A)^{-1} B = \frac{k_p}{(s + 2 + \delta_1)(s - 1 + \delta_1)},$$

sob ação de uma perturbação casada dependente da saída de forma polinomial, dada por: $\phi_c = \delta_2 y^2 + \delta_3 \sin(2\pi\delta_5 t) + \delta_4$. Neste caso, $\phi \equiv 0$. Os parâmetros incertos são: $1 \leq k_p \leq 2$, $0 \leq \delta_1 < 1$, $0.5 \leq \delta_2, \delta_3, \delta_4 \leq 2$ e $8 \leq \delta_5 \leq 10$.

A dinâmica dos zeros (5.3) é inexistente. As hipóteses (H0)–(H2) são trivialmente satisfeitas. Em (H3) e (H6): $k_x^* = 0$, φ_0 e ϵ não são necessários, $\varphi_\vartheta(y, t) = \varphi_d = 2y^2 + 4$, $\Psi(a) = 2a^2$ e $k_\psi = 4$. Notando que $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, $L_B[L_f^0 h + \beta_0] = CB = 0$, $L_B[L_f h + \beta_1] = CAB = k_p$ e $T_\xi = [C \ CA]x$, conclui-se que (H4) se verifica e na hipótese (H5): $\psi_\xi = |T_\xi^{-1}||\xi|$ e $k_\xi = 0$.

Os parâmetros verdadeiros, supostos desconhecidos, são: $k_p = 2$, $\delta_1 = 0.6$, $\delta_2 = 1$, $\delta_3 = 0.7$, $\delta_4 = 2$ e $\delta_5 = 10$. A trajetória desejada é dada por $y_m = \frac{4}{(s+2)^2} \text{sgn}(\sin(0.5\pi t))$. Os outros parâmetros do controlador encontram-se na seguinte tabela. Para $y(0) = 10$

Elemento	Parâmetro
Sinais Disponíveis (3.25)	$\Phi = -10$, $\Gamma = 1$, $\tau_a = 0.1$, $\gamma_v = 0.4$
Modulação (6.3)	$\theta_{\rho 1}^T = [4 \ 1 \ 6]$, $\theta_{\rho 4}^T = [1 \ 8 \ 2 \ 0]$, $\delta = 0.1$
HGO (6.12), (6.13)	θ_μ é composto por 1's exceto $\theta_{\mu 4} = 0$, $\lambda_\mu = 5$

e $\dot{y}(0) = 0$ nenhuma diferença significativa foi observada no comportamento do sistema em malha fechada quando $\mu(t) = \bar{\mu} = 0.005$ constante ou variante no tempo $\mu(t)$ (com $\bar{\mu} = 0.005$) é utilizado. Por outro lado, para $y(0) = 150$ e $\dot{y}(0) = 0$ uma degradação aparente (y não converge para y_m) é observada na Figura 6.2 (a), se $\mu(t) = \bar{\mu} = 0.005$ constante for utilizado. Quando o $\mu(t)$ variante no tempo é implementado, a saída da planta converge (a partir de $y(0) = 150$) para a trajetória desejada, como mostra a Figura 6.2 (b). A evolução no tempo de $\mu(t)$ encontra-se na Figura 6.2 (c). Note que μ constante (duas vezes menor, i.e., $\mu = \bar{\mu} = 0.002$), poderia ser utilizado. Entretanto, este valor não é conhecido *a priori*. Além disso, ao se reduzir $\bar{\mu}$, deve-se considerar o compromisso entre redução de ruído de medição e precisão no rastreamento.

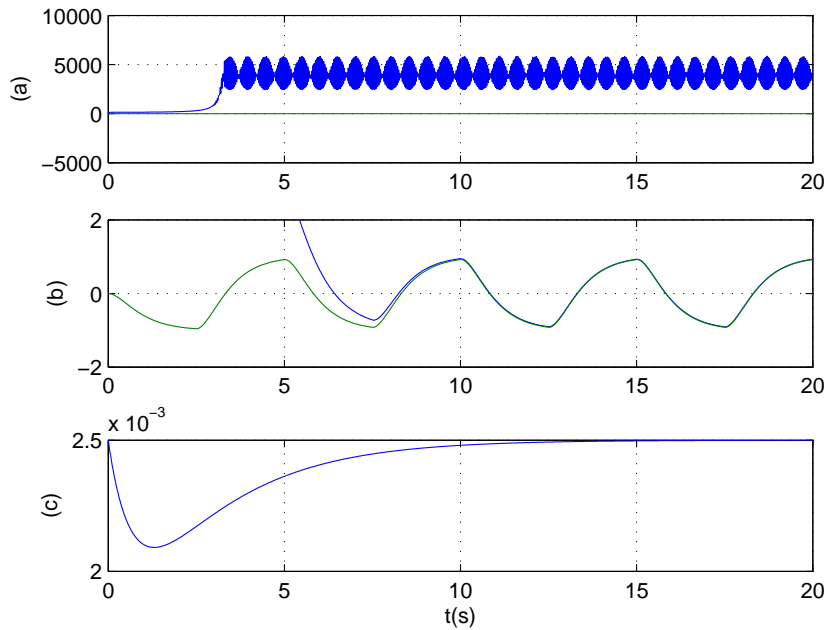


FIGURA 6.2: Resultados de Simulação ($y(0) = 150$ e $\dot{y}(0) = 0$). (a): y, y_m quando $\mu(t) = \bar{\mu} = 0.005$, (b): y, y_m quando $\mu(t)$ é dado por (6.12) com $\bar{\mu} = 0.005$ e (c): o parâmetro $\mu(t)$ variando no tempo.

6.7 Conclusões

Neste Capítulo o problema de rastreamento global de uma classe de sistemas não-lineares incertos monovariáveis foi resolvido por um controlador por modos deslizantes, via realimentação de saída, baseado em observador de alto ganho.

Os resultados de (Cunha et al. 2005) foram estendidos para incluir termos não-lineares, possivelmente descasados, que satisfazem um condição de crescimento linear com respeito apenas aos estados não-medidos. A idéia principal para obter o resultado global foi permitir que o ganho do observador varie dinamicamente, atingindo um mínimo em $1/\bar{\mu}$. Este resultado é, essencialmente, uma demonstração de existência de solução. Para o parâmetro de projeto $\bar{\mu}$ suficientemente pequeno, o sistema do erro é GAS com respeito a um conjunto compacto e exponencialmente convergente para um conjunto residual pequeno de ordem $\mathcal{O}(\bar{\mu})$.

O relé que gera o controle chaveado faz parte de uma malha de realimentação, que passa diretamente através do HGO, na qual a função de transferência que governa a dinâmica é de fase mínima e possui grau relativo unitário. Isto possibilita a ocorrência de modo deslizante, impedindo *chattering* em condições ideais.

Do ponto de vista de implementação, a escolha de $\bar{\mu}$ pode ser muito conservativa. Para contornar este conservadorismo, inicia-se o projeto com um valor de $\bar{\mu}$ suficientemente grande e então diminui-se aos poucos até obter um desempenho aceitável, que é garantido pela teoria. Simulações numéricas ilustraram o esquema proposto. A avaliação experimental é tópico para pesquisa futura.

6.8 Demonstrações

6.8.1 Demonstração da Proposição 5 – Majorantes Auxiliares

Antes de seguir com a demonstração é importante ressaltar que o vetor $v(t) \in \mathbb{R}^{16}$, definido em (3.25), é composto pelos vetores $v_1(t) \in \mathbb{R}_+^3$, $v_2(t) \in \mathbb{R}_+$, $v_3(t) \in \mathbb{R}_+^6$, $v_4(t) \in \mathbb{R}^4$ e $v_5(t) \in \mathbb{R}_+^2$. No que segue, $\theta_i \in \mathbb{R}_+^p$ ($p \in \{3, 1, 6, 4, 2\}$) é um vetor constante de elementos não-negativos, qualquer produto da forma $\theta_i^T v_j$ ($i = 1, 2, \dots$ e $j \in \{1, 2, 3, 5\}$) é um escalar não-negativo e k_i 's denotam constantes positivas. Considere agora os seguintes fatos:

(i) para quase todo $t \geq t_*$, qualquer função absolutamente contínua $g(t)$ satisfaz:

$$\left| \frac{d|g(t)|}{dt} \right|, \left| \frac{d\|g_{t,t_*}\|}{dt} \right| \leq |\dot{g}(t)|;$$

(ii) em (H8), $|\Psi'|$ pode ser majorado de forma afim em Ψ , onde $\Psi'(a) := \frac{d\Psi(a)}{da}$;

(iii) uma vez que $|r|$ é uniformemente limitado por hipótese e $|e| = |y - y_m|$ é um elemento do vetor $v_1(t)$ (3.30), então existe uma constante $c_r \geq 0$ tal que:

$$|y| \leq |e| + |y_m| \leq |e| + c_r \leq \theta_1^T v_1 + c_r;$$

(iv) de (6.3), $\varrho(t) = \theta_{\varrho 1}^T v_1(t) + \theta_{\varrho 4}^T v_4(t) + \delta$, $\forall t \in \mathcal{I}_0$.

O item (i) será utilizado (omitindo-se qualquer menção a respeito) sempre que for necessário obter a derivada do módulo de um sinal ou de sua norma infinita.

Agora, notando que $|u| \leq \varrho$ e que $|\omega_1|$ é elemento do vetor v_1 , pode-se concluir do item (iv) e de (3.27) que $|\dot{\omega}_1|$ pode ser majorado de forma afim em $\theta_1^T v_1(t) + \theta_2^T v_4(t)$. Analogamente, do item (iii) e de (3.27) e notando que $|\omega_2|$ também é elemento de v_1 , conclui-se que $|\dot{\omega}_2|$ pode ser majorado de forma afim em $\theta_3^T v_1$.

Por outro lado, de (5.13) tem-se $\dot{e} = C_m A_m x_e$ ou, equivalentemente,

$$\dot{e} = k^* s M(s) * (u + d) + C_m A_m e^{A_m t} x_e(0).$$

Então, usando um FOAF (c_e, γ_m) para $sM(s)$ tem-se

$$|\dot{e}| \leq \frac{c_e}{s + \gamma_m} * |u(t) + d| + \Pi.$$

Além disso, de acordo com a Proposição 3, d satisfaz $|d| \leq \theta_{d1}^T v_1(t) + \theta_{d4}^T v_4(t) + \Pi$. Sendo assim, considerando o item (iv), lembrando que r e ξ são uniformemente limitados e que os vetores v_3 e v_4 incorporam sinais filtrados, pode-se então verificar que $|\dot{e}| \leq \theta_4^T v_1(t) + \theta_5^T v_3(t) + \theta_6^T v_4(t) + \bar{k}_e + \Pi$. Portanto, a seguinte desigualdade se verifica

$$|\dot{\omega}_1|, |\dot{\omega}_2|, |\dot{e}|, |\dot{v}_1|, |\dot{v}_2| \leq \theta_7^T v_1(t) + \theta_8 v_2(t) + \theta_9^T v_3(t) + \theta_{10}^T v_4(t) + k_1 + \Pi, \quad (6.31)$$

onde $k_1 \geq 0$ é uma constante. O majorante para $|\dot{v}_2| = |\dot{u}_a|$ foi obtido do item (iv) e notando que (3.29) implica $\tau_a |\dot{u}_a| \leq |u_a| + \varrho$.

Com v_3 definido em (3.30) não é difícil concluir que $|\dot{v}_3| \leq |\dot{v}| + 2\gamma_v |v_3| + \varphi_0 + \varphi_\vartheta$, onde γ_v é o pólo do filtro $F_\gamma(s)$ utilizado em (3.30). Conclui-se também que $|\dot{v}| \leq 4\gamma_v |\bar{v}| + 3|v_1| + v_2$. Portanto, existe uma constante $k_2 \geq 0$ tal que

$$|\dot{v}_3| \leq \theta_{11}^T v_1(t) + \theta_{12} v_2(t) + \theta_{13} v_3(t) + k_2 + \varphi_0 + \varphi_\vartheta + \Pi.$$

Lembrando que $\varphi_0, \varphi_\vartheta$ e φ_d satisfazem (H8) e que $|y| \leq |C||x|$, tem-se que:

$$\varphi_0(y, t), \varphi_\vartheta(y, t), \varphi_d(|x|, t) \leq \Psi(c_x \hat{x}) + k_3 \leq \theta_{14}^T v_5(t) + k_3,$$

onde $c_x \geq \max\{|C|, 1\}$ e $k_3 \geq 0$ é uma constante. Portanto,

$$|\dot{v}_3| \leq \theta_{11}^T v_1(t) + \theta_{12} v_2(t) + \theta_{13} v_3(t) + \theta_{15}^T v_5(t) + k_5 + \Pi.$$

Agora de (6.31) e usando o fato de que $\theta_{10}^T v_4(t) \leq \theta_{16}^T v_5(t) + k_6$ (ver (3.32) e (3.34)), tem-se que $|\dot{v}_1|, |\dot{v}_2|$ e $|\dot{v}_3|$ satisfazem a primeira desigualdade da proposição (6.16).

Note que (3.34) implica $|\dot{v}_5| \leq k_7 \Psi'(\hat{x})|\dot{\hat{x}}| + \theta_{17}^T v_5$ e que, de acordo com a definição de \hat{x} (3.31), $|\dot{\hat{x}}| \leq k_8(|\dot{v}_2| + |\dot{v}_3|)$. Portanto, $|\dot{v}_3| \leq k_9 \Psi'(\hat{x})(|\dot{v}_2| + |\dot{v}_3|) + \theta_{17}^T v_5$ e pode-se concluir a segunda desigualdade (6.17) usando o item (ii).

De (6.13) e do item (i), obtém-se $|\dot{f}_\mu| \leq |\dot{\omega}_1| + |\dot{e}| + \lambda_\mu f_\mu$. Portanto, de (6.31) e relembrando que $\theta_{10}^T v_4(t) \leq \theta_{16}^T v_5(t) + k_6$ conclui-se que a terceira desigualdade (6.18) se verifica. ■

6.8.2 Demonstração da Proposição 6 – Existência de t_1

Esta demonstração está dividida da seguinte forma: (I) Primeiro, será demonstrado que enquanto $|e(t)|$ e $|\omega_1(t)|$ estiverem limitados $|v(t)|, |\eta(t)|, |\xi(t)|$ e $|x(t)|$ também estarão. Na realidade pode-se mostrar que a planta goza da propriedade UO e que v, x, ξ e η escapam em tempo finito somente se ω_1 ou e escaparem em tempo finito. (II) Segundo, prova-se também que o estado do HGO ($\hat{\xi}$) escapa em tempo finito somente se ω_1 ou e escaparem em tempo finito.

Portanto, supondo verdadeiras as afirmativas (I) e (II), é possível concluir que se qualquer sinal em malha fechada escapar em algum tempo finito, então ω_1 ou e também escapam antes ou ao mesmo tempo (t_M). Supondo t_M finito, então:

(i) $e^{-\lambda_\mu t} \geq e^{-\lambda_\mu t_M}, \forall t \in \mathcal{I}_0$, com λ_μ em (6.13);

(ii) $\exists t_1 \in \mathcal{I}_0$ tal que $\|(\omega_1)_t\| + \|e_t\| \geq \delta, \forall t \in [t_1, t_M)$, onde $\delta \geq 0$ é uma constante arbitrária.

Seja $R > 1$ uma constante dada. De (i), (ii), (6.12), (6.13) e escolhendo $\delta \geq (R-1)e^{\lambda_\mu t_M}$, obtém-se $\mu R \leq \bar{\mu}$. Por outro lado, é óbvio que se $R \leq 1$ também é válido que $\mu R \leq \mu \leq \bar{\mu}$. Portanto, (6.20) se verifica.

Demonstração da parte I: Uma vez que a dinâmica de ω_2 é ISS em relação a y , $y = e + y_m$ e y_m é uniformemente limitado, pode-se concluir a partir das componentes de v_1 em (3.26) que:

$$|v_1(t)| \rightarrow +\infty \quad \Leftrightarrow \quad |e(t)| \text{ ou } |\omega_1(t)| \rightarrow +\infty.$$

Obviamente, como $v_2 = |u_a|$ (3.28), tem-se que $|v_2(t)| \rightarrow +\infty \Leftrightarrow |u_a(t)| \rightarrow +\infty$. Conseqüentemente, de acordo com as definições de φ_0 e φ_ϑ dadas em (H3) e com v_3 em (3.30), pode-se concluir que

$$|v_3(t)| \rightarrow +\infty \quad \Leftrightarrow \quad |e(t)| \text{ ou } |\omega_1(t)| \text{ ou } |u_a(t)| \rightarrow +\infty.$$

Da Proposição 2, \hat{x} é função apenas de v_2 e v_3 , portanto pode-se concluir diretamente de (3.32) e (3.34) que v_4 e v_5 satisfazem a mesma relação que v_3 acima. Por outro lado, como tanto (3.29) quanto (3.27) são ISS com respeito ao controle u , pode-se assegurar que $|u_a(t)| \rightarrow +\infty \Leftrightarrow |\omega_1(t)| \rightarrow +\infty$. Portanto, pode-se concluir que v definido em (3.25) satisfaz

$$|v(t)| \rightarrow +\infty \quad \Leftrightarrow \quad |e(t)| \text{ ou } |\omega_1(t)| \rightarrow +\infty. \quad (6.32)$$

Conseqüentemente, com u dado por (6.2) e (6.3) e, de acordo com a Proposição 3, tem-se também que $|u + d| \rightarrow +\infty \Rightarrow |e(t)| \text{ ou } |\omega_1(t)| \rightarrow +\infty$. Com isso, conclui-se que $|\xi| \rightarrow +\infty \Rightarrow |e(t)| \text{ ou } |\omega_1(t)| \rightarrow +\infty$, uma vez que a dinâmica de $x_e = \xi - \xi_m$ em (5.13) é ISS com respeito a $u + d$. Além disso, da demonstração da Proposição 2 tem-se que

$$|\eta| \text{ ou } |x(t)| \rightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad |e(t)| \text{ ou } |\omega_1(t)| \rightarrow +\infty. \quad (6.33)$$

Conseqüentemente, enquanto $|e(t)|$ e $|\omega_1(t)|$ estiverem limitados $|v|$, $|\eta|$, $|\xi|$ e $|x|$ também estarão. Isso garante que a planta goza da propriedade UO, assegurando que se algum estado interno da planta escapar será observado pela saída y (ou por e) ou pela entrada u (ou por ω_1).

Demonstração da parte II: Com u dado por (6.2) e (6.3) e d_ϕ satisfazendo (H6), as relações (6.32) e (6.33) implicam o sinal $\nu(t)$ em (6.9) ser limitado enquanto $|e(t)|$ e $|\omega_1(t)|$ forem limitados. Por outro lado, de (6.19), existe uma constante $k_1 \geq 0$ tal que $|\dot{\mu}| \leq k_1$, o que implica que $\Delta(t)$ em (6.9) satisfaz $|\Delta(t)| \leq k_2$, onde k_2 é uma constante positiva. Como a dinâmica do erro de observação escalado ζ é linear em ζ , mesmo que variante no tempo, $\zeta(t) \rightarrow +\infty$ no máximo exponencialmente. Escape em tempo finito ocorre somente se $e(t)$ ou $\omega_1(t)$ escaparem em tempo finito. ■

6.8.3 Demonstração do Teorema 6.1

No que segue, $\Psi_i \in \mathcal{K}$ e k_i são constantes não-negativas. Lembre que t_μ (6.21) é definido como o primeiro instante de tempo tal que $\mu\Pi \leq \mathcal{O}(\bar{\mu})$, $\forall t \in [t_\mu, t_M)$. A existência de $t_\mu \in [0, t_M)$ já foi verificada. Sendo assim, utilizando as definições de Π (6.23) e de f_μ (6.12), pode-se verificar por contradição que durante o intervalo de tempo $[0, t_\mu]$ tem-se que $\|(\omega_1)_t\| + \|e_t\| \leq \Psi_1(|z(0)|)$.

Lembrando que a dinâmica de ω_2 em (3.27) é ISS em relação a y , $y = e + y_m$ e y_m é uniformemente limitado, pode-se concluir a partir das componentes de v_1 em (3.26) que $\|(v_1)_t\| \leq \Psi_2(|z(0)|) + k_1$. De (3.29) e (3.27) pode-se escrever

$$\tau_a \dot{x}_a = -x_a - (\Phi + I/\tau_a)\omega_1, \quad x_a = \Gamma u_a - \omega_1/\tau_a, \quad (6.34)$$

com $x_a(0) = \Gamma u_a(0) - \omega_1(0)/\tau_a$. Logo, de (6.34), $\|(v_2)_t\| = \|(u_a)_t\| \leq \Psi_3(|z(0)|) + k_2$.

Conseqüentemente, de acordo com as definições de φ_0 e φ_ϑ dadas em (H3) e com v_3 em (3.30), pode-se concluir que $\|(v_3)_t\| \leq \Psi_4(|z(0)|) + k_3$. Da Proposição 2, \hat{x} é função apenas de v_2 e v_3 , portanto pode-se concluir diretamente de (3.32) e (3.34) que v_4 e v_5 (e, portanto v) satisfazem a mesma relação que v_3 acima.

Logo, com u dado por (6.2) e (6.3) e, de acordo com a Proposição 3, tem-se também que $|u + d| \leq \Psi_5(|z(0)|) + k_4$. Com isso, conclui-se que ξ satisfaz uma relação análoga pois a dinâmica de $x_e = \xi - \xi_m$ em (5.13) é ISS com respeito a $u + d$. Além disso, da demonstração da Proposição 2 tem-se que $|x|, |\eta| \leq \Psi_6(|z(0)|) + k_5$.

Além disso, $|\zeta|$ satisfaz um limitante similar. Com u dado por (6.2) e (6.3) e d_ϕ satisfazendo (H6), os majorantes para $|v(t)|$ e $|x(t)|$ implicam $|\Delta(t)|, |\nu(t)| \leq \Psi_7(|z(0)|) + k_6$, com Δ e ν em (6.9). Como a dinâmica do erro de observação escalado ζ é linear em ζ , mesmo que variante no tempo, $\zeta(t) \rightarrow +\infty$ no máximo exponencialmente. Desta forma, pode-se provar que $|z|$ em (6.22) é limitado por $|z(t)| \leq \Psi_8(|z(0)|) + k_7$, $\forall t \in [0, t_\mu]$.

Combinando o último majorante e o majorante obtido após aplicar (considerando t_μ como instante inicial) o teorema de pequenos ganhos (Jiang et al. 1994) nas desigualdades (6.29) e (6.24), que é válido para $t \in [t_\mu, t_M)$, conclui-se que (6.30) se verifica $\forall t \in \mathcal{I}$, se $\bar{\mu}$ for feito suficientemente pequeno. Além disso, de (6.30), $z(t)$ é UB em \mathcal{I} , i.e., uniformemente limitado (*uniformly bounded* – UB) $\forall t \in \mathcal{I}$. Sendo assim, como provado a seguir, todos os sinais em malha fechada são UB em \mathcal{I} , o que leva à con-

clusão de que $t_M \rightarrow +\infty$. Portanto, de (6.30) $|z(t)| \rightarrow \mathcal{O}(\bar{\mu})$ exponencialmente e GAS do sistema do erro com respeito a um conjunto compacto $\{z : |z(t)| \leq b\}$ é assegurada.

Todos os sinais em malha fechada são limitados: Partindo de que $z(t)$ é UB em \mathcal{I} , tem-se que x_e , ζ e $\xi = x_e + \xi_m$ também são UB em \mathcal{I} . Além disso, de acordo com (H6) x e, conseqüentemente, ϑ e η são UB em \mathcal{I} . Falta provar que ω_1 e u_a são limitados. Uma vez que x e x_e são UB em \mathcal{I} , então d_ϕ (2.17), d (3.4) e $\sigma = Sx_e$ também o são. Lembrando que $\sigma = k^*ML[u+d]$, pode-se escrever $\sigma_1 := \sigma - k^*MLd = \frac{k_p}{s+a_m}u$ e concluir que σ_1 é UB em \mathcal{I} . Finalmente, u_a , v_1 e todos os sinais são UB em \mathcal{I} . ■

6.8.4 Demonstração do Corolário 6.1.1

Relembrando que $B_\rho = B_m$, $C_\rho = C_m$, $A_\rho = A_m - B_m\bar{K}_m$ e $\hat{\xi} = x_e + \xi_m - T_\mu^{-1}\zeta$, então (6.6) pode ser reescrito como $\dot{\hat{x}}_e = A_m\hat{x}_e + B_m[k_p^{\text{nom}}u - \bar{K}_m\xi_m - k_mr + \varsigma_1] + \varsigma_2$, onde $\varsigma_1 := \bar{K}_mT_\mu^{-1}\zeta - K_mx_e$ e $\varsigma_2 := (H_\mu L_o C_m)T_\mu^{-1}\zeta$. Uma vez que $\hat{\sigma} = S\hat{x}_e$, $SA_m = -a_mS$ e $SB_m = 1$, tem-se

$$\dot{\hat{\sigma}} = -a_m\hat{\sigma} + [k_p^{\text{nom}}u - \bar{K}_m\xi_m - k_mr + \varsigma_1 - S\varsigma_2]. \quad (6.35)$$

Do Teorema 6.1, pode-se concluir que todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados e que $z(t) \rightarrow \mathcal{O}(\bar{\mu})$. Então, existe um tempo finito $T_1 > 0$ tal que $|\varsigma_1 - S\varsigma_2| \leq k_p^{\text{nom}}\delta$, $\forall t \geq T_1$, para um dado $\delta > 0$. Aplicando o Lema 1 de (Hsu et al. 2002, p. 291) a (6.35) pode-se verificar que a condição para a existência de deslizamento $\hat{\sigma}\dot{\hat{\sigma}} < 0$ se verifica após algum tempo finito $T_2 \geq T_1$. ■

Capítulo 7

Controle de Plantas com Direção de Controle Desconhecida

Diferentemente dos Capítulos 4 e 6, este capítulo focaliza o problema de rastreamento *exato* e propõe uma solução *desconsiderando* o prévio conhecimento da direção de controle. A convergência assintótica do erro de rastreamento para zero é alcançada por meio de um filtro em avanço de fase híbrido, o qual combina um filtro linear em avanço de fase convencional e um diferenciador exato e robusto (*robust exact differentiator - RED*) (Levant 2003), baseado em modos deslizantes de segunda ordem.

Para tratar o problema do desconhecimento da direção de controle será proposto um mecanismo de chaveamento que ajusta o sinal da lei de controle por meio de uma função de monitoração que depende da variável de deslizamento.

O esquema proposto foi desenvolvido visando reter as qualidades do controlador proposto em (Yan et al. 2003), como bom desempenho transitório e capacidade de rejeitar perturbações.

Em contraste com esquemas baseados em HGOs, como o de (Khalil 2002) e do Capítulo 6, nenhum observador explícito se faz necessário e o sinal de controle é livre do fenômeno de pico. Estabilidade assintótica semi-global com respeito a um conjunto compacto é demonstrada.

Este Capítulo¹ é organizado da seguinte maneira. Com base no Capítulo 5, a

¹O esquema de controle desenvolvido neste capítulo é resultado de um trabalho em conjunto que resultou nas publicações: (Hsu, Oliveira & Peixoto 2006), (Peixoto, Oliveira & Hsu 2006), (Oliveira et al. 2006), (Peixoto et al. 2006) e (Oliveira, Peixoto, Nunes & Hsu 2007). Este Capítulo apresenta uma extensão de (Oliveira 2006) para plantas não-lineares, utilizando conceitos de (Nunes 2004).

Seção 7.1 apresenta a formulação do problema seguido do esquema de controle proposto. A Seção 7.2 descreve o filtro em avanço de fase híbrido utilizado para gerar a superfície de deslizamento. A função de monitoração utilizada para identificar corretamente a direção de controle é apresentada na Seção 7.3. As Seções 7.5, 7.6 e 7.7 apresentam comentários a respeito do projeto, simulações e conclusões, respectivamente. Por fim, a demonstração do resultado principal de estabilidade (Seção 7.4) é apresentada.

7.1 Formulação do Problema e Controlador

Neste Capítulo considera-se plantas da forma (5.1) que satisfaçam as hipóteses ($\mathcal{H}0$)–($\mathcal{H}6$), vide Capítulo 5. A hipótese clássica (hipóteses (H7) do Capítulo 3 e ($\mathcal{H}7$) do Capítulo 6) a respeito do conhecimento prévio da direção de controle é removida, i.e., k_p é incerto tanto em norma quanto em sinal.

O objetivo de controle está descrito no Capítulo 2, mas destaca-se que aqui é obtido **rastreamento exato** (e não apenas prático). O modelo de referência é dado no Capítulo 5, ver equação (5.9).

Assim como em (Peixoto et al. 2006, Hsu, Oliveira & Peixoto 2006), um *filtro híbrido em avanço de fase* (Fig.7.1) introduzido em (Nunes, Hsu & Lizarralde 2006), denominado de Diferenciador Global Robusto e Exato (*Global Robust Exact Differentiator* – GRED), será utilizado para gerar a superfície de deslizamento $\hat{\sigma} \equiv 0$, onde $\hat{\sigma}$ é uma estimativa de σ (Capítulo 5).

O GRED fornece um substituto para o operador não-causal $L(s)$ (5.9) combinando, por meio de um esquema de chaveamento, um filtro linear em avanço de fase e um diferenciador robusto e exato baseado em modo deslizante de segunda ordem.

A lei de controle é definida por:

$$u = s_p(t)U, \quad U = -\varrho(v(t))\text{sgn}(\hat{\sigma}(t)), \quad (7.1)$$

onde $s_p(t) \in \{-1, 1\}$ e a *função de modulação* $\varrho(v(t))$ contínua em t é dada por

$$\varrho(v(t)) := \theta_\varrho^T v(t) + \delta, \quad \theta_\varrho = \theta_d, \quad (7.2)$$

sendo $\delta \geq 0$ uma constante arbitrária, $v(t)$ o vetor de sinais disponíveis definido na Seção 3.6.2 e θ_d dado pela Proposição 3.

Em (Yan et al. 2003), uma função de monitoração foi proposta para tratar a falta do prévio conhecimento da direção de controle. Somente plantas SISO com grau relativo unitário ($\rho = 1$) foram consideradas e a variável σ (5.16), que neste caso coincide com o erro de rastreamento, foi escolhida como variável de monitoração.

Aqui, para plantas com $\rho > 1$, uma nova função de monitoração φ_m para a variável de deslizamento $\hat{\sigma}$ é utilizada para decidir quando

$$s_p(t) = \begin{cases} 1 & , t \in T^+, \\ -1 & , t \in T^-, \end{cases} \quad (7.3)$$

deve chavear de -1 para 1 e vice-versa (ver Figura 7.1). Em (7.3), $T^+ \cup T^- = [0, t_M)$, $T^+ \cap T^- = \emptyset$ e ambos T^+ e T^- têm a forma $[t_k, t_{k+1}) \cup \dots \cup [t_l, t_{l+1})$, onde t_k ou t_l denotam os instantes de chaveamento.

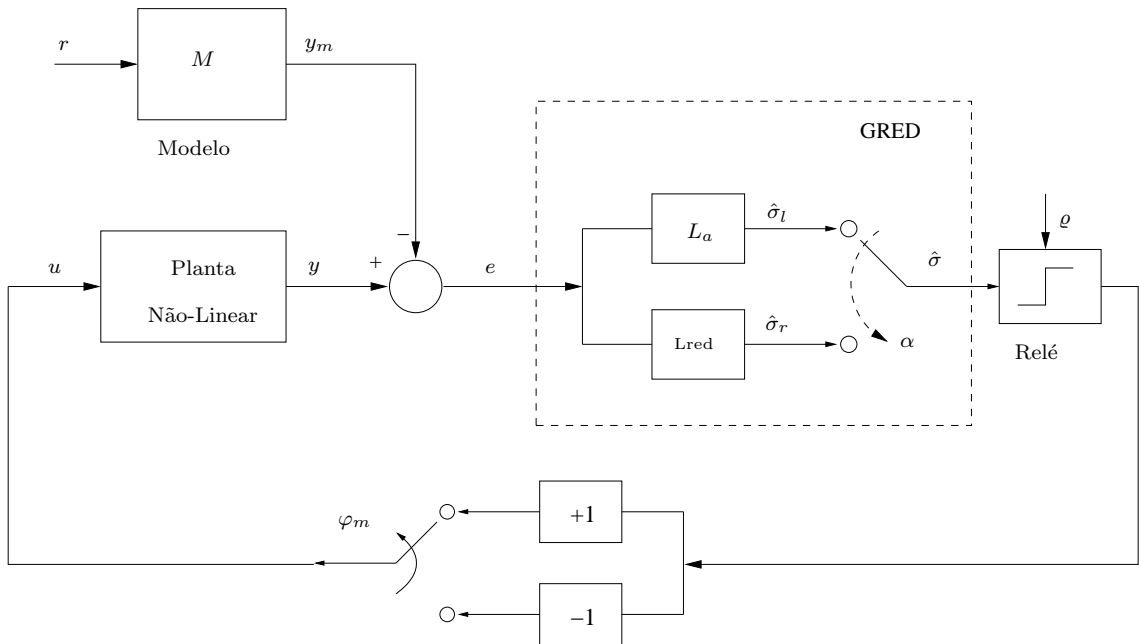


FIGURA 7.1: SMC via realimentação de saída com um filtro híbrido em avanço de fase (GRED) para compensar o excesso de grau relativo e um esquema de monitoração (φ_m) para ajustar o sinal do controle.

7.2 Variável de Deslizamento

Esta seção descreve como o GRED fornece a estimativa $\hat{\sigma}$ de σ .

7.2.1 Diferenciador Aproximado

O filtro linear em avanço (bloco L_a da Figura 7.1) do esquema do GRED é dado por:

$$\hat{\sigma}_l = L_a(s)e, \quad L_a(s) = L(s)/F(\tau s), \quad F(\tau s) = (\tau s + 1)^{(\rho-1)}, \quad \tau > 0. \quad (7.4)$$

Quando τ tende a zero, $L_a(s)$ e $\hat{\sigma}_l$ aproxima $L(s)$ e σ , respectivamente. Daqui por diante, considere $\tau \in (0, \bar{\tau}]$, onde $\bar{\tau} < 1$ é alguma constante suficientemente pequena.

Aplicando a transformação de variáveis de estado

$$T_f := \text{diag}\{1/\tau^{(\rho-1)}, 1/\tau^{(\rho-2)}, \dots, 1/\tau\},$$

à realização canônica controlável de $\tau^{(\rho-1)}L_a(s)$, obtém-se para (7.4) a realização:

$$\tau \dot{x}_f = A_f x_f + B_f e, \quad \tau^{(\rho-1)} \hat{e}_l = C_f(\tau) x_f + e, \quad (7.5)$$

onde A_f e B_f são matrizes constantes independentes de τ . Esta realização é interessante pois, devido ao escalamento de T_f , apenas a saída $\hat{\sigma}_l$ pode apresentar o fenômeno de pico (ver Seção 3.5), enquanto que o estado x_f é livre do mesmo. De fato, mudando a escala de tempo em (7.5) com $t = \tau \bar{t}$, a primeira equação em (7.5) torna-se independente de τ . Portanto, o estado x_f não pode apresentar pico. Uma vez que $C_f(\tau)$ é finito quando $\tau \rightarrow 0$, então pico surge apenas em $\hat{\sigma}_l$.

Quando $L_a(s)$ é utilizado em uma malha fechada com SMC, propriedades globais de estabilidade podem ser asseguradas, mesmo na presença de uma perturbação aditiva β_α de ordem $\mathcal{O}(\tau)$ em $\hat{\sigma}_l$ (Nunes et al. 2006). Entretanto, o filtro linear em avanço de fase não pode fornecer uma estimativa exata de σ , e sabe-se que *chattering* e erro residual no rastreamento podem ocorrer. Uma alternativa é utilizar diferenciadores exatos baseados em modos deslizantes de segunda ordem para obter estimativas exatas.

7.2.2 Diferenciador Exato: Local e Robusto

O seguinte diferenciador robusto e exato (RED), de (Levant 2003), é utilizado:

$$\begin{aligned}
 \dot{\chi}_0 &= \varpi_0, & \varpi_0 &= -\lambda_0 |\chi_0 - e(t)|^{\frac{n}{n+1}} \operatorname{sgn}(\chi_0 - e(t)) + \chi_1 \\
 &\vdots & & \\
 \dot{\chi}_i &= \varpi_i, & \varpi_i &= -\lambda_i |\chi_i - \varpi_{i-1}|^{\frac{n-i}{n-i+1}} \operatorname{sgn}(\chi_i - \varpi_{i-1}) + \chi_{i+1} \\
 &\vdots & & \\
 \dot{\chi}_n &= -\lambda_n \operatorname{sgn}(\chi_n - \varpi_{n-1})
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

De acordo com (Levant 2003, Theorem 1), se os parâmetros λ_i ($i = 0, \dots, n$) forem escolhidos de forma apropriada, (7.6) pode fornecer derivadas temporais de e exatas, na ausência de ruído de medição, após um tempo finito. Desta forma, o sinal σ pode ser estimado por

$$\hat{\sigma}_r = \chi_{\rho-1} + a_{\rho-2} \chi_{\rho-2} + \dots + a_1 \chi_1 + a_0 \chi_0. \tag{7.7}$$

A aproximação não-linear de $L(s)$ (bloco L_{red} da Figura 7.1) é definida pelo RED (7.6) de ordem $\rho - 1$, entrada e e saída $\hat{\sigma}_r$.

Apesar do RED fornecer uma estimativa exata de σ , quando utilizado em malha fechada apenas propriedades locais de convergência podem ser garantidas, uma vez que o sinal a ser diferenciado (o erro de saída) possui constante de Lipschitz apenas local (Levant 2003). No que segue, uma nova estimativa de σ será obtida, tentando reter as características desejáveis de ambas as estimativas $\hat{\sigma}_l$ e $\hat{\sigma}_r$.

7.2.3 Diferenciador Exato: Global e Robusto (*GRED*)

O GRED é o bloco (ver Figura 7.1) composto por L_a e L_{red} com saída $\hat{\sigma}$ dada pela seguinte combinação convexa:

$$\hat{\sigma} = \alpha(\tilde{\sigma}_{rl}) \hat{\sigma}_l + [1 - \alpha(\tilde{\sigma}_{rl})] \hat{\sigma}_r, \quad \tilde{\sigma}_{rl} = \hat{\sigma}_r - \hat{\sigma}_l, \tag{7.8}$$

onde $\hat{\sigma}_l$ (7.4) e $\hat{\sigma}_r$ (7.7) são as estimativas de σ fornecidas por L_a e L_{red} , respectivamente. A seguinte função de chaveamento (contínua) $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ permite mudanças suaves

entre $\hat{\sigma}_l$ e $\hat{\sigma}_r$:

$$\alpha(\tilde{\sigma}_{rl}) = \begin{cases} 0, & \text{para } |\tilde{\sigma}_{rl}| < \epsilon_M - c, \\ (|\tilde{\sigma}_{rl}| - \epsilon_M + c)/c, & \text{para } \epsilon_M - c \leq |\tilde{\sigma}_{rl}| < \epsilon_M, \\ 1, & \text{para } |\tilde{\sigma}_{rl}| \geq \epsilon_M, \end{cases} \quad (7.9)$$

onde $0 < c < \epsilon_M$ e $\epsilon_M := \tau k_R$, com $k_R > 0$ sendo um parâmetro de projeto apropriado e τ em (7.4). Para grandes valores de $|\tilde{\sigma}_{rl}|$ a estimativa $\hat{\sigma}_l$ é selecionada, garantindo estabilidade em malha fechada como foi mencionado após (7.4). Por outro lado, pequenos valores de $|\tilde{\sigma}_{rl}|$ seleciona-se a estimativa $\hat{\sigma}_r$ para assegurar estimação exata após um transitório (Nunes et al. 2006).

De (7.8), pode-se concluir que $\beta_\alpha := \hat{\sigma} - \hat{\sigma}_l = (1 - \alpha)\tilde{\sigma}_{rl}$ e, com (7.9), tem-se:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_l + \beta_\alpha \quad \text{e} \quad |\beta_\alpha| \leq \epsilon_M (= \tau k_R), \quad (7.10)$$

o que significa que o sistema resultante é equivalente a um SMC que utiliza apenas o filtro linear em avanço de fase na presença de uma perturbação de saída β_α uniformemente limitada por uma constante de ordem $\mathcal{O}(\tau)$. Portanto, propriedades globais (ou semi-globais) de estabilidade do sistema em malha fechada (com o GRED) podem ser garantidas. Além disso, após um tempo finito, obtém-se uma estimativa exata de σ (Nunes et al. 2006).

7.2.4 Equação da Variável de Deslizamento

De (5.14) e (5.17), $\hat{\sigma}_l$ (7.4) pode ser reescrito como

$$\hat{\sigma}_l = k^* ML(s) [u + d] + \beta_l + e_F^0, \quad \beta_l := k^* ML(s) [1 - F(\tau s)] F^{-1}(\tau s) * (u + d), \quad (7.11)$$

onde as condições iniciais de x_e em (5.13) e x_f em (7.5) foram incorporadas no termo

$$e_F^0(t) := L_a(s) * C_m e^{A_m t} x_e(0) - S e^{A_m t} x_e(0) + \frac{1}{\tau(\rho-1)} C_f e^{A_f t/\tau} x_f(0). \quad (7.12)$$

Usando (7.10) é possível verificar que $\hat{\sigma}$ satisfaz

$$\hat{\sigma} = k^* ML(s) [u + d] + \beta + e_F^0, \quad \beta = \beta_l + \beta_\alpha. \quad (7.13)$$

7.3 Função de Monitoração

Nesta seção será desenvolvida a função de monitoração φ_m baseada em um majorante para a norma de $\hat{\sigma}$ desenvolvido a seguir.

De (7.11) e notando que $|u + d| \leq 2\varrho$, segue que $|\beta_l| \leq 2W_\beta(s, \tau) * \varrho(t)$, onde $W_\beta(s, \tau)$ pode ser escolhido, por meio da expansão em frações parciais de

$$k^* ML(s) [1 - F(\tau s)] F^{-1}(\tau s),$$

como a soma de dois FOAF's (um com pólo rápido $-1/\tau$) de tal forma que a norma induzida \mathcal{L}_∞ de $W_\beta(s, \tau)$ seja de ordem $\mathcal{O}(\tau)$. Relembrando que $|\beta_\alpha| \leq \epsilon_M$ (ver (7.10)), a norma do sinal não disponível β pode ser majorado pelo sinal disponível

$$\bar{\beta} = 2W_\beta(s, \tau) * \varrho(t) + \epsilon_M. \quad (7.14)$$

7.3.1 Majorante para a Norma de $\hat{\sigma}$

De (7.12) e expandindo $L_a(s)$ em frações parciais, tem-se que

$$|e_F^0| \leq R_1 e^{-\lambda_m t} + \frac{R_2}{\tau(\rho-1)} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \forall t \in [0, t_M], \quad (7.15)$$

onde R_1 e R_2 são combinações lineares de $|x_e(0)|$ e $|x_f(0)|$ (independentes de τ) e $0 < \lambda_m < \lambda_m[A_m]$, com A_m em (5.13). Além disso, de (7.15) pode-se verificar que

$$|e_F^0| \leq R_a e^{-\lambda_a(t - \bar{t}_e(\tau))}, \quad \forall t \in [\bar{t}_e, t_M], \quad R_a = k_a(|x_e(0)| + |x_f(0)|), \quad (7.16)$$

onde $0 < \lambda_a < \min(\lambda_m, 1/\bar{\tau})$, $\tau < \bar{\tau} < 1$, $k_a > 0$ é uma constante e $\bar{t}_e(\tau)$ é um limitante superior para o *tempo de extinção de pico* t_e , definido na Seção 3.5, o qual pode ser obtido a partir dos limitantes (conhecidos) dos parâmetros da planta (Hsu et al. 2005).

Agora, considere a seguinte função:

$$\gamma(t) := R_a e^{-\lambda_a(t-\bar{t}_e)} + f_d(t), \quad f_d(t) := \begin{cases} \|\bar{\beta}_{t, \bar{T}_j}\|, & \bar{T}_j < t \leq T_{j+1}, \\ \|\bar{\beta}_{t, \bar{T}_{j-1}}\| e^{-\lambda_d(t-T_j)}, & T_j < t \leq \bar{T}_j, \end{cases} \quad (7.17)$$

onde $j = \{1, 2, \dots\}$ e $\lambda_d \leq \gamma$ com γ dado em (5.9). Além disso (ver Figura 7.2),

$$T_{j+1} := \min\{t > \bar{T}_j : |\bar{\beta}(t)| \leq \mu_d f_d(t)\}, \quad \bar{T}_j := \min\{t > T_j : f_d(t) \leq |\bar{\beta}(t)|\}, \quad (7.18)$$

onde $0 < \mu_d < 1$ e, por convenção, $\bar{T}_0 = 0$.

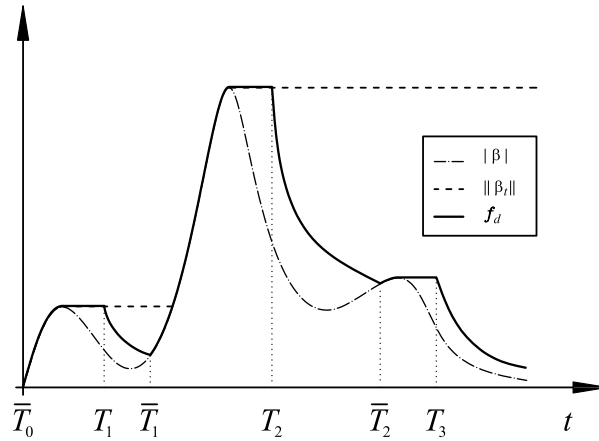


FIGURA 7.2: Funções $|\beta|$, $\|\beta_t\|$ e f_d .

Se a direção de controle estiver estimada corretamente, então, aplicando o Lema C.3 (ver Apêndice) a (7.13), um majorante para $|\hat{\sigma}|$ pode ser obtido, se a função de modulação ϱ satisfizer (5.18). De fato, escolhendo (7.17) como a função $\gamma(t)$ do Lema C.3, o seguinte majorante é válido $\forall t \in [t_i, t_M)$, com $\bar{t}_e \leq t_i \leq t < t_M$:

$$|\sigma(t)|, |\hat{\sigma}(t)| \leq \zeta(t), \quad (7.19)$$

onde

$$\zeta(t) := (|\hat{\sigma}(t_i)| + |\bar{\beta}(t_i)|)e^{-a_m(t-t_i)} + (2R_a e^{\lambda_a \bar{t}_e})e^{-\lambda_a t} + 2f_d(t). \quad (7.20)$$

A função de monitoração φ_m será implementada com base no majorante (7.20). A taxa de decaimento λ_d pode ser interpretada como um *fator de esquecimento*, ver Figura 7.2, que permite que φ_m seja menos conservativa resultando em melhores transitórios.

7.3.2 Implementação da Função de Monitoração

Considere a seguinte função

$$\varphi_k(t) := (|\hat{\sigma}(t_k)| + |\bar{\beta}(t_k)|)e^{-a_m(t-t_k)} + a(k)e^{-\lambda_m t} + 2f_d(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (7.21)$$

onde $a(k)$ é uma seqüência positiva monótona crescente e ilimitada. A motivação da introdução do termo $a(k)e^{-\lambda_m t}$ está no fato de que o termo $(2R_a e^{\lambda_a \bar{t}_e})e^{-\lambda_a t}$ em (7.20) não é disponível. A *função de monitoração* φ_m é definida por

$$\varphi_m(t) := \varphi_k(t), \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \subset [0, t_M). \quad (7.22)$$

Note que de (7.21) e (7.22), tem-se $|\hat{\sigma}(t_k)| < \varphi_k(t_k)$ para $t = t_k$. O instante de chaveamento (t_k) de $s_p = 1$ para $s_p = -1$ (ou de $s_p = -1$ para $s_p = 1$) é definido por

$$t_{k+1} := \begin{cases} \min\{t > t_k : |\hat{\sigma}(t)| = \varphi_k(t)\}, & \text{se existir,} \\ t_M, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (7.23)$$

onde $k \in \{1, 2, \dots\}$, $t_0 := 0$ e $t_1 := \bar{t}_e$. Por conveniência, $\varphi_0 := 0$, $\forall t \in [t_0, t_1)$, ver Figura 7.3. A seguinte desigualdade pode ser obtida diretamente da definição (7.22)

$$|\hat{\sigma}(t)| \leq \varphi_m(t), \quad \forall t \in [t_1, t_M). \quad (7.24)$$

A Figura 7.3 ilustra o sinal $|\hat{\sigma}|$, com pico inicial, assim como a função φ_m .

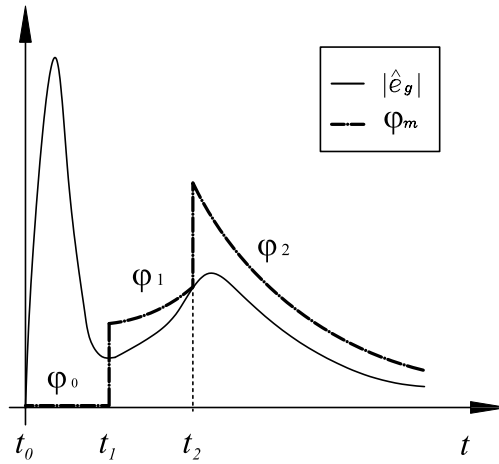


FIGURA 7.3: Trajetórias de φ_m e $|\hat{\sigma}|$.

7.4 Resultado de Estabilidade SEMI-GLOBAL

Para considerar as condições iniciais envolvidas em (5.13) e (7.13), seja

$$z^T := [x_e^T, x_f, (z^0)^T], \quad (7.25)$$

onde z^0 denota o *estado transiente* (Hsu et al. 1997) correspondente aos filtros BIBO estáveis usados na implementação da função de modulação, ou seja, em (3.30), (3.32) e (3.34). O resultado principal de estabilidade e convergência é dado pelo teorema a seguir.

Teorema 7.1 *Considere o sistema do erro (5.13) e (7.13) com lei de controle (7.3). Suponha que $(\mathcal{H}0)$ – $(\mathcal{H}6)$ sejam válidas e que a função de modulação ϱ satisfaça (5.18). Então, para $\tau > 0$ suficientemente pequeno, o estado completo do erro $z(t)$, definido em (7.25), é globalmente/semi-globalmente assintoticamente estável com respeito a um conjunto compacto independente das condições iniciais. Além disso, a superfície $\sigma \equiv 0$ é atingida em tempo finito, os sinais de erro $z(t)$ e $e(t)$ tendem exponencialmente a zero e o chaveamento do sinal da lei de controle pára com o sinal correto.*

Prova: Ver Seção 7.8. ■

7.5 Projeto do Controlador

Da mesma forma que no capítulo anterior, uma escolha possível para ϱ satisfazer (5.18), a menos de termos que decrescem para zero em módulo, é dada por:

$$\varrho(v(t)) := \theta_\varrho^T v(t) + \delta,$$

com $\theta_\varrho = \theta_d$, θ_d definido na Proposição 3 e $\delta \geq 0$ sendo uma constante arbitrária.

Deve-se recordar, da demonstração da Proposição 3, que θ_d é obtido utilizando um majorante para $|\theta^*|$, onde θ^* é o vetor de parâmetros ideais, presente na expressão alternativa para d (B.15), que assegura casamento perfeito entre a planta e o modelo estável $M(s) = \frac{k_m}{(s+\gamma)L(s)}$, $k_m, \gamma > 0$.

Entretanto, θ_ϱ deve ser projetado utilizando um majorante para a norma do vetor $\bar{\theta}$, onde $\bar{\theta}$ é tal que $\bar{\theta}_i > \max\{|\theta_i^*|, |\theta_i^\dagger|\}$, sendo θ^\dagger o vetor de parâmetros ideais que assegura casamento perfeito entre a planta e o modelo instável $M(s) = \frac{k_m}{(s-\gamma)L(s)}$, $k_m, \gamma > 0$.

Isto garantirá que, com uma estimativa errada da direção de controle, o sistema se tornará instável e, conseqüentemente, o $\text{sgn}(k_p)$ pode ser corretamente estimado por $s_p(t)$, através da função de monitoração φ_m (ver a demonstração do Teorema 7.1).

7.6 Simulações

Para ilustrar o desempenho do controlador proposto, considere a planta não-linear (5.1) com não linearidades $\phi^T(x, t) = [\delta_1 x_1^2 \ 0 \ 0]$ e $\phi_c = x_2 \sin(2t)$ e com (A, B, C) sendo a realização canônica controlável para a função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)(s-1)}$$

instável e de grau relativo $\rho=3$. A planta linear $G(s)$ é considerada *incerta*. Limitantes para a norma do vetor de parâmetros ideais, θ^* definido no Apêndice, são conhecidos. O parâmetro incerto δ_1 pertence ao intervalo $0 < \delta_1 < 2$.

A dinâmica dos zeros (5.3) é inexistente e as hipóteses $(\mathcal{H}0)$ – $(\mathcal{H}2)$ são satisfeitas trivialmente. Em $(\mathcal{H}3)$ e $(\mathcal{H}6)$: $k_x^* = 1$, φ_0 e ϵ não são necessários, $\varphi_\vartheta(y, t) = \varphi_d = y^2$, $\Psi(a) = a^2$ e $k_\psi = 0$. Após algumas manipulações algébricas pode-se verificar que

($\mathcal{H}4$) e ($\mathcal{H}5$) são válidas, pois a planta é triangular no estado não-medido. A função de modulação $\varrho(t)$ é implementada como no exemplo do Capítulo 6. O parâmetros de projeto encontram-se na Tabela a seguir. As condições iniciais da planta são $y(0) = 10$,

TABELA 7.1: Sistema de Controle (Resultados de Simulação).

Elemento	Valor
Modelo de Referência	$M(s) = \frac{4}{(s+2)^3}, r(t) = 5 \sin(t)$
FOAF's para $\bar{\beta}$ (7.14)	$\bar{k}^* = 1, W_{\beta}(s, \tau) = \frac{4\tau}{s+2} + \frac{5.2}{s+1/\tau}$
Monitoração (7.21) e (7.22)	$a(k) = k + 1, \gamma = 2, \lambda_m = 1, t_1 = \bar{t}_e = 0.1s$
Função f_d (7.17)-(7.18)	$\lambda_d = 1, \mu = 0.8$
Filtro de avanço	$L(s) = (s + 2)^2, F(\tau s) = (\tau s + 1)^2, \tau = 10^{-3}$
Parâmetros do RED	$\lambda_0 = 3C_3^{\frac{1}{3}}, \lambda_1 = 1.5C_3^{\frac{1}{2}}, \lambda_2 = 1.1C_3, C_3 = 250$
Lei de Chaveamento α (7.9)	$\epsilon_M = 600\tau, c = 0.01$

$\dot{y}(0) = 10$ e $\ddot{y}(0) = 10$ e a estimativa da direção de controle é errada em $t = 0$. A Figura 7.4 (a) mostra que após o tempo de extinção de pico \bar{t}_e apenas um chaveamento do sinal de controle é necessário (segundo salto de φ_m quando encontra $|\hat{\sigma}|$). Logo após, a direção de controle é identificada corretamente $\hat{\sigma}$ decai para zero em tempo finito. A Figura 7.4 (b) exhibe as mudanças entre o filtro linear em avanço de fase ($\alpha = 1$) e o RED ($\alpha = 0$). É evidente que, ao final, o RED é escolhido pela estratégia de chaveamento do filtro híbrido (GRED). Isto também se traduz pela convergência da saída da planta para a saída do modelo de referência ilustrada na Figura 7.4 (c). A Figura 7.5 (a)-(b) destaca a boa resposta transitória do esquema proposto sujeito a variações no tempo da direção de controle. Na Figura 7.5 (a), o transitório de e praticamente não se altera após as mudanças na direção de controle que ocorrem em $t = 0, 2, 4, 6$ e $8s$ que podem ser observadas na Figura 7.5 (b).

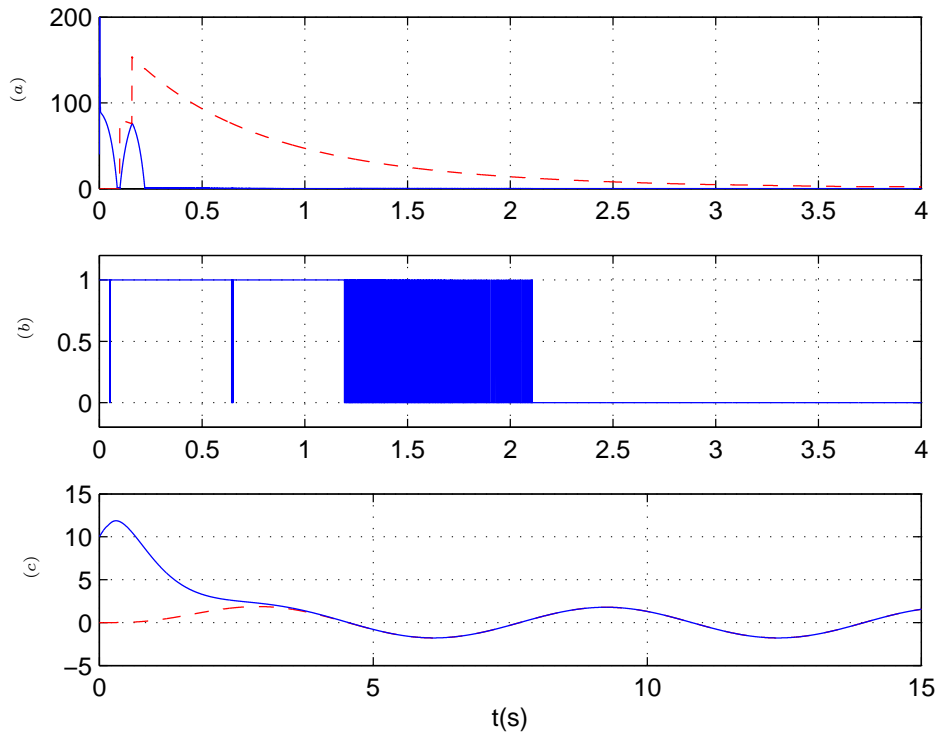


FIGURA 7.4: Resultados de Simulação. (a): estimativa $|\hat{\sigma}|$ (—) e função de monitoração φ_m (---), (b): lei de chaveamento α , (c): saída da planta y (—) e saída do modelo de referência y_m (---).

7.7 Conclusões

Neste capítulo foi considerado o problema de rastreamento exato global/semi-global. Desenvolveu-se um controlador por modos deslizantes, via realimentação de saída, para plantas não-lineares incertas, de grau relativo arbitrário, generalizando o controlador proposto em (Yan et al. 2003). Dois aspectos merecem destaque: (i) no projeto do controlador não é necessário conhecer a direção de controle da planta e (ii) rastreamento exato é obtido.

O controlador assegura estabilidade assintótica semi-global com relação a um conjunto compacto e convergência do erro de rastreamento para zero, e requer dois esquemas de chaveamento. O primeiro ajusta o sinal da lei de controle baseado em uma função de monitoração adequada construída somente com sinais de entrada e saída. O segundo é utilizado para implementar o filtro híbrido em avanço de fase denominado de GRED que conjuga filtragem linear convencional e diferenciadores robustos e exatos,

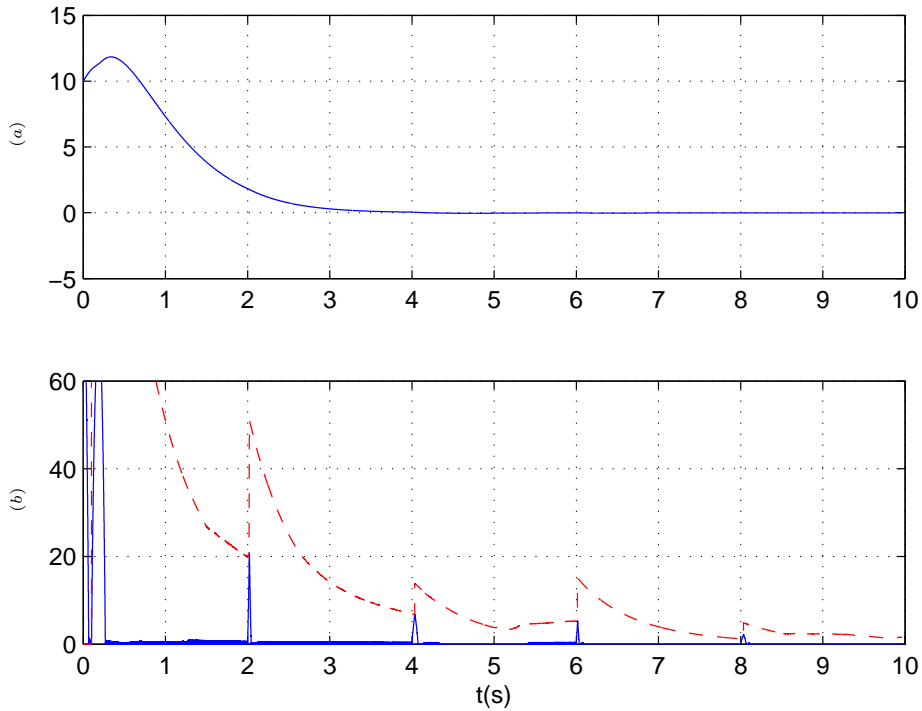


FIGURA 7.5: Resultados de Simulação. (a): erro de rastreamento e , (b): estimativa $|\hat{\sigma}|$ (-) e função de monitoração φ_m (---).

baseados em modos deslizantes de segunda ordem.

Uma vez que a magnitude do sinal de controle depende apenas de sinais medidos e de estimativas que não são baseadas em alto ganho, o fenômeno de pico é evitado. Além disso, em condições ideais, não ocorre *chattering* no sinal de controle pois o sistema entra em deslizamento ideal.

Simulações numéricas ilustram o desempenho do esquema proposto quando a planta está sujeita a perturbações descasadas com a entrada de controle e dependentes da saída de forma polinomial. Verifica-se que o controlador proposto preserva estabilidade e mostra-se robusto à perturbações externas de grande intensidade. Diferentemente dos resultados alcançados com outras abordagens para direção de controle desconhecida, o sistema realimentado com o esquema proposto apresenta bom comportamento transitório.

Os resultados experimentais obtidos com plantas lineares, em (Peixoto et al. 2006), indicam que o controlador proposto deve apresentar um bom desempenho em condições reais, mesmo para sistemas não-lineares.

7.8 Demonstração do Teorema 7.1

No que segue, $k_i, \bar{k}_i > 0$ são constantes independentes de condições iniciais e $\Psi_i(\cdot) \in \mathcal{K}$. **Majorante para $|\bar{\beta}|$:** Relembrando que $W_\beta(s, \tau)$ em (7.14) é um operador de ordem $\mathcal{O}(\tau)$, e utilizando a Proposição 4, pode-se concluir que $|\bar{\beta}| \leq \tau \Psi_1(\|z_t\|) + \mathcal{O}(\tau) + \Pi$, uma vez que $|x_e| \leq |z|$, com z definido em (7.25). Por continuidade, dado qualquer $R > 0$, se $|z(0)| \leq R/2$ então $\exists t_R \in [0, t_M]$ tal que $|z(t)| < R, \forall t \in [0, t_R]$. Portanto, $\forall t \in [0, t_R]$ e $\forall a \in [0, |z(t)|]$, tem-se que $\Psi_i(a) \leq k_i^R a$, com $k_i^R > 0$ constante e possivelmente dependente de R . Logo,

$$|\bar{\beta}| \leq \tau k_1^R \|z_t\| + \mathcal{O}(\tau) + \Pi, \quad \forall t \in [0, t_R]. \quad (7.26)$$

Majorante para z durante o pico ($\forall t \in [0, t_1]$): Relembrando que o tempo de extinção de pico (ver Seção 3.5) satisfaz $t_e \leq \bar{t}_e(\tau)$, onde $\bar{t}_e(\tau) \in \mathcal{K}$, então $\bar{t}_e(\tau) < t_R$, para τ suficientemente pequeno. Como $|u+d| \leq 2\varrho$, de acordo com a Proposição 4 (com $t_* = 0$), pode-se concluir que $|u+d| \leq k_2^R \|(x_e)_t\| + \Pi + k_1$, para $t \in [0, t_1] \subset [0, t_R]$, onde $t_1 = \bar{t}_e$ é o primeiro instante de chaveamento, por construção. Logo, a solução de (5.13) pode divergir no máximo exponencialmente de acordo com $|x_e(t)| \leq k_2 e^{k_L t} |x_e(0)| + k_2'(e^{k_L t} - 1)$ para algumas constantes positivas k_L, k_2 e k_2' . Além disso, levando em conta (7.5), pode-se concluir que:

$$|z(t)| \leq k_3^R |z(0)| + \mathcal{O}(\tau), \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (7.27)$$

Majorante para $z \forall t \in [0, t_M]$: De (7.17), (7.21), (7.22) e (7.24), tem-se que $\|\hat{\sigma}_{t,t_1}\| \leq |\hat{\sigma}(t_p)| + a(k) + 3\|\bar{\beta}_t\|, \forall t \in [t_1, t_M]$, onde $k \geq 1$ é tal que $t \in [t_k, t_{k+1}]$, e $p = \operatorname{argmax}_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} |\hat{\sigma}(t_i)|$. Com z de (7.25), (7.16) implica $\|(e_F^0)_{t,t_1}\| \leq k_3 |z(0)|$. Portanto, uma vez que $|\beta| \leq \bar{\beta}$ e

$$\sigma = \hat{\sigma} + \underbrace{(-\beta - e_F^0)}_{=\hat{\sigma}},$$

(ver (5.17) e (7.13)) obtém-se

$$\|(\sigma)_{t,t_1}\| \leq |\sigma(t_p)| + a(k) + 2k_3 |z(0)| + 5\|\bar{\beta}_t\|, \quad \forall t \in [t_1, t_M]. \quad (7.28)$$

De acordo com a Proposição 1 (que também é válida para o caso SISO), a dinâmica de x_e é ISS em relação a σ . Além disso, com A_f em (7.5) é Hurwitz, (7.5) também é ISS com respeito a $e = C_m x_e$ e, conseqüentemente, com respeito a σ . Logo, z (7.25) satisfaz uma desigualdade similar a (7.28), válida $\forall t \in [t_1, t_M)$. Agora, considerando (7.27) e notando que $|\sigma(t_p)| = |Sx_e(t_p)| \leq |S||z(t_p)| \leq |S| \max_{i=1, \dots, k} \{|z(t_i)|\}$, obtém-se:

$$\|(z)_t\| \leq k_4 \max_{i=1, \dots, k} \{|z(t_i)|\} + k_5 a(k) + k_6 |z(0)| + k_7 \|\bar{\beta}_t\| + \mathcal{O}(\tau), \quad \forall t \in [0, t_M). \quad (7.29)$$

O chaveamento $s_p(t)$ pára: Suponha que $s_p(t)$ (7.1) troque entre $+1$ e -1 sem parar, $\forall t \in [0, t_M)$. Então, $a(k)$ em (7.22) cresce ilimitadamente quando $k \rightarrow \infty$. Logo, existe um valor finito $k = \kappa$ tal que $a(\kappa) \geq 2R_a e^{\bar{\lambda} a \bar{t}_e}$ (ver 7.16) e $\text{sgn}(k_p)$ é estimado corretamente. Neste caso, $\varphi_m(t) > \zeta(t)$, $\forall t \in [t_\kappa, t_M)$, com ζ em (7.20). Além disso, ζ é um majorante válido para $|\hat{\sigma}|$. Desta forma, não pode ocorrer mais nenhum chaveamento após $t = t_\kappa$, o que é uma contradição. Sendo assim, $\varphi_m(t)$ (7.22) tem que parar o chaveamento após algum $k = N$ (finito) para $t \in [0, t_M)$. Logo, existe um número finito de chaveamento no intervalo $[0, t_R)$.

Estabilidade em relação a um conjunto compacto: Não é difícil concluir que N pode ser relacionado com $|z(0)|$, uma vez que $R_a \leq \bar{k}_1 |z(0)|$ por definição. De fato, pode-se escrever que $N \leq \Psi_2(|z(0)|) + \bar{k}_2$. Portanto, $a(N) \leq \Psi_3(|z(0)|) + \bar{k}_3$ e, de (7.29), $\|(z)_t\| \leq k_4 \max_{i=1, \dots, k} \{|z(t_i)|\} + \Psi_4(|z(0)|) + k_7 \|\bar{\beta}_t\| + \mathcal{O}(\tau) + \bar{k}_4$, $\forall t \in [0, t_R)$. Logo, utilizando (7.26) e o teorema de pequenos ganhos, obtém-se:

$$|z(t_{k+1})|, \quad \|(z)_t\| \leq k_4 \max_{i=1, \dots, k} \{|z(t_i)|\} + \Psi_5(|z(0)|) + \mathcal{O}(\tau) + \bar{k}_5, \quad \forall t \in [0, t_R), \quad (7.30)$$

escolhendo-se $\tau < 1/(k_1^R k_7)$. Adicionalmente, a partir da desigualdade recursiva (7.30) e de (7.27) pode-se obter $\|(z)_t\| \leq \Psi_6(|z(0)|) + c$, $\forall t \in [0, t_R)$, onde c é uma constante positiva. Então, dado $R > c$, para $|z(0)| < R_0$, com $R_0 \leq \Psi_6^{-1}(R - c - \epsilon)$, $|z(t)|$ é limitado por $R - \epsilon$ quando $t \rightarrow t_R$, onde $\epsilon > 0$ é uma constante arbitrária. Isto implica $z(t)$ ser uniformemente limitado e não poder escapar em tempo finito, o que acarreta que todos os sinais do sistema em malha fechada não escapem em tempo finito, ou seja, $t_M = +\infty$. Sendo assim, estabilidade com respeito a uma bola de raio c é assegurada para $z(0)$ dentro de uma bola de raio R_0 . Como R e portanto R_0 podem ser escolhi-

dos arbitrariamente grandes quando $\tau \rightarrow 0$, estabilidade semi-global é obtida. Além disso, se ϕ for globalmente Lipschitz e/ou $\rho = 1$ então as propriedades de estabilidade tornam-se globais.

Convergência exponencial para um pequeno conjunto residual: Independentemente da direção de controle ter sido corretamente estimada, em $k = N$, considere o estado do sistema em malha fechada em $t = t_N$. Por meio de um procedimento análogo àquele utilizado para se obter (7.26) e considerando (7.24), as seguintes desigualdades podem ser obtidas ($\forall t \geq t_N$):

$$|z(t)| \leq \bar{k}_6 [|z(t_N)| + a(N)] e^{-\lambda_1 t} + \bar{k}_7 \|\bar{\beta}_{t,t_N}\| \quad \text{and} \quad |\bar{\beta}(t)| \leq \tau k_3^R \|z_{t,t_N}\| + \mathcal{O}(\tau), \quad (7.31)$$

onde $0 < \lambda_1 \leq \min(a_m, \lambda_c)$. Então, aplicando o teorema de pequenos ganhos (Jiang et al. 1994), tem-se que $|z(t)| \rightarrow \mathcal{O}(\tau)$ exponencialmente, quando $t \rightarrow +\infty$.

O chaveamento do sinal de controle pára com o sinal correto: Uma vez que $|z(t)|$ converge para um conjunto residual de ordem $\mathcal{O}(\tau)$, o chaveamento do GRED selecionará por fim o diferenciador exato, resultando em uma estimativa exata de σ , i.e., $\hat{\sigma} = \sigma$. Agora, suponha que o chaveamento do sinal de controle pare com sinal errado. Então, a equação para σ pode ser escrita como

$$\dot{\sigma} = \gamma\sigma + |k_p| [\varrho(t) \text{sgn}(\sigma) - u^\dagger] + \pi,$$

onde $\gamma > 0$ e $u^\dagger = \theta^\dagger \omega$. Neste caso, devido a (7.2), existe $t_d < +\infty$ tal que $|\pi| < \delta$ e, conseqüentemente, $\sigma \dot{\sigma} > 0$, $\forall t \geq t_d$. Portanto, σ tem que divergir quando $t \rightarrow \infty$, para toda condição inicial, ou seja, σ não pode permanecer no conjunto residual. Logo, conclui-se que $\text{sgn}(k_p)$ deve estar corretamente estimado em $k = N$.

Rastreamento exato: A variável de deslizamento $\hat{\sigma} = \sigma$ e a direção de controle são estimados exatamente. Então, do (Hsu et al. 1997, Lema 1), o modo deslizante ideal $\sigma \equiv 0$ é alcançado em tempo finito. Conseqüentemente, o estado completo do erro z , assim como o erro de rastreamento e , convergem exponencialmente para zero. ■

Capítulo 8

Conclusões e Trabalhos Futuros

Esta Tese fornece, essencialmente, demonstrações de existência de controladores via realimentação de saída baseados em modos deslizantes para rastreamento de trajetória de sistemas não-lineares incertos. Foram propostas três soluções baseadas em modelo de referência. A classe de sistemas abordada contempla plantas não-lineares com grau relativo arbitrário, onde as não-linearidades são encaradas como perturbações de um subsistema linear e incerto, podendo ser dependentes do estado e possivelmente des-casadas com o sinal de controle. Nenhuma restrição particular é imposta quanto ao crescimento das não-linearidades dependentes da saída, no entanto, termos dependentes do estado não-medido podem crescer no máximo linearmente.

As hipóteses consideradas sobre a planta são satisfeitas pela conhecida classe de sistemas triangulares. Entretanto, buscou-se caracterizar sistemas mais gerais que pudessem ser incluídos nas abordagens propostas.

O primeiro controlador proposto (Capítulo 4), denominado UV-MRAC (*unit vector model-reference adaptive control*) pois emprega o controle vetorial unitário (UVC), é uma generalização de (Cunha 2004, Capítulo 7) (ver também (Hsu et al. 2003)) para plantas não-lineares multivariáveis com grau relativo arbitrário. A principal característica que deixa o UV-MRAC em evidência em relação a outros esquemas baseados em modos deslizantes é a estratégia utilizada para evitar o indesejável fenômeno de pico (*peaking*). Não é necessário que, *a priori*, o sinal de controle seja limitado globalmente, como em (Oh & Khalil 1997). Verificou-se que o UV-MRAC assegura, em geral, estabilidade exponencial SEMI-global com respeito a um pequeno conjunto residual $\mathcal{O}(\tau)$,

onde τ é a constante de tempo dos filtros da média.

Estendendo a aplicabilidade do controlador de (Cunha et al. 2005) a sistemas não-lineares monovariáveis, rastreamento *GLOBAL* e prático foi obtido com o SMC baseado em observador de alto ganho proposto no Capítulo 6. A idéia chave para a obtenção do resultado global foi fazer o ganho do HGO variar dinamicamente. O ganho depende de um pequeno parâmetro de projeto $\bar{\mu}$. Com esta estratégia provou-se que o sistema do erro é GAS com respeito a um conjunto compacto e exponencialmente convergente para um conjunto residual da ordem de $\mathcal{O}(\bar{\mu})$.

Nesta Tese também foi desenvolvido um controlador cujo projeto descarta o prévio conhecimento da direção de controle. Plantas não-lineares monovariáveis com grau relativo arbitrário foram tratadas, generalizando a aplicação do controlador proposto em (Yan et al. 2003). O controlador proposto requer dois esquemas de chaveamento. O primeiro ajusta o sinal da lei de controle baseado em uma função de monitoração adequada construída somente com sinais de entrada e saída. O segundo é utilizado para implementar o filtro híbrido em avanço de fase denominado de GRED que fornece estimativas baseadas em alto ganho para implementar a superfície de deslizamento. O GRED conjuga filtragem linear convencional (com constante de tempo τ) e diferenciadores robustos e exatos, baseados em modos deslizantes de segunda ordem. Diferentemente das duas primeira soluções para rastreamento (prático), este esquema assegura rastreamento *exato* e semi-global com relação a um conjunto compacto.

Em todos os controladores propostos as superfícies de deslizamento são implementadas a partir de estimativas baseadas em alto ganho e a amplitude do sinal de controle é gerada por um observador da norma do estado livre do fenômeno de pico. A existência de modos deslizantes ideais, nos três esquemas, impede *chattering* no sinal de controle em condições ideais.

8.1 Trabalhos Futuros

As continuações mais imediatas deste Trabalho de Doutorado são as seguintes:

1. Obter rastreamento *global* para sistemas não-lineares *multivariáveis* da classe proposta neste trabalho. Sugere-se modificar o algoritmo do Capítulo 4 para que a superfície de deslizamento seja gerada a partir do estado estimado por um HGO

com ganho ajustado dinamicamente, conforme proposto no Capítulo 6. Para tanto os resultados do Capítulo 6 devem ser estendidos para sistemas MIMO.

2. Obter rastreamento *global* para a classe proposta neste trabalho *desconsiderando* o prévio conhecimento da direção de controle. Parece ser possível substituir o filtro linear em avanço de fase, que compõe o filtro híbrido (GRED) utilizado no Capítulo 7, pelo HGO do Capítulo 6 para obter resultados globais. Uma tentativa para resolver o caso multivariável é utilizar a formulação desenvolvida em (Oliveira, Peixoto, Nunes & Hsu 2007) para plantas MIMO com grau relativo unitário. Além disso, o esquema proposto claramente pode ser estendido para sistemas com direção de controle variante no tempo.

A generalização para sistemas multivariáveis pode ser realizada utilizando-se o conceito de fatoração SDU e LDU da matriz de ganho de alta frequência. Outros tópicos parecem interessantes para trabalhos futuros nesta linha de pesquisa:

1. **Ampliação da classe de plantas:** Uma questão que parece ainda aberta é a possibilidade ou impossibilidade de se obter controladores globais, baseados em modos deslizantes utilizando realimentação de saída para plantas com não-linearidades que não possam ser limitadas linearmente pela norma do estado não-medido. O que impede que os controladores propostos nesta Tese abordem plantas com crescimento superior ao linear é a forma como o majorante para a norma do estado da planta ($|x|$) é obtido. O crescimento linear é fundamental para se obter este majorante a partir de estimativas que não são baseadas em alto ganho, evitando portanto, pico no sinal de controle. No entanto, uma possibilidade de contornar esta restrição é utilizar estimativas do HGO para obter um majorante para $|x|$ em conjunto com o conceito de tempo de extinção de pico para evitar o fenômeno de pico.
2. **Redução do conservadorismo:** Um estudo mais detalhado a respeito da implementação das funções de modulação poderia ser realizado no sentido de reduzir o conservadorismo, o que pode demandar o consumo excessivo de energia e exceder as limitações físicas do sistema. Assim como em (Hsu et al. 2002, Seção 7.1), pode-se adicionar à lei de controle uma parcela nominal (u^{nom}) para reduzir a

amplitude das funções de modulação e os sinais $v(t)$ podem ser escolhidos menos conservadores. Existe um compromisso entre a ordem dos filtros utilizados na implementação das funções de modulação (e nos sinais $v(t)$ do Capítulo 3) e a amplitude do sinal de controle. Em geral, quanto menor a ordem maior é o conservadorismo do projeto. Além disso, tratar todas as não-linearidades como perturbação pode ser conservador, do ponto de vista da amplitude do sinal de controle. É interessante avaliar a possibilidade de utilizar as não-linearidades favoráveis ao invés de tentar rejeitá-las.

3. **Resultados experimentais:** Os esquemas de controle desenvolvidos nesta Tese são bastante robustos a incertezas paramétricas e perturbações na planta, o que é conseguido assumindo-se que não há ruído de medição. Porém, até o presente momento, não existe SMC que seja imune a ruído de medição. Isto ainda é mais crítico em esquemas via realimentação de saída baseados em diferenciadores e HGOs, como é caso dos controladores desta Tese. Por outro lado, os testes experimentais realizados com o controlador UV-MRAC (Cunha 2004) e com o esquema proposto no Capítulo 7, ver (Peixoto et al. 2006), indicam que a robustez dos algoritmos propostos com respeito a ruído é, até certo ponto, aceitável. Apesar disso, uma melhor avaliação da influência do ruído de medição, possivelmente conjugado a outras imperfeições (e.g., dinâmica não modelada), no desempenho do sistema de controle se faz necessária.

4. **Redução de *chattering*:** O SMC pode apresentar o conhecido fenômeno de *chattering* (Utkin 1992), devido a não-idealidades dos atuadores e a dinâmicas não-modeladas. Abordagens para atenuar *chattering* e gerar sinais de controle suaves variam desde as clássicas aproximações contínuas de funções de chaveamento (Utkin 1992) (método da camada de fronteira - zona linear), passando por controle por modo deslizante baseado em observador (Bondarev et al. 1985), até o controle por modos deslizantes de ordem superior (Bartolini, Ferrara & Usai 1998), (Bartolini, Levant, Pisano & Usai 2002).

A partir do trabalho (Hsu 1997), verificou-se que a malha de predição, também utilizada no UV-MRAC, é responsável por preservar a existência de modo deslizante ideal, o que garante robustez com respeito a dinâmicas não-modeladas.

Utilizando esta propriedade, em conjunto com a filtragem do sinal de controle chaveado, experimentos em um helicóptero com um grau de liberdade foram conduzidos em (Peixoto, Lizarralde & Hsu 2001, Peixoto, Lizarralde & Hsu 2002) e os resultados confirmaram a eficácia do algoritmo, então, denominado de SSC (*Smooth Sliding Controller*).

Tendo em vista o SSC, poderiam ser desenvolvidos algoritmos de controle para sistemas não-lineares, **multivariáveis** e incertos, em que o fenômeno de *chattering* é praticamente eliminado uma vez que o sinal de controle é suave.

Apêndice A

Contribuições e Trabalhos Publicados

As contribuições obtidas durante o desenvolvimento desta Tese serão apresentadas em ordem cronológica. Os trabalhos publicados encontram-se na seção seguinte.

A.1 Contribuições

O controlador UV-MRAC (Hsu et al. 2003) é uma solução para o problema de rastreamento global de uma classe de plantas não-lineares multivariáveis com a restrição de possuir grau relativo unitário. O desenvolvimento desta Tese iniciou-se neste ponto.

Capítulo 4 : Buscando contemplar plantas de *grau relativo arbitrário*, é proposta uma generalização para o controlador UV-MRAC (Hsu et al. 2003) para uma subclasse de plantas *multivariáveis* da classe I (ver Seção 1.1). Entretanto, apenas rastreamento (prático) semi-global é garantido.

Em seguida, inspirado pelo resultado de (Yan et al. 2003), iniciou-se uma tentativa de se obter uma estratégia que não necessitasse do prévio conhecimento da direção de controle. Em (Yan et al. 2003), foi proposto um mecanismo que trocava o sinal de controle (chaveando entre realimentação positiva e negativa), mediante uma função de monitoração para o erro de rastreamento.

Provou-se que este mecanismo converge para o sinal correto, i.e., realimentação negativa (positiva) para direção de controle positiva (negativa). Entretanto, apenas

plantas com grau relativo unitário foram abordadas. Substituindo o erro de rastreamento por um erro auxiliar apropriado para ser monitorado, foi possível cobrir plantas com grau relativo arbitrário.

Capítulo 7 : A segunda contribuição desta Tese é o desenvolvimento de um SMC, projetado sem o conhecimento da direção de controle, para uma subclasse de plantas não-lineares¹ *monovariáveis* da classe I. Neste caso, obtém-se apenas rastreamento semi-global, mas em contrapartida, assegura-se *rastreamento exato*.

Para atingir o objetivo mais ambicioso deste trabalho, ou seja, resolver o problema de rastreamento global, nada havia sido feito ainda. Apenas soluções semi-globais foram desenvolvidas, pela razão apresentada a seguir.

Quando um sistema possui grau relativo ρ superior a um e as derivadas temporais da saída de ordem até $\rho - 1$ estão disponíveis, o problema de rastreamento de plantas com $\rho > 1$ pode ser reduzido para o caso $\rho = 1$ realimentando-se uma saída artificial $\sigma = \sigma(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(\rho-1)})$ que possua grau relativo unitário, por exemplo: $\sigma = y + \dot{y}$ ($\rho = 2$). Entretanto, se $\rho > 1$ e as derivadas da saída não estão disponíveis, filtros em avanço ou observadores de alto ganho são frequentemente usados para obter aproximações das derivadas da saída, reduzindo o problema *aproximadamente* para o caso $\rho = 1$.

Para o caso de plantas lineares, a norma do erro cometido nesta aproximação é majorável de forma afim em relação à norma da saída, com coeficiente angular dado pelo produto da constante de Lipschitz por um pequeno parâmetro ϵ : a constante de tempo do filtro de avanço ou o pequeno parâmetro associado ao inverso do ganho do HGO. Então, utilizando o teorema dos pequenos ganhos é possível obter resultados globais.

Entretanto, no caso não-linear, a “constante” de Lipschitz em geral depende do estado. Na realidade, a norma do erro cometido pode ser majorada de forma afim em relação a uma função não-linear (positiva) da saída, com coeficiente angular dado por ϵ . Portanto, obtém-se apenas resultados semi-globais, mesmo utilizando a extensão do teorema dos pequenos ganhos para o caso não-linear (Jiang et al. 1994).

Uma forma de contornar a análise de pequenos ganhos é utilizar estratégias robustas como em (Qu et al. 1994), cuja análise segue um roteiro similar ao do *backstepping*.

¹Plantas lineares foram tratadas em (Oliveira 2006) seguindo a abordagem deste capítulo.

Neste caso, o objetivo não é mais obter aproximações das derivadas da saída. O problema de grau relativo arbitrário ρ é reduzido a ρ problemas de grau relativo unitário, e apenas majorantes para as derivadas da saída são necessários. A Figura A.1 ilustra o caso $\rho = 2$.

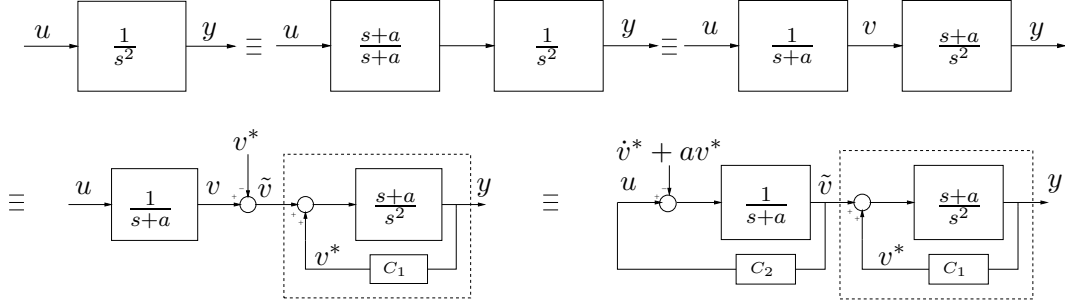


FIGURA A.1: Interpretação simplificada do *backstepping* para grau relativo ($\rho = 2$). O bloco C_1 fornece o controle virtual v^* para o subsistema de grau relativo unitário. O bloco C_2 fornece a lei de controle real u como função de $\tilde{v} := v - v^*$, onde v é um sinal filtrado de u , com $a > 0$.

Notando que a análise/projeto por *backstepping* é mais complexa, principalmente para ρ grande, e que são poucas as soluções robustas nesta linha, surgiu a seguinte questão: será possível obter resultados globais utilizando SMC e análise de pequenos ganhos? A resposta é afirmativa.

A idéia é fazer o pequeno parâmetro ϵ variar dinamicamente, como uma função dos majorantes das não-linearidades, de maneira a garantir que a norma do produto de ϵ pela “constante” de Lipschitz possa ser majorada de forma afim pela norma da saída, recaindo no problema linear. Esta é a terceira contribuição desta Tese e que parece ser o primeiro resultado global utilizando realimentação de saída e SMC para a classe I de plantas.

Capítulo 6 : Estimando as derivadas da saída por meio de um HGO com ganho variando dinamicamente, é possível obter **rastreamento global** (prático) para uma subclasse de plantas *monovariáveis* da classe I. Um SMC é projetado considerando a direção de controle conhecida.

A.2 Trabalhos Publicados

Esta seção destaca as principais publicações realizadas até este momento:

1. Uma versão preliminar do UV-MRAC para sistemas não-lineares multivariáveis de grau relativo arbitrário foi publicada no artigo em congresso (Peixoto, Cunha, Hsu, Costa & Lizarralde 2005). O capítulo de livro (Hsu, Peixoto, Cunha, Costa & Lizarralde 2006) é uma versão mais detalhada sobre o UV-MRAC para esta classe de plantas não-lineares.
2. Na linha de pesquisa que desconsidera o prévio conhecimento da direção de controle foram publicados cinco artigos. Os primeiros resultados foram publicados em congressos (Hsu, Oliveira & Peixoto 2006), (Peixoto et al. 2006), (Oliveira et al. 2006). Em (Peixoto et al. 2006) resultados experimentais foram incluídos. O artigo em periódico (Oliveira, Peixoto, Nunes & Hsu 2007) é o mais completo. O artigo em congresso (Oliveira, Peixoto & Hsu 2007) apresenta o início da generalização dos resultados de (Oliveira, Peixoto, Nunes & Hsu 2007) para sistemas multivariáveis, que não foi incluída nesta Tese.
3. O resultado mais recente desta Tese de Doutorado – rastreamento global – que utiliza um HGO com ganho ajustado dinamicamente foi publicado em congresso (Peixoto et al. 2007).

Apêndice B

Utilização da Formulação do MRC

Considere o seguinte sistema genérico:

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p [u_p + d_p] + \phi_p, \quad y_p = C_p x_p, \quad (\text{B.1})$$

onde x_p é o estado, u_p é a entrada, y_p é a saída e d_p e ϕ_p são perturbações casada e descasada, respectivamente. Considere ainda os seguintes filtros de entrada e saída:

$$\dot{\omega}_{p1} = \Phi \omega_{p1} + \Gamma u_p, \quad \dot{\omega}_{p2} = \Phi \omega_{p2} + \Gamma y_p, \quad (\text{B.2})$$

e o filtro auxiliar:

$$\dot{\bar{\omega}}_1 = \Phi \bar{\omega}_1 + \Gamma [u_p + d_p], \quad (\text{B.3})$$

onde (Φ, Γ) é controlável, $\bar{\omega}_1(t_*) = \omega_{p1}(t_*)$ e $t_* \in \mathcal{I}_0$ é um instante inicial qualquer. Seja (A_a, B_a, C_a) a representação em espaço de estado do sistema composto por (B.1), pela dinâmica de ω_{p2} em (B.2) e por (B.3), com vetor de estados $X^T := [\bar{\omega}_1^T \quad \omega_{p2}^T \quad x_p^T]$:

$$A_a = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & 0 \\ 0 & \Phi & \Gamma C_p \\ 0 & 0 & A_p \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \\ B_p \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_p \end{bmatrix}.$$

Então, seguindo a abordagem tradicional do Controle por Modelo de Referência (*Model Reference Control* - MRC) (Sastry & Bodson 1989)(Ioannou & Sun 1996), fazendo $\phi_p \equiv 0$ em (B.1), encontra-se um vetor constante $\mathcal{K}^* := [\theta_1^{*T} \quad \theta_2^{*T} \quad \theta_3^{*T} C_p]$ tal que,

após aplicar a realimentação de estados $u_p = \mathcal{K}^* X + v_p - d_p$, a função de transferência em malha fechada de v_p para y_p torna-se idêntica a $M(s)$.

Aplicando o controle acima no sistema aumentado (A_a, B_a, C_a) , com o termo ϕ_p presente, o sistema em malha fechada pode ser descrito por:

$$\dot{X} = A_M X + B_M K_p v_p + B_\phi \phi_p, \quad y_p = C_M X, \quad (\text{B.4})$$

onde $(A_M, B_M, C_M) := (A_a + B_a K^*, B_a (K_p)^{-1}, C_a)$ é uma realização não-mínima e estável de $(K_m)^{-1} M(s)$, $B_\phi := [0 \ 0 \ I]^T$ e K_p é o ganho de alta frequência de (A_p, B_p, C_p) .

Por outro lado, de acordo com as dinâmicas de $\bar{\omega}_1$ e de ω_{p1} tem-se que $\bar{\omega}_1 = \omega_{p1} + (sI - \Phi)^{-1} \Gamma * d_p$. Logo, pode-se concluir que

$$\mathcal{K}^* X = \theta_1^{*T} \bar{\omega}_1 + \theta_2^{*T} \omega_{p2} + \theta_3^{*T} y_p = \theta^{*T} \omega_p + [1 - W_d(s)] * d_p,$$

onde $\omega_p := [\omega_{p1}^T \ \omega_{p2}^T \ y_p]^T$, $\theta^{*T} := [\theta_1^{*T} \ \theta_2^{*T} \ \theta_3^{*T}]$ e $W_d(s) := 1 - \theta_1^{*T} (sI - \Phi)^{-1} \Gamma$. Logo, v_p pode ser reescrito como $v_p = u_p - \theta^{*T} \omega_p + W_d(s) * d_p$. Conseqüentemente, a dinâmica de X passa a ser dada por:

$$\dot{X} = A_M X + B_M K_p [u_p - \theta^{*T} \omega_p + W_d(s) * d_p] + B_\phi \phi_p, \quad y_p = C_M X. \quad (\text{B.5})$$

B.1 Majorante para o Estado da Planta (Prop. 2)

Note que (2.8) pode ser obtida da equação genérica (B.1) fazendo $x_p = \vartheta$, $A_p = A_\rho + B_\rho K_\vartheta$, $u_p = u$, $y_p = y$, $B_p = B_\rho K_p$, $C_p = C_\rho$, $d_p = K_p^{-1} K_\eta \eta$ e $\phi_p = T_\vartheta \phi + B_\rho K_p \phi_c$.

Portanto, em (B.5), fazendo $X^T = X_\vartheta^T := [\bar{\omega}_1^T \ \omega_2^T \ \vartheta^T]$ e $\omega_p := \omega := [\omega_1^T \ \omega_2^T \ y]^T$, onde ω_1 e ω_2 são dados em (3.27), obtém-se:

$$\dot{X}_\vartheta = A_M X_\vartheta + B_M K_p [u - \theta^{*T} \omega + W_d(s) * (K_p^{-1} K_\eta \eta)] + B_\phi (T_\vartheta \phi + B_\rho K_p \phi_c), \quad (\text{B.6})$$

$$y = C_M X_\vartheta. \quad (\text{B.7})$$

No que segue, $c_i > 0$ denotam constantes apropriadas, $\theta_2^a, \theta_2^b, \theta_2^c, \theta_3^a, \theta_3^b, \theta_3^c$ denotam vetores constantes com elementos não-negativos apropriados e Π é um termo exponen-

cialmente decrescente (genérico) que surge devido às condições iniciais de (B.6) e dos filtros BIBO estáveis utilizados na definição do sinal $v(t)$, dada na Seção 3.6.2.

Calcule um FOAF (ver Seção 3.6.1) (c_1, γ_M) , com $0 < \gamma_M < \lambda_m[A_M]$, comum para as funções de transferência

$$B_\phi^T(sI - A_M)^{-1}B_\phi, \quad B_\phi^T(sI - A_M)^{-1}B_M \quad \text{e} \quad B_\phi^T(sI - A_M)^{-1}B_M(\tau_a s + 1).$$

Agora, partindo das solução $\vartheta = B_\phi^T X_\vartheta$ de (B.6), e considerando (H3), obtém-se:

$$|\vartheta| \leq \frac{c_2}{s + \gamma_M} [|\vartheta| + |\eta|] + \theta_2^{aT} v_2 + \theta_3^{aT} v_3 + \Pi, \quad (\text{B.8})$$

com v_2 e v_3 definidos em (3.28) e (3.30), respectivamente. Analogamente, aplicando o conceito de FOAF à solução de (2.7) e levando em conta (H3), tem-se que:

$$|\eta| \leq \frac{c_3}{s + \gamma_0} [\epsilon c_4 |\eta| + \epsilon c_4 |\vartheta|] + \theta_2^{bT} v_2 + \theta_3^{bT} v_3 + \Pi, \quad (\text{B.9})$$

onde $0 < \gamma_0 < \lambda_m[A_0]$, (c_3, γ_0) é um FOAF comum para $(sI - A_0)^{-1}$ e $(sI - A_0)^{-1}B_0$. Aplicando o Lema C.4 a (B.8) ((B.9)), pode-se remover o termo ϑ (η) do lado direito de (B.8) ((B.9)), se $\epsilon < \gamma_0 / (c_3 c_4)$ e $(\gamma_M / c_2) > 1$.

Notando que $\lambda[A_M] = \lambda[A_m] \cup \lambda[\Phi]$ é sempre possível encontrar um par (c_2, γ_M) satisfazendo a última desigualdade pois $\lambda_m[A_M]$ e $\lambda_m[\Phi]$ podem ser feitos arbitrariamente grandes escolhendo-se $M(s)$ em (2.22) e Φ em (3.27), de maneira apropriada. Logo, manipulando os majorantes que resultam da aplicação do Lema C.4, obtém-se:

$$|\vartheta|, |\eta|, |x| \leq \theta_2^{cT} v_2 + \theta_3^{cT} v_3 + \Pi, \quad (\text{B.10})$$

o que prova a desigualdade (3.31). ■

B.2 Expressão Alternativa para a Perturbação d

Partindo de (2.15), pode-se obter (B.1) com $x_p = \xi$, $A_p = A_\rho + B_\rho K_\vartheta$, $u_p = u$, $y_p = y$, $B_p = B_\rho K_p$, $C_p = C_\rho$, $d_p = d_\phi + K_p^{-1} K_\eta \eta$ e $\phi_p \equiv 0$. Portanto, em (B.5), fazendo $X^T = X_\xi^T := [\bar{\omega}_1^T \quad \omega_2^T \quad \xi^T]$ e $\omega_p := \omega := [\omega_1^T \quad \omega_2^T \quad y]^T$, onde ω_1 e ω_2 são dados em

(3.27), obtém-se:

$$\dot{X}_\xi = A_M X_\xi + B_M K_p [u - \theta^{*T} \omega + W_d(s) * (d_\phi + K_p^{-1} K_\eta \eta)], \quad (\text{B.11})$$

$$y = C_M X_\xi. \quad (\text{B.12})$$

Logo, da solução de (B.11) a seguinte relação entrada/saída resulta

$$y = M(s) K^* * [u - \theta^{*T} \omega + W_d(s) * (d_\phi + K_p^{-1} K_\eta \eta)] + \pi_y,$$

onde $\pi_y := C_M e^{A_M(t-t_*)} X_\xi(t_*)$. Portanto, pode-se escrever

$$y^{(\rho)} = \bar{K}_m \xi + K_p [u - \theta^{*T} \omega + W_d(s) * (d_\phi + K_p^{-1} K_\eta \eta) + \pi], \quad (\text{B.13})$$

onde \bar{K}_m está definido na Seção 2.4 e

$$\pi = K_p^{-1} (\pi_y^{(\rho)} - \bar{K}_m [\pi_{y_1} \quad \dot{\pi}_{y_1} \quad \dots \quad \pi_{y_1}^{(\rho-1)} \quad \dots \quad \pi_{y_q} \quad \dot{\pi}_{y_q} \quad \dots \quad \pi_{y_q}^{(\rho-1)}]^T).$$

Por outro lado, com A_m definido na Seção 2.4, pode-se obter diretamente de (3.1):

$$y^{(\rho)} = \bar{K}_m \xi + K_p [u + d_\phi + K_p^{-1} K_\eta \eta + K_p^{-1} (K_\vartheta - \bar{K}_m) \xi]. \quad (\text{B.14})$$

Agora, de (B.13), (B.14) e da definição de d , dada em (3.4), pode-se concluir que d também satisfaz

$$d = -\theta^{*T} \omega - (K^*)^{-1} r + W_d(s) * (d_\phi + K_p^{-1} K_\eta \eta) + \pi. \quad (\text{B.15})$$

B.3 Majorante para a Perturbação (Prop. 3)

De acordo com a Propriedade 1, para qualquer função crescente $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, a desigualdade $\psi(a + b) \leq \psi(2a) + \psi(2b)$ é válida $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$. Portanto, utilizando a Proposição 2 e (H6), tem-se $\varphi_d(|x|, t) \leq \varphi_d(2\hat{x}, t) + \varphi_d(2\Pi, t)$. Além disso, $\varphi_d(2\Pi, t) \leq \Psi(2\Pi) + k_\psi \leq \Pi + k_\psi$, onde a última desigualdade surge do fato de que $\Psi \in \mathcal{K}_\infty$, dado em (H6), é localmente Lipschitz. Então, usando a fórmula alternativa para d dada em (B.15) e um FOAF para $W_d(s)$ (B.15), pode-se concluir que (3.33) é válida. ■

Apêndice C

Lemas Auxiliares

Os três primeiros Lemas apresentados neste apêndice são versões de um mesmo resultado adaptadas para serem aplicadas nos Capítulos 4, 6 e 7. O Lema C.1 é aplicado a sistemas MIMO (Capítulo 4) e o Lema C.2 é sua versão SISO, utilizada no Capítulo 6. O Lema C.3 é uma reformulação do Lema C.2 mais adequada para ser aplicada no Capítulo 7. O Lema C.4 é usado no Capítulo 6 e no Apêndice B.

Lema C.1 *Considere o sistema MIMO*

$$\hat{\varepsilon}(t) = \bar{M}(s) [U + d(t)] + n(t), \quad \bar{M}(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{s + \gamma_1}, \dots, \frac{1}{s + \gamma_q} \right\} K, \quad (\text{C.1})$$

onde $\varepsilon, u, d \in \mathbb{R}^q$, $U = -\varrho(t) \frac{\hat{\varepsilon}}{|\hat{\varepsilon}|}$, a função de modulação $\varrho(t)$ e $d(t)$ são LI, $\bar{M}(s) \in \mathbb{R}^{q \times q}(s)$ a matriz de ganho de alta frequência $-K \in \mathbb{R}^{q \times q}$ é Hurwitz, $\gamma_j > 0$ ($\forall j \in \{1, \dots, q\}$) e $n(t)$ é absolutamente contínuo $\forall t \in \mathcal{I}$. Se

$$(1 + \hat{c}_d) |d(t)| \leq \varrho(t) + R e^{-\lambda(t-t_i)} \quad e \quad |n(t)| \leq \beta(t) + R e^{-\lambda(t-t_i)}, \quad \forall t \in [t_i, t_M],$$

para alguma constante apropriada $\hat{c}_d \geq 0$, com $t_i \in \mathcal{I}$ arbitrário, $\beta(t) \geq 0$ sendo absolutamente contínua e $R, \lambda > 0$ sendo constantes, então $\varepsilon(t) := \hat{\varepsilon} - n(t)$ satisfaz:

$$|\varepsilon(t)| \leq c_1 |\varepsilon(t_i)| e^{-\bar{\alpha}(t-t_i)} + c_2 \left[R e^{-\bar{\alpha}_m t} + \|\beta_{t_i}\|_\infty \right], \quad (\text{C.2})$$

onde c_1, c_2 são constantes positivas e $0 < \bar{\alpha} \leq \min_i(\gamma_i)$ e $0 < \bar{\alpha}_m < \min(\bar{\alpha}, \lambda)$.

Prova: Ver (Hsu et al. 2002, Lema 2). ■

Lema C.2 *Considere a relação entrada-saída*

$$\hat{\varepsilon}(t) = \frac{\bar{k}}{(s + \bar{\alpha})}[u + d(t)] + n(t), \quad \bar{k}, \bar{\alpha} > 0, \quad (\text{C.3})$$

onde $u = -\varrho(t)\text{sgn}(\hat{\varepsilon})$, a função de modulação $\varrho(t)$ é localmente integrável no sentido de Lebesgue (LI), $d(t)$ é LI e $n(t)$ é absolutamente contínuo $\forall t \in \mathcal{I}$. Seja $t_i \in \mathcal{I}$ um instante arbitrário. Se $\varrho(t)$ e $n(t)$ satisfizerem $\forall t \in [t_i, t_M)$:

$$|d(t)| \leq \varrho(t) + Re^{-\gamma(t-t_i)} \quad e \quad |n(t)| \leq \beta(t) + Re^{-\gamma(t-t_i)},$$

com $\beta(t) \geq 0$ sendo absolutamente contínuo e $R, \gamma > 0$ constantes, então a norma de $\varepsilon(t) := \hat{\varepsilon} - n(t)$ é limitada por

$$|\varepsilon(t)| \leq |\varepsilon(t_i)|e^{-\bar{\alpha}(t-t_i)} + 2Re^{-\bar{\alpha}_m(t-t_i)} + 4\|(\beta)_{t,t_i}\|, \quad (\text{C.4})$$

$\forall t \in [t_i, t_M)$, onde $0 < \bar{\alpha}_m < \min(\bar{\alpha}, \gamma)$.

Prova: Segue a prova da versão multivariável (Lema C.1) apresentada acima. ■

Lema C.3 *Considere a relação entrada-saída*

$$\varepsilon(t) = \frac{\bar{k}}{(s + \bar{\alpha})}[u + d(t)] + \pi(t) + \beta(t), \quad \bar{\alpha} > 0, \quad \forall t \in [t_i, t_M), \quad (\text{C.5})$$

onde $t_i \in [0, t_M)$ é um instante arbitrário, $u = -[\text{sgn}(\bar{k})]\varrho(t)\text{sgn}(\varepsilon)$, $\text{sgn}(\bar{k})$ é conhecido, $\varrho(t)$ e $d(t)$ são localmente integráveis no sentido de Lebesgue (LI), $\beta(t), \pi(t), \gamma(t)$ são absolutamente contínuos $\forall t \in [0, t_M)$,

$$\gamma(t) \geq |\beta(t)| + |\pi(t)| \quad e \quad \frac{d}{dt}\gamma(t) \geq -\bar{\alpha}\gamma(t), \quad \forall t \in [t_i, t_M). \quad (\text{C.6})$$

Se a função de modulação $\varrho(t)$ satisfizer $\varrho(t) \geq |d(t)|, \forall t \in [t_i, t_M)$, então a norma dos sinais $\varepsilon(t)$ e $\bar{\varepsilon}(t) := \varepsilon(t) - \beta(t) - \pi(t)$ são limitadas por

$$|\bar{\varepsilon}(t)|, |\varepsilon(t)| \leq |\varepsilon(t_i) - \beta(t_i)|e^{-\bar{\alpha}(t-t_i)} + 2\gamma(t), \quad \forall t \in [t_i, t_M). \quad (\text{C.7})$$

Prova: Ver (Oliveira 2006) e (Hsu et al. 1997, Lemma 2). ■

Lema C.4 *Sejam $r(t), s_1(t), s_2(t)$ sinais escalares não-negativos tais que*

$$r(t) \leq \frac{c}{s + \gamma} * [\epsilon r(t) + s_1(t)] + s_2(t), \quad \forall t \in \mathcal{I},$$

onde c, γ e ϵ constantes positivas. Se $\epsilon < \gamma/c$, então

$$r(t) \leq \frac{c}{s + \bar{\gamma}} * [s_1(t) + \epsilon s_2(t)] + s_2(t), \quad 0 < \bar{\gamma} < \gamma - \epsilon c. \quad (\text{C.8})$$

Prova: Seja $x(t) := \frac{c}{s + \gamma} * [\epsilon r(t) + s_1(t)]$. Então, tem-se $\dot{x} = -\gamma x + c\epsilon r + cs_1$, $x(t_0) = 0$. Notando que $r(t) \leq x(t) + s_2(t)$, então $\dot{x} \leq -(\gamma - c\epsilon)x + cs_1 + c\epsilon s_2$. Agora, definindo $z(t)$ como solução de $\dot{z} = -(\gamma - c\epsilon)z + cs_1 + c\epsilon s_2$, com $z(t_0) = x(t_0)$, então $x(t) \leq z(t)$ e $r(t) \leq z(t) + s_2(t)$ pelo Lema da Comparação (Khalil 2002). Logo (C.8) se verifica. ■

Apêndice D

Propriedades de Funções das Classes \mathcal{K} e \mathcal{KL}

As seguintes propriedades serão úteis para se obter majorantes para o projeto e para a análise dos controladores desta Tese (ver também (Sontag 1998)).

Propriedade 1 (Separabilidade de funções da classe \mathcal{K}) *Seja Ψ uma função da classe \mathcal{K} e a, b, α constantes positivas arbitrárias. Então, a seguinte desigualdade é válida:*

$$\Psi(a + b) \leq \Psi((\alpha + 1)a) + \Psi((\alpha^{-1} + 1)b).$$

Prova: Sendo Ψ uma função crescente então $\Psi(a + b) \leq \Psi(b + b/\alpha)$ para $a < b/\alpha$. Além disso, $\Psi(a + b) \leq \Psi(a + \alpha a) + \Psi(b + b/\alpha)$, pois $\Psi(a) \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}_+$. Aplicando o mesmo argumento para o caso $a \geq b/\alpha$, demonstra-se a propriedade. Note que basta Ψ ser uma função positiva e crescente. ■

Propriedade 2 (Invariância de funções filtradas da classe \mathcal{KL}) *Seja $u(t)$ um sinal cuja norma é limitada por uma função $\Pi_u(\sigma, t) \in \mathcal{KL}$, para todo σ fixo. Seja $h(t)$ a resposta impulsiva de um filtro linear BIBO estável de uma entrada e uma saída. Então, existe $\Pi_y(\sigma, t) \in \mathcal{KL}$ tal que a norma do sinal filtrado $y(t) = h(t) * u(t)$ satisfaz:*

$$|y(t)| \leq |h(t)| * \Pi_u(\sigma, t) \leq \Pi_y(\sigma, t). \quad (\text{D.1})$$

Prova: A demonstração é uma consequência imediata da utilização do conceito de FOAF apresentado na Seção 3.6.1. ■

Apêndice E

Obtenção da Dinâmica dos Zeros

Considere a planta (2.1) e a matriz de transferência $G(s) := C(sI - A)^{-1}B$ do *sub-sistema linear* (A, B, C) . Seja $G(s) := N(s)D^{-1}(s)$, onde $N(s), D(s) \in \mathbb{R}^{q \times q}[s]$ são *coprimas* pela direita e $D(s)$ é reduzida por coluna. Considere ainda que $G(s)$ seja estritamente própria e possua posto (normal) completo ($\det(N(s))$ não é identicamente nulo). Sejam n e $n_z = n - \rho q$ os graus dos determinantes de $D(s)$ e $N(s)$, respectivamente. Sem perda de generalidade considere que (A, B, C) esteja na seguinte forma controlável (ou forma do controlador):

$$A = A_c - BK, \quad A_c = \text{bloco diag} \left\{ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \circ \\ & \ddots & 1 \\ \circ & & 0 \end{array} \right], n_i \times n_i \right\}, \quad (\text{E.1})$$

$$B = B_c F, \quad B_c = \text{bloco diag} \left\{ \left[\begin{array}{cccc} 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right]^T, n_i \times 1 \right\}, \quad (\text{E.2})$$

onde $i = 1, \dots, q$, n_i é o grau da i -ésima coluna de $D(s)$, que satisfaz $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$, $K \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $F \in \mathbb{R}^{q \times q}$ (invertível) são obtidas a partir dos coeficientes de $D(s)$ e

$$C = \left[C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n \right] \in \mathbb{R}^{q \times n},$$

com $C_i \in \mathbb{R}^{q \times 1}$ formados a partir dos coeficientes de $N(s)$. Note que esta forma sempre pode ser obtida a partir da forma controlável dada em (Kailath 1980, pp.406),

aplicando-se a transformação

$$T_c = \text{bloco diag} \{T_{c_i}, n_i \times n_i, i = 1, \dots, q\},$$

onde os elementos de T_{c_i} são nulos exceto pela diagonal secundária que é formada por “1”s. De (E.1) e (E.2), e lembrando que F é invertível, pode-se verificar que a condição de grau relativo igual a ρ implica:

$$CB_c = CA_c B_c = \dots = CA_c^{\rho-2} B_c = 0 \quad \text{e} \quad K_p = CA^{\rho-1} B = CA_c^{\rho-1} B_c F. \quad (\text{E.3})$$

De (E.3) pode-se concluir que

$$CA_c^k B_c = \begin{bmatrix} C_{n_1-k} & C_{n_1+n_2-k} & \dots & C_{n_1+\dots+n_q-k} \end{bmatrix} = 0, \quad (k = 0, \dots, \rho - 2),$$

$$K_p = \begin{bmatrix} C_{n_1-(\rho-1)} & C_{n_1+n_2-(\rho-1)} & \dots & C_{n_1+\dots+n_q-(\rho-1)} \end{bmatrix} F, \quad (\text{invertível}).$$

Como K_p é invertível, nenhuma de suas colunas pode ser identicamente nula. Portanto, tem-se que $n_1, n_2, \dots, n_q \geq \rho$. Agora, considerando o estado $x = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ da planta, considere a partição $x_r \in \mathbb{R}^{q\rho \times 1}$ e $\eta \in \mathbb{R}^{(n-q\rho) \times 1}$, onde

$$x_r := \begin{bmatrix} x_{n_1-\rho+1} & \dots & x_{n_1} & x_{n_1+n_2-\rho+1} & \dots & x_{n_1+n_2} & \dots & x_{n_1+\dots+n_q-\rho+1} & \dots & x_{n_1+\dots+n_q} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{E.4})$$

e $\eta := \begin{bmatrix} \eta_1 & \dots & \eta_{n-q\rho} \end{bmatrix}^T$ são os estados restantes de x , sendo η_i a i -ésima componente de x que não pertence a x_r . A transformação $T_\eta \in \mathbb{R}^{(n-q\rho) \times n}$, tal que $\eta = T_\eta x$, pode ser facilmente obtida a partir da definição de η e de x_r . Além disso, seja $\phi_\eta := \begin{bmatrix} \phi_{\eta_1} & \dots & \phi_{\eta_{n-q\rho}} \end{bmatrix}^T := T_\eta \phi$.

De (E.1) e (E.2), pode-se verificar também que, $\forall i \in \{1, \dots, n - q\rho\}$,

$$\dot{\eta}_i = \eta_{i+1} + \phi_{\eta_i} \quad \text{ou} \quad \dot{\eta}_i = \bar{x}_{r_j} + \phi_{\eta_i},$$

para algum $j \in \{1, \dots, q\}$, onde $\bar{x}_r := \begin{bmatrix} x_{n_1-\rho+1} & x_{n_1+n_2-\rho+1} & \dots & x_{n-\rho+1} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{q \times 1}$. Portanto, pode-se escrever que $\dot{\eta} := A_\eta \eta + A_r \bar{x}_r + T_\eta \phi$, com $A_\eta \in \mathbb{R}^{(n-q\rho) \times (n-q\rho)}$ e $A_r \in \mathbb{R}^{(n-q\rho) \times q}$.

Agora, notando que $y = Cx = C_\eta\eta + (K_p F^{-1})\bar{x}_r$, tem-se,

$$\bar{x}_r = -FK_p^{-1}C_\eta\eta + FK_p^{-1}y.$$

Portanto,

$$\dot{\eta} := A_0\eta + B_0y + T_\eta\phi, \quad (\text{E.5})$$

onde $A_0 := A_\eta - A_rFK_p^{-1}C_\eta$ é Hurwitz, uma vez que (A, B, C) possui fase mínima, $B_0 := A_rFK_p^{-1}$ e o termo $T_\eta\phi$ é considerado como uma perturbação descasada exógena.

Observação 5 (Caso Geral) : *Seja $\tilde{x} := \tilde{T}x$ a mudança de coordenadas que transforma (A, B, C) para a forma canônica $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$, com (\tilde{A}, \tilde{B}) dados em (E.1)–(E.2).*

Seja

$$\tilde{T}_l := [\tilde{T}_\eta^T \quad \tilde{T}_\vartheta^T]^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (\text{E.6})$$

a transformação que leva $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ para a forma normal, onde \tilde{T}_η é obtido seguindo o procedimento desta seção e $\tilde{T}_\vartheta \in \mathbb{R}^{q\rho \times n}$ é dado por

$$\tilde{T}_\vartheta := [\tilde{C}_1^T \quad (\tilde{C}_1\tilde{A})^T \quad \dots \quad (\tilde{C}_1\tilde{A}^{\rho-1})^T \quad \dots \quad \tilde{C}_q^T \quad (\tilde{C}_q\tilde{A})^T \quad \dots \quad (\tilde{C}_q\tilde{A}^{\rho-1})^T]^T, \quad (\text{E.7})$$

sendo \tilde{C}_i as linhas de \tilde{C} . Então, as coordenadas η e ϑ , definidas na Seção 2.2.1, são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_\eta \\ \tilde{T}_\vartheta \end{bmatrix} \tilde{T}x = \begin{bmatrix} \tilde{T}_\eta\tilde{T} \\ \tilde{T}_\vartheta\tilde{T} \end{bmatrix} x.$$

Notando que $\tilde{T}_\vartheta\tilde{T} = T_\vartheta$, com T_ϑ definido em (2.6), tem-se que T_l é dado por (2.5) com $T_\eta := \tilde{T}_\eta\tilde{T}$.

Referências Bibliográficas

- Ambrosino, G., Celentano, G. & Garofalo, F. (1984), ‘Variable structure MRAC systems’, *Int. J. Contr.* **39**(6), 1339–1349.
- Arcak, M., Angeli, D. & Sontag, E. (2001), Stabilization of cascades using integral input-to-state stability, in ‘CDC’, Orlando, Florida USA, pp. 3814–3819.
- Arcak, M. & Kokotovic, P. (2001), ‘Nonlinear observers: A circle criterion design and robustness analysis’, *Automatica* (37), 1923–1930.
- Baida, S. V. (1993), ‘Unit sliding mode control in continuous- and discrete-time systems’, *Int. J. Contr.* **57**(5), 1125–1132.
- Bartolini, G., Ferrara, A. & Usai, E. (1998), ‘Chattering avoidance by second-order sliding mode control’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **43**(2), 241–245.
- Bartolini, G., Levant, A., Pisano, A. & Usai, E. (2002), Higher-order sliding modes for the output-feedback control of nonlinear uncertain systems, in X. Yu & J.-X. Xu, eds, ‘Variable Structure Systems: Towards the 21st Century’, Springer-Verlag, pp. 83–108.
- Bartolini, G. & Zolezzi, T. (1988), ‘The V.S. approach to the model reference control of nonminimal phase linear plants’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **33**(9), 859–863.
- Bondarev, A. G., Bondarev, S. A., Kostyleva, N. E. & Utkin, V. I. (1985), ‘Sliding modes in systems with asymptotic state observers’, *Autom. Remote Control* **46**(6), 679–684. Pt. 1.
- Bullinger, E. & Allgower, F. (2005), ‘Adaptive lambda tracking for nonlinear higher relative degree systems’, *Automatica* **41**, 1191–1200.
- Chen, W. & Xu, C. (2001), ‘Simple robust output-feedback controller for uncertain nonlinear systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **46**(11), 1765–1772.
- Chen, X., Tsuruoka, S., Ishida, M. & Fukuda, T. (1997), ‘A new model reference robust control for the systems with disturbances’, *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control* pp. 2660–2665.
- Cheng, D. & Lin, W. (2003), ‘On p-normal forms of nonlinear systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **48**(7), 1242–1248.
- Chien, C.-J., Sun, K.-C., Wu, A.-C. & Fu, L.-C. (1996), ‘A robust MRAC using variable structure design for multivariable plants’, *Automatica* **32**(6), 833–848.

- Chitour, Y. (2002), ‘Time-varying high-gain observers for numerical differentiation’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **47**(9), 1565–1569.
- Choi, H. L. & J.T., L. (2003), ‘Feedback linearization of time-varying nonlinear systems via time-varying diffeomorphism’, *IEE Proc. Control Theory Appl.* **150**(3), 279–284.
- Choi, H.-L. & Lim, J.-T. (2005), ‘Global exponential stabilization of a class of nonlinear systems by output feedback’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **50**(2), 255–257.
- Cunha, J. P. V. S. (2004), Controle de Sistemas Multivariáveis Incertos por Realimentação de Saída e Modo Deslizante, PhD thesis, Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. & Hsu, L. (1995), ‘Design of a high performance variable structure position control of ROV’s’, *IEEE J. Oceanic Eng.* **20**(1), 42–55.
- Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. & Hsu, L. (2003), Design of first order approximation filters applied to sliding mode control, *in* ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Maui, Hawaii, pp. 3531–3536.
- Cunha, J. P. V. S., Hsu, L., Costa, R. R. & Lizarralde, F. (2005), Sliding mode control of uncertain linear systems based on a high gain observer free of peaking, *in* ‘Preprints of the 16th IFAC World Congress’, Prague, Czech Republic.
- Desoer, C. A. & Vidyasagar, M., eds (1975), *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press, Inc.
- Diao, Y. & Passino, K. M. (2001), Adaptive control fo a class of nonlinear time-varying systems, *in* ‘Proc. American Contr. Conf.’, Arlington, pp. 4161–4166.
- Drakunov, S. (1993), Sliding mode control of the systems with uncertain direction of control vector, *in* ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, San Antonio, pp. 2477–2478.
- Drakunov, S., Özgüner, ., Dix, P. & Ashrafi, B. (1994), ABS control using optimum search via sliding modes, *in* ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Lake Buena Vista, FL, pp. 466–471.
- Drakunov, S., Özgüner, ., Dix, P. & Ashrafi, B. (1995), ‘ABS control using optimum search via sliding modes’, *IEEE Trans. Contr. Syst. Tech.* **3**(1), 79–85.
- Edwards, C. & Spurgeon, S. K. (1996), ‘Robust output tracking using a sliding-mode controller/observer scheme’, *Int. J. Contr.* **64**(5), 967–983.
- Edwards, C. & Spurgeon, S. K. (1998), *Sliding Mode Control: Theory and Applications*, Taylor & Francis Ltd.
- Emelyanov, S. V. (1970), *Theory of variable structure systems*, Nauka.
- Emelyanov, S. V., Korovin, S. K., Nersisian, A. L. & Nisenzon, Y. Y. (1992), ‘Discontinuous output feedback stabilizing an uncertain MIMO plant’, *Int. J. Contr.* **55**(1), 83–107.

- Esfandiari, F. & Khalil, H. K. (1992), ‘Output feedback stabilization of fully linearizable systems’, *Int. J. Contr.* **56**, 1007–1037.
- Filippov, A. F. (1964), ‘Differential equations with discontinuous right-hand side’, *American Math. Soc. Translations* **42**(2), 199–231.
- Filippov, A. F. (1988), *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Kluwer Academic Publishers.
- Frank, P. M., Steven, X. D. & Birgit, K. S. (2000), ‘Current developments in the theory of FDI’, *proceedings of Safe Process* pp. 16–23.
- Freeman, R. & Kokotović, P. (1993), ‘Design of ‘softer’ robust nonlinear control laws’, *Automatica* **29**, 1425–1437.
- Freeman, R. & Kokotović, P. (1996), ‘Tracking controllers for systems linear in the unmeasured states’, *Automatica* **32**, 735–746.
- Fu, M. & Barmish, B. (1986), ‘Adaptive stabilization of linear systems via switching control’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **31**(12), 1097–1103.
- G. Bartolini, A. F. & Giacomini, L. (2003), ‘A switching controller for systems with hard uncertainties’, *IEEE Trans. on Circuits and Systems.* **50**(8), 984–990.
- Gong, Q. & Qian, C. (2007), ‘Global practical tracking of a class of nonlinear systems by output feedback’, *Automatica* **43**, 184–189.
- Gutman, S. (1979), ‘Uncertain dynamical systems — a Lyapunov min-max approach’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **24**(3), 437–443.
- Gutman, S. & Leitmann, G. (1975), Stabilizing control for linear systems with bounded parameters and input uncertainty, in ‘Proc. 7th IFIP Conf. on Optimization Techniques’, Nice, France, pp. 8–14.
- Hsu, L. (1997), ‘Smooth sliding control of uncertain systems based on a prediction error’, *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control* **7**, 353–372.
- Hsu, L., Araújo, A. & Costa, R. R. (1994), ‘Analysis and design of I/O based variable structure adaptive control’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **39**(1), 4–21.
- Hsu, L. & Costa, R. R. (1989), ‘Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurement: Part I’, *Int. J. Contr.* **49**(2), 399–416.
- Hsu, L. & Costa, R. R. (1996), Adaptive control with sliding modes: theory and applications, in ‘Minicurso Proc. XI Congresso Brasileiro de Automática’, São Paulo, pp. 39–60.
- Hsu, L., Costa, R. R. & Cunha, J. P. V. S. (2003), ‘Model-reference output-feedback sliding mode controller for a class of multivariable nonlinear systems’, *Asian Journal of Control* **5**(4), 543–556.

- Hsu, L., Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. & Lizarralde, F. (2002), Multivariable output-feedback sliding mode control, *in* X. Yu & J.-X. Xu, eds, ‘Variable Structure Systems: Towards the 21st Century’, Springer-Verlag, pp. 283–313.
- Hsu, L., Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. & Lizarralde, F. (2005), Sliding mode control of uncertain linear systems based on a high gain observer free of peaking, *in* ‘Preprints of the 16-th IFAC World Congress’, Prague.
- Hsu, L., Lizarralde, F. & Araújo, A. (1997), ‘New results on output-feedback variable structure adaptive control: design and stability analysis’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **42**(3), 386–393.
- Hsu, L., Oliveira, T. R. & Peixoto, A. J. (2006), Sliding mode control of uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree and unknown control direction, *in* ‘9th International Workshop on Variable Structure Systems’, Alghero, Italy, pp. 178–183.
- Hsu, L., Peixoto, A. J., Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. & Lizarralde, F. (2006), Output feedback sliding mode control for a class of uncertain multivariable systems with unmatched nonlinear disturbances, *in* ‘Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control’, Springer-Verlag, pp. 195–225.
- Imai, A., Costa, R. & Hsu, L. (2001), Multivariable MRAC using Nussbaum gain, *in* ‘In proceedings of 2001 International symposium on adaptive and intelligent systems and control’.
- Ioannou, P. & Sun, J. (1996), *Robust Adaptive Control*, Prentice-Hall.
- Isidori, A. (1995), *Nonlinear Control Systems*, Springer.
- Isidori, A. (2000), ‘A tool for semiglobal stabilization of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems via output feedback’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **45**(10), 1817–1827.
- Itkis, U. (1976), *Control Systems of Variable Structure*, Wiley.
- Jiang, Z. P., Mareels, I., Hill, D. J. & Huang, J. (2004), ‘A unifying framework for global regulation nonlinear output feedback: from ISS to iISS’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **49**(4), 549–562.
- Jiang, Z. P., Teel, A. R. & Praly, L. (1994), ‘Small-gain theorem for ISS systems and applications’, *Mathematics of Control, Signals and Systems* (7), 95–120.
- Kailath, T. (1980), *Linear Systems*, Prentice Hall.
- Khalil, H. K. (2002), *Nonlinear Systems*, 3rd edn, Prentice Hall.
- Khalil, H. K. & Esfandiari, F. (1993), ‘Semiglobal stabilization of a class of nonlinear systems using output feedback’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **38**(9), 1412–1415.
- Khalil, H. K. & Saberi, A. (1987), ‘Adaptive stabilization of a class of nonlinear systems using high-gain feedback’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **32**(11), 1031–1035.

- Korovin, S. K. & Utkin, V. I. (1974), ‘Using sliding modes in static optimization and nonlinear programming’, *Automatica* **10**, 525–532.
- Krishnamurthy, P. & Khorrami, F. (2002), ‘Generalized adaptive output-feedback form with unknown parameters multiplying high output relative-degree states’, *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control* pp. 1503–1508.
- Krishnamurthy, P. & Khorrami, F. (2003), A dual high gain controller for the uncertain generalized output-feedback canonical form with appended dynamics driven by all states, in ‘ACC’, Denver, Colorado, pp. 4766–4771.
- Krishnamurthy, P. & Khorrami, F. (2007), ‘High-gain output-feedback control for nonlinear systems based on multiple time scaling’, *Systems & Contr. Letters* **56**, 7–15.
- Krishnamurthy, P., Khorrami, F. & Chandra, R. S. (2003), ‘Global high-gain-based observer and backstepping controller for generalized output-feedback canonical form’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **48**(12), 2277–2284.
- Krishnamurthy, P., Khorrami, F. & Jiang, Z. P. (2002), ‘Global output feedback tracking for nonlinear systems in generalized output-feedback canonical form’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **47**(5), 814–819.
- Krstić, M., Kanellakopoulos, I. & Kokotović, eds (1995), *Nonlinear and adaptive control design*, John Wiley & Sons, Inc.
- Lei, H. & Lin, W. (2005), Universal output feedback control of nonlinear systems with unknown growth rate, in ‘Preprints of the 16th IFAC World Congress’, Prague, Czech Republic.
- Lei, H. & Lin, W. (2006a), ‘A robust servomechanism problem for uncertain nonlinear systems’, *Proc. American Contr. Conf.* .
- Lei, H. & Lin, W. (2006b), ‘Universal output feedback control of nonlinear systems with unknown growth rate’, *Automatica* **42**, 1783–1789.
- Levant, A. (2003), ‘Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control’, *Int. J. Contr.* **76**(9), 924–941.
- Lu, X.-Y. & Spurgeon, S. K. (1999), ‘Output feedback stabilization of MIMO nonlinear systems via dynamic sliding mode’, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* **9**, 275–305.
- Marino, R. & Tomei, P. (1993a), ‘Global adaptive output feedback control of nonlinear systems, part I: Linear parametrization’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **38**, 17–32.
- Marino, R. & Tomei, P. (1993b), ‘Global adaptive output feedback control of nonlinear systems, part II: Nonlinear parametrization’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **38**, 33–48.
- Marino, R. & Tomei, P. (1995), *Nonlinear Control Design. Geometric, Adaptive and Robust*, 1st edn, Prentice Hall.
- Mazenc, F., Praly, L. & Dayawansa, W. (1994), ‘Global stabilization by output feedback: examples and counterexamples’, *Systems & Contr. Letters* **23**, 119–125.

- Min, L. J. & Hsu, L. (2000), Sliding controller for output feedback of uncertain nonlinear systems: global and semi-global results, *in* ‘Proc. 6th IEEE Int. Workshop on Variable Structure Sys.’, Gold Coast, Australia, pp. 169–178.
- Morse, A. S. (1982), Recent problems in parameter adaptive control, *in* ‘Colloquium on Development and Utilization of Mathematical Models in Automat. Contr.’, pp. 733–740.
- Mudgett, D. & Morse, A. (1985), ‘Adaptive stabilization of linear systems with unknown high frequency gains’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **30**, 549–554.
- Narendra, K. & Annaswamy, A. (1989), *Stable Adaptive Systems*, Prentice Hall.
- Nunes, E. (2004), Controle por modos deslizantes de ordem superior com estabilidade global, Master’s thesis, Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Nunes, E., Hsu, L. & Lizarralde, F. (2006), Output-feedback sliding mode control for global asymptotic tracking of uncertain systems using locally exact differentiators, *in* ‘Proc. American Contr. Conf.’, Minneapolis, pp. 5407–5412.
- Nussbaum, R. (1983), ‘Some results on a conjecture in parameter adaptive control’, *Systems & Contr. Letters* **3**, 243–246.
- Oh, S. & Khalil, H. K. (1995), ‘Output feedback stabilization using variable structure control’, *Int. J. Contr.* **62**(4), 831–848.
- Oh, S. & Khalil, H. K. (1997), ‘Nonlinear output-feedback tracking using high-gain observer and variable structure control’, *Automatica* **33**(10), 1845–1856.
- Oliveira, T. R. (2006), Controle por modos deslizantes de sistemas incertos com direção de controle desconhecida, Master’s thesis, Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Oliveira, T. R., Hsu, L. & Peixoto, A. J. (2006), ‘Controle por modos deslizantes de sistemas incertos com grau relativo arbitrário e direção de controle desconhecida’, *Congresso Brasileiro de Automática* pp. 1750–1755.
- Oliveira, T. R., Peixoto, A. J. & Hsu, L. (2007), Sliding mode output tracking of uncertain nonlinear systems with unknown control direction, *in* ‘Proc. American Contr. Conf.’, New York.
- Oliveira, T. R., Peixoto, A. J., Nunes, E. V. L. & Hsu, L. (2007), ‘Control of uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree and unknown control direction using sliding modes’, *Int. J. Adaptive Contr. Signal Process.* .
- Ortega, R. (1993), ‘On Morse’s new adaptive controller: Parameter convergence and transient performance’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **38**(8), 1191–1202.
- Peixoto, A. J., Cunha, J. P. V. S., Hsu, L., Costa, R. R. & Lizarralde, F. (2005), Unit vector control of uncertain multivariable nonlinear systems, *in* ‘Preprints of the 16th IFAC World Congress’, Prague, Czech Republic.

- Peixoto, A. J., Hsu, L., Costa, R. R. & Lizarralde, F. (2007), Global tracking sliding mode control for uncertain nonlinear systems based on variable high gain observer, *in* ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Acepto.
- Peixoto, A. J., Oliveira, T. R. & Hsu, L. (2006), Sliding mode control of uncertain systems with arbitrary relative degree and unknown control direction: Theory and experiments, *in* ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, San Diego, pp. 4951–4956.
- Peixoto, A., Lizarralde, F. & Hsu, L. (2001), Experimental results on smooth sliding control of uncertain systems, *in* ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Orlando, Florida USA, pp. 2430–2435.
- Peixoto, A., Lizarralde, F. & Hsu, L. (2002), Further results on smooth sliding control of uncertain systems, *in* ‘Proc. American Contr. Conf.’, Anchorage, pp. 2380–2385.
- Praly, L. (2001), Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate, *in* ‘CDC’, Orlando, Florida USA, pp. 3808–3813.
- Praly, L. & Arcak, M. (2004), ‘A relaxed condition for stability of nonlinear observer-based controllers’, *Systems & Contr. Letters* **53**, 311–320.
- Praly, L. & Jiang, Z. (2004), ‘Linear output feedback with dynamic high gain for nonlinear systems’, *Systems & Contr. Letters* **53**, 107–116.
- Qian, C. (2005), ‘Semi-global stabilization of a class of uncertain nonlinear systems by linear output feedback’, *IEEE Trans. on Circuits and Systems - II: Express Briefs*. **52**(4), 218–222.
- Qian, C. & Lin, W. (2002), ‘Output feedback control of a class of nonlinear systems a nonseparation principle paradigm’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **47**(10), 1710–1715.
- Qian, C., Schrader, C. B. & Lin, W. (2003), Global regulation of a class of uncertain nonlinear systems using time-varying output feedback, *in* ‘Proc. American Contr. Conf.’, Denver, CO, pp. 1542–1547.
- Qu, Z., Dorsey, J. & Dawson, D. (1994), ‘Model reference robust control of a class of siso systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **39**(11), 2219–2234.
- Saberi, A. & Lin, Z. (1990), Adaptive high-gain stabilization of minimum-phase nonlinear systems, *in* ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Honolulu, Hawaii, pp. 3417–3422.
- Sastry, S. & Bodson, M. (1989), *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Prentice-Hall.
- Slotine, J. J. E., Hedrick, J. K. & Misawa, E. A. (1987), ‘On sliding observers for nonlinear systems’, *ASME J. Dynamic Systems Measurement and Control* **109**, 245–252.

- Sontag, E. D. (1995), ‘On the input-to-state stability property’, *European J. of Control.* **1**, 24–36.
- Sontag, E. D. (1998), ‘Comments on integral variants of ISS’, *Systems & Contr. Letters* **34**, 93–100.
- Sontag, E. D. & Wang, Y. (1995), ‘On characterizations of the input-to-state stability property’, *Systems & Contr. Letters* **24**, 351–359.
- Sussmann, H. J. & Kokotović, P. V. (1991), ‘The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **36**(4), 424–440.
- Tao, G. & Ioannou, P. A. (1988), ‘Robust model reference adaptive control for multi-variable plants’, *Int. J. Adaptive Contr. Signal Process.* **2**, 217–248.
- Tao, G. & Ioannou, P. A. (1989), A MRAC for multivariable plants with zero residual tracking error, in ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Tampa, USA, pp. 1597–1600.
- Teel, A. & Praly, L. (1994), ‘Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback’, *Systems & Contr. Letters* **22**, 313–325.
- Teixeira, M. C. M. & Žak, S. H. (1998), ‘Analog neural nonderivative optimizers’, *IEEE Trans. on Neural Networks* **9**(4), 629–638.
- Utkin, V. I. (1978), *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*, MIR.
- Utkin, V. I. (1992), *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer-Verlag.
- Walcott, B. L. & Žak, S. (1988), ‘Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications’, *IEEE Trans. Syst. Man and Cyber.* **18**(1), 88–104.
- Weller, S. R. & Goodwin, G. C. (1994), ‘Hysteresis switching adaptive control of linear multivariable systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **39**(7), 1360–1375.
- Wolovich, W. A. & Falb, P. L. (1976), ‘Invariants and canonical forms under dynamic compensation’, *SIAM J. Contr. Optim.* **14**(6), 996–1008.
- Y. Zhang, C. W. & Soh, Y. (2000), ‘Adaptive backstepping control design for systems with unknown high-frequency gain’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **45**(12), 2350–2354.
- Yan, L., Hsu, L., Costa, R. & Lizarralde, F. (2003), Variable structure model reference adaptive control for systems with unknown high frequency gain, in ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Hawaii, pp. 3525–3530.
- Yan, L. & Xu, J. (2004a), ‘A model reference robust control with unknown high frequency gain sign’, *Proc. American Contr. Conf.* pp. 3291–3296.
- Yan, L. & Xu, J. (2004b), ‘Tracking performance improvement of a model reference robust control’, *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control* pp. 189–194.

- Young, K.-K. D. (1977), ‘Asymptotic stability of model reference systems with variable structure control’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **22**(2), 279–281.
- Yu, X. & Xu, J.-X., eds (2002), *Variable Structure Systems: Towards the 21st Century*, Springer-Verlag.
- Žak, S. H. & Hui, S. (1993), ‘Output feedback variable structure controllers and state estimators for uncertain/nonlinear dynamic systems’, *IEE Proc.-D.* **140**(1), 41–50.
- Zergeroglu, E., Dawson, D. M., de Queiroz, M. S. & Behal, A. (1999), Vision-based nonlinear tracking controllers with uncertain robot-camera parameters, *in* ‘Proc. IEEE/ASME Int. Conf. Advanced Intelligent Mechatronics’, Atlanta, USA, pp. 854–859.