



**COPPE/UFRJ**

## TRANSCÉPTORES EM BLOCO COM REDUNDÂNCIA MÍNIMA

Wallace Alves Martins

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Paulo Sergio Ramirez Diniz

Rio de Janeiro

Março de 2009

TRANSCÉPTORES EM BLOCO COM REDUNDÂNCIA MÍNIMA

Wallace Alves Martins

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

---

Prof. Paulo Sergio Ramirez Diniz, Ph.D.

---

Prof. Marcello Luiz Rodrigues de Campos, Ph.D.

---

Prof. Raimundo Sampaio Neto, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2009

Martins, Wallace Alves

Transceptores em Bloco com Redundância  
Mínima/Wallace Alves Martins. – Rio de Janeiro:  
UFRJ/COPPE, 2009.

XIII, 93 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Paulo Sergio Ramirez Diniz

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de  
Engenharia Elétrica, 2009.

Referências Bibliográficas: p. 89 – 93.

1. processamento de sinais. 2. comunicações.  
3. banco de filtros. 4. redundância mínima. 5.  
matrizes estruturadas. I. Diniz, Paulo Sergio Ramirez.  
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE,  
Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*A meus pais,  
Renê e Perpétua Martins*

# Agradecimentos

*“No matter how much you want,  
laziness won’t help a bit,  
but hard work will reward you  
with more than enough.”*

Proverbs 13.4 (Holy Bible – Contemporary English Version)

Agradeço a Deus pelo sustento em todos os momentos.

Agradeço aos meus pais, Renê e Perpétua Martins, que sempre me apoiaram em meus estudos e sempre fizeram o que estava em seus alcances para me ajudar nessa “caminhada”.

Agradeço à minha princesa, Claudia Lacerda, por me apoiar com o seu amor incondicional e por ceder uma parte do tempo que deveria ser dedicado a ela para que eu pudesse trabalhar na tese.

Durante o mestrado aprendi uma sabedoria popular que diz que os caminhos não foram feitos simplesmente para se chegar a algum lugar, mas sim, para serem trilhados. Dentro de contextos adequados, essa frase traz consigo verdades profundas. Fui agraciado por trilhar esse caminho sob a direção de pessoas muito especiais, dentre as quais destaco o meu orientador, Prof. Paulo Diniz, que, desde minha graduação, tem se esforçado (bastante) no sentido de me ajudar a ser um pesquisador. Destacam-se também os professores Luiz Wagner e Marcello Campos, os quais muito me ajudaram transmitindo seus conhecimentos em suas matérias, bem como dando-me valiosos conselhos.

Agradeço aos professores Marcello Campos e Raimundo Sampaio por participarem da minha banca.

Agradeço também aos amigos do LPS, dentre os quais destaco: Adriana Schulz, Alan Tygel, Alessandro Dutra, Amaro Lima, Ana Fernanda, André Targino, Ber-

nardo da Costa, Camila Gussen, Fabiano Castoldi, Fábio Freeland, Flávio Ávila, Guilherme Pinto, Leonardo Baltar, Leonardo Nunes, Markus Lima, Paulo César, Paulo Esquef, Rafael de Jesus, Rafael Amaro, Rodrigo Torres e Tadeu Ferreira. Aprendi muito com vocês.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) pelo suporte financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## TRANSCÉPTORES EM BLOCO COM REDUNDÂNCIA MÍNIMA

Wallace Alves Martins

Março/2009

Orientador: Paulo Sergio Ramirez Diniz

Programa: Engenharia Elétrica

Os métodos de projeto usuais aplicados a transceptores multiportadoras e monoportadora com equalização na frequência exigem, pelo menos,  $L$  elementos de redundância, onde  $L$  representa a ordem do canal. A redundância elimina a interferência entre blocos (IBI), a qual faz parte de todos transceptores em bloco, além de transformar a matriz de canal em uma matriz circulante. A decomposição espectral da matriz circulante de canal por meio da transformada discreta de Fourier (DFT) viabiliza o uso de algoritmos super-rápidos para o projeto dos equalizadores *zero-forcing* (ZF) e de mínimo erro médio quadrático (MMSE), bem como para a equalização dos sinais recebidos.

Entretanto, sabe-se muito bem que a redundância mínima para o projeto de transceptores fixos e sem memória livres de IBI é dada por  $\lceil L/2 \rceil$ . Até agora, não há soluções viáveis que utilizem redundância mínima. Esta dissertação propõe soluções práticas do tipo ZF e MMSE que utilizam DFT, transformada discreta de Hartley (DHT) e matrizes diagonais. Em particular, é mostrado que, com algumas pequenas restrições sobre o modelo de canal, os novos transceptores possuem taxa de erro de *bit* comparável às dos sistemas práticos usuais, enquanto mantêm a mesma complexidade assintótica para o processo de equalização,  $\mathcal{O}(n \log n)$ . A principal característica dos transceptores propostos é uma taxa de transmissão efetiva maior.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## BLOCK-BASED TRANSCEIVERS WITH MINIMUM REDUNDANCY

Wallace Alves Martins

March/2009

Advisor: Paulo Sergio Ramirez Diniz

Department: Electrical Engineering

The standard designs of multicarrier and single-carrier transceivers employing frequency-domain equalization require, at least,  $L$  elements of redundancy, where  $L$  stands for the channel order. The redundancy eliminates the inherent interblock interference (IBI), which is part of all block-based transceivers, and turns the channel matrix circulant. The spectral decomposition of the circulant channel matrix through the discrete Fourier transform (DFT) allows the use of superfast algorithms for both the design of zero-forcing (ZF) and minimum mean squared error equalizers, and the equalization of received signals.

However, it is well known that the minimum redundancy for IBI-free designs of fixed and memoryless transceivers is  $\lceil L/2 \rceil$ . So far, there are no effective and practical solutions using minimum redundancy. This dissertation proposes practical ZF and MMSE solutions by using DFT, discrete Hartley transform (DHT), and diagonal matrices. In particular, it is shown that, for some particular mild constraints on the channel model, the new designs have similar bit error rate performance as compared with the standard ones, while keeping the same asymptotic complexity for the equalization process,  $\mathcal{O}(n \log n)$ . The key feature of the proposed transceivers is the higher throughput.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>1 Apresentação</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Propósito do Trabalho . . . . .	3
1.3 Organização da Dissertação . . . . .	5
<b>2 Modelagem de Transceptores Através de Bancos de Filtros</b>	<b>7</b>
2.1 Processamento em Múltiplas Taxas . . . . .	9
2.2 Transceptores Multicanais . . . . .	13
2.2.1 Representação no Domínio do Tempo . . . . .	14
2.2.2 Representação Polifásica . . . . .	15
2.3 Transceptores em Bloco . . . . .	18
2.3.1 CP-OFDM . . . . .	18
2.3.2 ZP-OFDM . . . . .	20
2.3.3 CP-SC-FD . . . . .	21
2.3.4 ZP-SC-FD . . . . .	22
2.3.5 Transceptores em Bloco com Redundância Reduzida . . . . .	22
2.4 Considerações Finais . . . . .	24
<b>3 Representações de Matrizes Estruturadas</b>	<b>25</b>
3.1 Estrutura de Deslocamento . . . . .	26
3.2 Matrizes de Toeplitz, de Vandermonde, de Bézout e de Cauchy . . . . .	30
3.3 Representação de Matrizes Bezoutianas através de DFTs . . . . .	35
3.3.1 Representações de Matrizes de Cauchy de Posto Unitário . . . . .	35
3.3.2 Transformação de Matrizes de Bézout em Matrizes de Cauchy . . . . .	36

3.3.3	Representações de Bezoutianos . . . . .	38
3.4	Representação de Matrizes Bezoutianas Centro-Simétricas através de DHTs . . . . .	39
3.4.1	Representação de Matrizes de Cauchy de Posto Dois . . . . .	41
3.4.2	Transformação de Matrizes de Bézout Centro-Simétricas em Matrizes de Cauchy . . . . .	41
3.4.3	Representações de Bezoutianos Centro-Simétricos . . . . .	44
3.5	Principais Contribuições . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Projeto de Transceptores em Bloco com Redundância Mínima</b>	<b>48</b>
4.1	Solução ZF . . . . .	49
4.1.1	Sistemas Multiportadoras Baseados em DFT . . . . .	49
4.1.2	Sistemas Monoportadora Baseados em DFT . . . . .	53
4.1.3	Sistemas Multiportadoras Baseados em DHTs . . . . .	54
4.1.4	Sistemas Monoportadora Baseados em DHTs . . . . .	56
4.2	Solução MMSE . . . . .	57
4.2.1	Sistemas Multiportadoras Baseados em DFT . . . . .	57
4.2.2	Sistemas Monoportadora Baseados em DFT . . . . .	61
4.2.3	Sistemas Multiportadoras Baseados em DHTs . . . . .	61
4.2.4	Sistemas Monoportadora Baseados em DHTs . . . . .	62
4.3	Principais Contribuições . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Simulações de Sistemas Transceptores</b>	<b>64</b>
5.1	Transmissão em Canais de Rayleigh Aleatórios . . . . .	64
5.1.1	Sistemas Baseados em DFT . . . . .	66
5.1.2	Sistemas Baseados em DHTs . . . . .	68
5.2	Transmissão em Canal ADSL . . . . .	69
5.2.1	Sistemas Baseados em DFT . . . . .	70
5.2.2	Sistemas Baseados em DHTs . . . . .	73
5.3	Considerações Finais . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>85</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>89</b>

# Lista de Figuras

2.1	O bloco interpolador ( $N = 2$ ). . . . .	10
2.2	O bloco decimador ( $N = 2$ ). . . . .	10
2.3	Operações gerais de interpolação e decimação no domínio do tempo. . . . .	11
2.4	Identities nobres no domínio $\mathcal{Z}$ . . . . .	11
2.5	Bancos de filtros de análise e de síntese no domínio do tempo. . . . .	12
2.6	Transceptor multicanal no domínio do tempo. . . . .	13
2.7	Representação polifásica do transceptor multicanal. . . . .	16
2.8	Representação polifásica modificada do transceptor multicanal. . . . .	16
2.9	Transceptor multicanal no domínio da frequência (representação polifásica). . . . .	17
4.1	Solução ZF utilizando DFT de um transceptor multiportadoras com redundância mínima: DFT-ZF-MC-MRBT. . . . .	51
4.2	Solução ZF utilizando DFT de um transceptor monoportadora com redundância mínima: DFT-ZF-SC-MRBT. . . . .	53
4.3	Solução ZF utilizando DHTs de um transceptor multiportadoras com redundância mínima: DHT-ZF-MC-MRBT. . . . .	55
4.4	Solução ZF utilizando DHTs de um transceptor monoportadora com redundância mínima: DHT-ZF-SC-MRBT. . . . .	56
4.5	Solução MMSE utilizando DFT de um transceptor multiportadoras com redundância mínima: DFT-MMSE-MC-MRBT. . . . .	60
5.1	BER <i>versus</i> SNR para canais de Rayleigh aleatórios (transceptores baseados em DFT). . . . .	66
5.2	<i>Throughput versus</i> SNR para canais de Rayleigh aleatórios (transceptores baseados em DFT). . . . .	67

5.3	BER <i>versus</i> SNR para canais de Rayleigh aleatórios com restrição (transceptores baseados em DFT). . . . .	69
5.4	<i>Throughput versus</i> SNR para canais de Rayleigh aleatórios com restrição (transceptores baseados em DFT). . . . .	70
5.5	BER <i>versus</i> SNR para canais simétricos de Rayleigh aleatórios (transceptores baseados em DHTs). . . . .	71
5.6	<i>Throughput versus</i> SNR para canais simétricos de Rayleigh aleatórios (transceptores baseados em DHTs). . . . .	72
5.7	BER <i>versus</i> SNR para canais simétricos de Rayleigh aleatórios com restrição (transceptores baseados em DHTs). . . . .	73
5.8	<i>Throughput versus</i> SNR para canais simétricos de Rayleigh aleatórios com restrição (transceptores baseados em DHTs). . . . .	74
5.9	Magnitude da resposta em frequência dos canais original, assimétrico e simétrico, respectivamente. . . . .	75
5.10	BER <i>versus</i> SNR para um canal ADSL com pré-filtragem (transceptores baseados em DFT). O OFDM e o SC-FD utilizam um canal equivalente de comprimento 47 e os sistemas propostos utilizam um canal equivalente simétrico de comprimento 93. . . . .	76
5.11	<i>Throughput versus</i> SNR para um canal ADSL com pré-filtragem (transceptores baseados em DFT). O OFDM e o SC-FD utilizam um canal equivalente de comprimento 47 e os sistemas propostos utilizam um canal equivalente simétrico de comprimento 93. . . . .	77
5.12	Magnitude da resposta em frequência dos canais original, assimétrico e simétrico com encurtamento, respectivamente. . . . .	78
5.13	BER <i>versus</i> SNR para um canal ADSL com pré-filtragem (transceptores baseados em DFT). O OFDM e o SC-FD utilizam um canal equivalente de comprimento 47 e os sistemas propostos utilizam um canal equivalente simétrico de comprimento 47. . . . .	79
5.14	<i>Throughput versus</i> SNR para um canal ADSL com pré-filtragem (transceptores baseados em DFT). O OFDM e o SC-FD utilizam um canal equivalente de comprimento 47 e os sistemas propostos utilizam um canal equivalente simétrico de comprimento 47. . . . .	80

5.15	BER <i>versus</i> SNR para um canal ADSL com pré-filtragem (transceptores baseados em DHTs). O OFDM e o SC-FD utilizam um canal equivalente de comprimento 47 e os sistemas propostos utilizam um canal equivalente simétrico de comprimento 93. . . . .	81
5.16	<i>Throughput versus</i> SNR para um canal ADSL com pré-filtragem (transceptores baseados em DHTs). O OFDM e o SC-FD utilizam um canal equivalente de comprimento 47 e os sistemas propostos utilizam um canal equivalente simétrico de comprimento 93. . . . .	82
5.17	BER <i>versus</i> SNR para um canal ADSL com pré-filtragem (transceptores baseados em DHTs). O OFDM e o SC-FD utilizam um canal equivalente de comprimento 47 e os sistemas propostos utilizam um canal equivalente simétrico de comprimento 47. . . . .	83
5.18	<i>Throughput versus</i> SNR para um canal ADSL com pré-filtragem (transceptores baseados em DHTs). O OFDM e o SC-FD utilizam um canal equivalente de comprimento 47 e os sistemas propostos utilizam um canal equivalente simétrico de comprimento 47. . . . .	84

# Capítulo 1

## Apresentação

### 1.1 Introdução

A evolução dos sistemas modernos de comunicação resume-se, grosso modo, à busca de implementações de técnicas que possibilitem uma eficiência espectral melhor, traduzindo-se, por sua vez, em taxas de transmissão de dados cada vez mais altas. Além disso, busca-se uma capacidade maior para tais sistemas, ou seja, que cada vez mais usuários possam utilizá-los. Tais características estão sujeitas a questões de viabilidade financeira, o que implica que tais sistemas devem valer-se de soluções economicamente viáveis para a atualidade.

Dentro dessa perspectiva geral, os sistemas OFDM (do inglês *Orthogonal Frequency-Division Multiplex*) e SC-FD (do inglês *Single-Carrier Frequency-Domain equalization*) têm se destacado como aqueles que atendem a uma relação de compromisso satisfatória dos itens expostos acima. Uma prova disso é a adoção do OFDM<sup>1</sup> nos sistemas de redes locais sem fio (WLAN, do inglês *Wireless Local Area Network*) especificados pela família IEEE 802.11x, nos sistemas de redes metropolitanas sem fio (WMAN, do inglês *Wireless Metropolitan Area Network*) IEEE 802.16x, na conexão direta (em inglês, *downlink connection*) do 3G-LTE, na maioria dos padrões de televisão digital, particularmente no padrão brasileiro, nas conexões de Internet com fio xDSL (do inglês *Digital Subscriber Line*), etc. Além disso, o SC-FD<sup>2</sup> é

---

<sup>1</sup>Na verdade, empregam-se técnicas modificadas, tais como OFDMA (do inglês *Orthogonal Frequency-Division Multiple Access*) e o DMT (do inglês *Discrete Multi-Tone*).

<sup>2</sup>Neste caso, emprega-se o SC-FDMA (do inglês *Single-Carrier Frequency-Division Multiple Access*).

adotado na conexão reversa (em inglês, *uplink connection*) do 3G-LTE.

As técnicas OFDM e SC-FD são consideradas técnicas de camada física. Sabe-se que o papel da camada física juntamente com a camada de enlace (em inglês, *link layer*) no desenvolvimento de novos sistemas é de extrema importância, pois tais camadas são consideradas, informalmente, como sendo o “gargalo” de tais sistemas. Com efeito, os parâmetros que medem a qualidade de novos sistemas, tais como eficiência espectral, taxas de transmissão de dados, capacidade etc., possuem uma forte dependência com características específicas das técnicas de transmissão empregadas em tais camadas. Nesse contexto, um dos parâmetros de grande importância para essas técnicas é a taxa de transmissão efetiva de dados (em inglês, *throughput*). Este parâmetro influi diretamente na eficiência espectral do sistema.

Por outro lado, é comum que se utilize redundância na transmissão com o intuito de diminuir o efeito das interferências e distorções sofridas pelo sinal durante a transmissão. De fato, isso ocorre nas técnicas OFDM e SC-FD, por exemplo, em que, a cada bloco de dados transmitido, introduz-se uma quantidade de redundância (dados que não contêm informação adicional), reduzindo, assim, a taxa de transmissão de dados que realmente contêm informação. No caso de um modelo de canal com memória  $L \in \mathbb{N}$ , essa redundância no OFDM e no SC-FD deve ser de, pelo menos,  $L$  elementos [1], [2], [3], [4]. Isso é um fator que contribui sensivelmente para a degradação da eficiência espectral do sistema, especialmente naqueles cujo modelo de canal possui uma memória elevada.

O papel da redundância em sistemas transceptores multicanais (em inglês, *transmultiplexers* ou *TMUXs*) já foi exaustivamente estudado [2], [5], [6], [7]. Os transceptores multicanais são partes constituintes fundamentais de sistemas monoportadora e multiportadoras genéricos. Além disso, os transceptores fixos e sem memória (ou em bloco<sup>3</sup>) são de grande apelo prático. De fato, destacam-se como casos particulares importantes os sistemas OFDM e SC-FD, os quais são considerados as implementações mais simples e difundidas de transceptores multicanais fixos e sem memória. Além do OFDM e SC-FD, outros transceptores em bloco que também utilizam redundância já foram propostos [2], [6], [8], [9].

---

<sup>3</sup>Neste trabalho, não haverá distinção entre os termos “em bloco” e “sem memória”, seguindo a mesma nomenclatura de [6]. Porém, outros autores admitem transceptores em bloco com memória.

Em se tratando de redundância de transceptores multicanais fixos e sem memória, foi mostrado em [9], [10], [6] que, de forma geral, a redundância mínima para que se obtenha reconstrução perfeita do sinal transmitido é  $\lceil L/2 \rceil$ . Porém, não houve propostas que empreguem redundância mínima, mantendo, simultaneamente, um apelo prático traduzido em restrições sobre a complexidade dos algoritmos utilizados. As tentativas nessa direção foram estudadas em [11] e [12]. Entretanto, o primeiro assume hipóteses fortes sobre o modelo de canal, o que restringe a sua aplicação para somente alguns casos específicos, enquanto que o segundo, embora um pouco mais genérico, possui um elevado custo computacional devido aos cálculos de decomposição em valores singulares (SVD, do inglês *Singular-Value Decomposition*) das matrizes envolvidas na descrição matemática do sistema.

## 1.2 Propósito do Trabalho

O objetivo desta dissertação é descrever soluções para transceptores multicanais com redundância mínima que possuam apelo prático. Sendo assim, serão propostos oito tipos diferentes de sistemas fixos, sem memória e com a mesma complexidade computacional assintótica de equalização do OFDM e do SC-FD.

Os novos transceptores podem ser multiportadoras ou monoportadora e são frutos de projetos frequentemente utilizados nas aplicações práticas, a saber: ZF (do inglês *Zero-Forcing*) e MMSE (do inglês *Minimum Mean Squared Error*).

Quando comparados aos sistemas OFDM e SC-FD tradicionais, os transceptores propostos possuem as seguintes características:

- Complexidade computacional comparável para o processo de equalização;
- Taxa de erro de *bits* (BER, do inglês *Bit Error Rate*) similar;
- *Throughput* substancialmente maior para canais com resposta ao impulso longa.

Com o intuito de alcançar tais objetivos, esta dissertação descreve em detalhes várias propriedades de matrizes estruturadas [13], [14], as quais serão necessárias para o projeto de transceptores super-rápidos que empregam redundância mínima. Um transceptor super-rápido é aquele que emprega algoritmos super-rápidos (em



inglês, *superfast algorithms*) em sua implementação, isto é, algoritmos que requerem  $\mathcal{O}(n \log^d n)$  operações aritméticas, em que  $d \leq 3$  [15].

Grande parte dos resultados sobre matrizes estruturadas desta dissertação foi motivada pelos trabalhos de G. Heinig e K. Rost [16], [17], [18], [19]. Contudo, não foi possível aplicar diretamente os resultados obtidos por tais autores a respeito das representações de matrizes estruturadas, particularmente matrizes de Toeplitz e inversa de Toeplitz, quando o objetivo era projetar sistemas multiportadoras. Essa impossibilidade deve-se ao fato de os autores utilizarem uma abordagem em que as matrizes de interesse são sempre estendidas com zeros para formar uma matriz quadrada de dimensão maior.

Apenas para dar um exemplo concreto dessa impossibilidade, mas sem entrar em detalhes técnicos que serão vistos mais adiante, considere a seguinte decomposição da inversa de uma matriz de Toeplitz  $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  utilizando somente a matriz  $\mathbf{W}_{M+1} \in \mathbb{C}^{(M+1) \times (M+1)}$  da transformada discreta de Fourier (DFT, do inglês *Discrete Fourier Transform*) e matrizes diagonais [16]:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{\mathbf{P}}{2} \mathbf{W}_{M+1}^H \left[ \sum_{r=1}^2 \mathbf{D}_{\mathbf{p}_r} \mathbf{W}_{M+1} \left( \text{diag}\{e^{j\frac{\pi}{M+1}m}\}_{m=0}^M \right) \mathbf{W}_{M+1} \mathbf{D}_{\mathbf{q}_r} \right] \times \mathbf{W}_{M+1}^H \text{diag}\{e^{-j\frac{\pi}{M+1}m}\}_{m=0}^M \mathbf{P}^T, \quad (1.1)$$

em que  $\mathbf{P} = [\mathbf{0}_{M \times 1} \quad \mathbf{I}_M]$ ,  $\mathbf{p}_r, \mathbf{q}_r \in \mathbb{C}^{(M+1) \times 1}$  e  $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\nu}} = \text{diag}\{\boldsymbol{\nu}\}$ , para  $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{C}^{(M+1) \times 1}$ . Será visto no Capítulo 2 que a matriz de canal do transceptor com redundância mínima adotado nesta dissertação é sempre uma matriz de Toeplitz quadrada. Assim sendo, no caso de uma solução ZF multiportadoras, por exemplo, e considerando que a matriz  $\mathbf{T}$  seja a matriz resultante de canal após a inserção e a remoção da redundância, então não será possível deslocar uma matriz de IDFT (do inglês *Inverse DFT*) da decomposição de  $\mathbf{T}^{-1}$  para o transmissor, buscando-se algo similar ao que é feito no OFDM. Essa impossibilidade deve-se à presença da matriz  $\mathbf{P}$  que exprime a diferença entre as dimensões da matriz representada e das matrizes utilizadas na decomposição. Note, porém, que seria possível utilizar essa decomposição para a implementação de um sistema ZF monoportadora.

Com o intuito de superar essa dificuldade, foram propostas modificações nos resultados matemáticos dos artigos de Heinig e Rost [16], [17]. Tais modificações têm como base os conceitos de operadores de deslocamento (em inglês, *displacement ope-*

rators) de Sylvester e de Stein [13], os quais são revistos e utilizados nesta dissertação para explorar propriedades estruturais de matrizes que tipicamente aparecem em representações matriciais de canais de comunicação, tais como, matrizes de Toeplitz, de Vandermonde, de Bézout e de Cauchy [13]. É possível deduzir representações baseadas em matrizes de DFT, de DHT (do inglês, *Discrete Hartley Transform*) e matrizes diagonais utilizando adequadamente propriedades dos operadores de deslocamento. Tais representações são extremamente importantes para a obtenção de soluções de transceptores com redundância mínima nos casos monoportadora e multiportadoras.

Várias propriedades das matrizes estruturadas são apresentadas no presente trabalho, em que aquelas que podem ser obtidas diretamente da literatura são descritas sem sua demonstração matemática, enquanto que aquelas que precisaram ser adaptadas ou modificadas sensivelmente são apresentadas juntamente com suas respectivas demonstrações matemáticas.

### 1.3 Organização da Dissertação

A presente dissertação está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2, os principais conceitos relacionados à modelagem de transceptores por meio de banco de filtros são revistos. Para tanto, é feita uma descrição sucinta sobre sistemas com múltiplas taxas de amostragem e bancos de filtros genéricos. Logo após, os transceptores multicanais ou TMUXs são modelados matematicamente através de descrições no domínio do tempo e por meio de componentes polifásicas. O capítulo é finalizado com uma descrição dos transceptores multicanais sem memória, destacando-se os casos particulares dos sistemas OFDM e SC-FD, além dos transceptores em bloco com redundância reduzida.

No Capítulo 3, todos os resultados matemáticos utilizados neste trabalho concernentes a representações de matrizes estruturadas são apresentados. Para isso, a teoria sobre estruturas de deslocamento é estudada com o intuito de aplicar seus resultados a matrizes de Toeplitz, de Vandermonde, de Bézout e de Cauchy. Em particular, são deduzidas as contribuições do trabalho com relação à representação de matrizes bezoutianas através de DFTs e através de DHTs.

No Capítulo 4, o projeto de transceptores multicanais sem memória é descrito tomando-se como base os resultados sobre matrizes estruturadas do Capítulo 3. Primeiramente, são dadas quatro possíveis soluções *zero-forcing* de transceptores, sendo duas monoportadora e duas multiportadoras. Logo após, aplica-se a teoria de operadores de deslocamento para deduzir quatro possíveis soluções MMSE.

O Capítulo 5 contém os resultados das simulações dos sistemas propostos e dos sistemas OFDM e SC-FD usuais para fins de comparação. Os experimentos são conduzidos para dois tipos de transmissão: transmissão em canais Rayleigh aleatórios e transmissão em um canal ADSL específico.

As conclusões do trabalho, bem como as propostas para trabalhos futuros são descritas no Capítulo 6.

*Observação 1* (Notação). Nesta dissertação, vetores e matrizes são denotados por símbolos em negrito minúsculo e maiúsculo, respectivamente. Todos os vetores são vetores coluna. Os símbolos  $[\cdot]^*$ ,  $[\cdot]^T$ ,  $[\cdot]^H$  e  $\mathbf{E}[\cdot]$  denotam os operadores complexo conjugado, transposto, hermitiano e valor esperado aplicados a  $[\cdot]$ , respectivamente. Dados os conjuntos  $X$  e  $Y$ , tem-se que  $X^2 = X \times X$  e  $X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$ . Os conjuntos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  denotam os conjuntos dos números naturais, inteiros, reais e complexos, respectivamente. Por simplicidade de notação, define-se  $\log(\cdot) = \log_2(\cdot)$ . A quantidade de operações aritméticas fundamentais (adições e multiplicações) de um algoritmo será representada através de sua complexidade assintótica  $\mathcal{O}(\cdot)$ . A função  $\mathcal{O}(\cdot)$  define o comportamento de uma função de uma variável quando o seu argumento tende a infinito. Assim, dada a função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , um algoritmo realizará  $\mathcal{O}(f(n))$  operações aritméticas quando existirem constantes  $n_0 \in \mathbb{N}$  e  $c \in \mathbb{R}$  tais que a quantidade total de operações aritméticas é sempre menor ou igual a  $c|f(n)|$ , sempre que  $n \geq n_0$ .

## Capítulo 2

# Modelagem de Transceptores Através de Bancos de Filtros

Juntamente com as técnicas modernas de codificações de fonte e de canal, além dos avanços na área de projeto de circuitos integrados, o processamento digital de sinais aplicado às telecomunicações tem viabilizado o desenvolvimento de novos sistemas que atendam às crescentes demandas por taxas de transmissão cada vez maiores. Nesse contexto, operações típicas de filtragem digital possuem um papel fundamental para processar os sinais de um ou vários usuários para que compartilhem o meio físico em questão e sejam recuperados de forma confiável no receptor.

Os filtros digitais que compõem os sistemas de comunicações podem ser fixos ou adaptativos, lineares ou não<sup>1</sup>, com resposta ao impulso de duração finita (FIR, do inglês *Finite Impulse Response*) ou infinita (IIR, do inglês *Infinite Impulse Response*), etc [21], [20]. Dentre essas categorias, os filtros fixos, lineares, FIR são os que possuem o maior apelo prático por admitirem uma implementação simples, sempre estável, e com um baixo custo computacional para a filtragem quando comparados às demais opções.

Porém, em várias ocasiões, os sistemas modernos de processamento de sinais exigem mais do que tais filtros (fixos, lineares, FIR) podem oferecer. Uma forma de disponibilizar mais graus de liberdade para o projetista de processamento de sinais é utilizar sistemas que trabalhem em múltiplas taxas, pois, internamente, tais sistemas comportam-se como sistemas periodicamente variantes no tempo devido à

---

<sup>1</sup>Estritamente falando, todo filtro adaptativo é não-linear [20].

presença da operação de diminuição da taxa de amostragem.

Por isso, os sistemas que utilizam bancos de filtros têm se alastrado em várias áreas do conhecimento, especialmente em sistemas de codificação de fonte [22], [21]. Em comunicações, utilizam-se sistemas que podem ser vistos como duais dos bancos de filtros: os transceptores multicanais ou TMUXs [23], [24], [25], [4], [2], [26]. Vários sistemas práticos podem ser modelados através da utilização de TMUXs.

Na prática, os transceptores multicanais mais comuns são os que empregam filtros de comprimentos curtos quando comparados aos fatores empregados nas mudanças de taxa de amostragem. Tais transceptores são genericamente chamados de transceptores em bloco ou sem memória [6]. Os sistemas modernos mais comuns que podem ser modelados por transceptores em bloco são os sistemas OFDM e SC-FD [4], [2], [25], [27].

A principal vantagem do sistema OFDM reside em sua capacidade de eliminar a interferência entre símbolos (ISI, do inglês *InterSymbol Interference*) mantendo uma complexidade computacional relativamente baixa. Recentemente, o sistema SC-FD tem emergido como uma solução alternativa ao OFDM que é capaz de diminuir algumas de suas desvantagens, tais como altos picos de potência (PAPR, do inglês *Peak-to-Average Power Ratio*) e alta sensibilidade a deslocamentos de frequência das portadoras (CFO, do inglês *Carrier-Frequency Offset*) [3], [1]. Além disso, para alguns tipos de canais seletivos em frequência, a BER de um sistema SC-FD pode ser menor do que a BER de um sistema OFDM, especialmente se alguns subcanais possuírem alta atenuação [1]. A BER maior do OFDM se origina do fato de que a informação que é transmitida por um dado subcanal está espalhada no domínio do tempo, mas concentrada no domínio da frequência. Se a qualidade do canal for pobre naquela faixa de frequência em particular, então a informação será perdida.

No presente capítulo, são revistos brevemente os principais resultados da literatura a respeito de processamento em múltiplas taxas que possuem aplicação neste trabalho (Seção 2.1). Os transceptores multicanais são brevemente estudados na Seção 2.2. O caso particular de transceptores multicanais em bloco é modelado na Seção 2.3, destacando-se os sistemas OFDM e SC-FD, além da exposição de alguns resultados conhecidos sobre transceptores em bloco que empregam redundância reduzida.

## 2.1 Processamento em Múltiplas Taxas

São várias as aplicações em processamento digital de sinais nas quais é extremamente comum coexistirem sinais e/ou filtros cuja taxas de amostragem sejam diferentes [21], [22].

Basicamente, um sistema de processamento em múltiplas taxas opera utilizando dois blocos fundamentais: o **interpolador** e o **decimador**. O processo de interpolação consiste no aumento da taxa de amostragem de um dado sinal, enquanto que o processo de decimação consiste na diminuição da taxa de amostragem. Apenas com tais definições, é possível perceber que o processo de decimação deve ser realizado com mais cuidado para que se evite perdas de informação originadas do efeito de sobreposição de espectros mais conhecido pelo termo em inglês, *aliasing* [21], [22].

A interpolação por um fator  $N \in \mathbb{N}$  consiste na inserção de  $N - 1$  zeros entre cada duas amostras do sinal original, gerando, assim, um novo sinal cuja taxa de amostragem é  $N$  vezes maior do que a anterior. Em termos matemáticos, dado um sinal  $s(n) \in \mathbb{C}$ , onde  $n \in \mathbb{Z}$ , então o sinal interpolado  $s_{\text{int}}(k)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , é dado por  $s_{\text{int}}(k) = s(n)$ , sempre que  $k = nN$  e  $s_{\text{int}}(k) = 0$ , em caso contrário. É possível mostrar que o efeito no domínio da frequência da operação de interpolação é descrito por [21], [22]:

$$S_{\text{int}}(e^{j\omega}) = S(e^{j\omega N}), \quad (2.1)$$

em que  $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x(n)\}$  é a transformada de Fourier de tempo discreto de uma sequência<sup>2</sup>  $x(n)$ . Com base na definição de interpolação, não é difícil verificar que ela é invariante no tempo [21], [22].

Por outro lado, a decimação por um fator  $N$  consiste no descarte de  $N - 1$  amostras a cada bloco de  $N$  amostras do sinal original, gerando, assim, um novo sinal cuja taxa de amostragem é  $N$  vezes menor do que a anterior. Matematicamente, dado  $s(n)$ , então o sinal decimado  $s_{\text{dec}}(k)$  é definido por  $s_{\text{dec}}(k) = s(n)$ , sempre que  $n = kN$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . É possível mostrar que o efeito no domínio da frequência da operação de decimação é descrito por [21], [22]:

$$S_{\text{dec}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{N}} S\left(e^{j\frac{\omega - 2\pi i}{N}}\right), \quad (2.2)$$

---

<sup>2</sup>Admite-se que tal sequência possua transformada de Fourier.

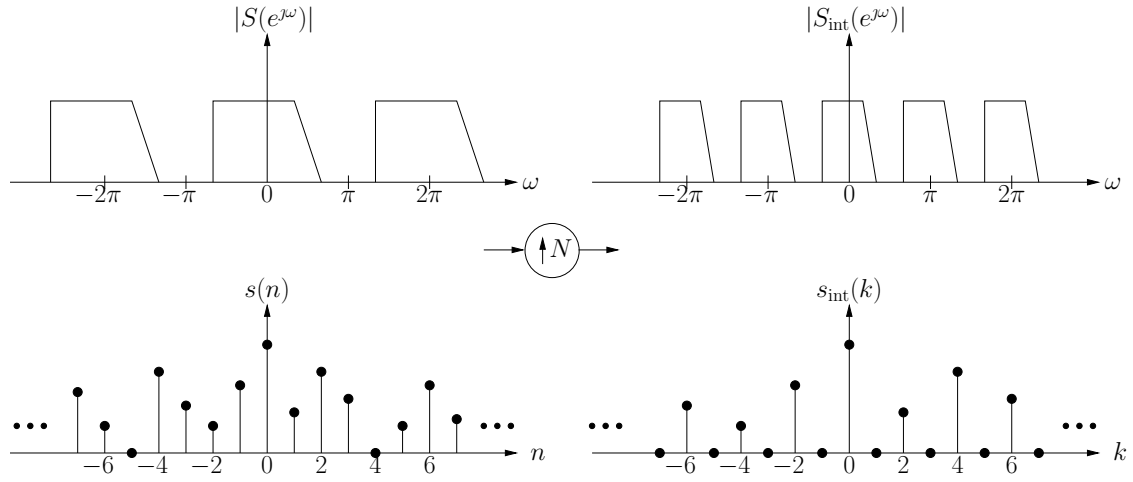


Figura 2.1: O bloco interpolador ( $N = 2$ ).

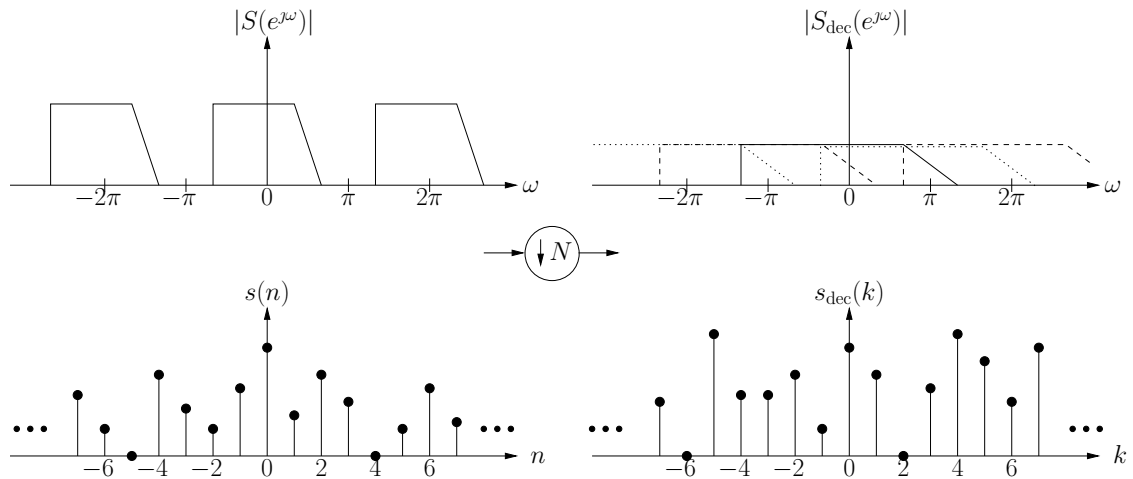


Figura 2.2: O bloco decimador ( $N = 2$ ).

em que  $i \in \mathcal{N} = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ . Diferentemente da interpolação, a decimação é uma operação periodicamente variante no tempo [21], [22].

As Figuras 2.1 e 2.2 mostram o comportamento nos domínios do tempo e da frequência de um sinal que passa por um interpolador e um decimador, respectivamente, em que  $N = 2$ . Os sinais dessas figuras são apenas ilustrativos de forma que não há uma correspondência válida entre os respectivos pares sinal-transformada. Através da análise de tais figuras, é possível verificar que, para que as operações de decimação e interpolação sejam utilizadas de maneira efetiva em um sistema de processamento de sinais, é necessária a utilização de filtros digitais com o intuito de, no caso da interpolação, obter uma versão suave do sinal interpolado ou, de maneira equivalente, eliminar as imagens espectrais que surgiram **após** a inserção de zeros;



Figura 2.3: Operações gerais de interpolação e decimação no domínio do tempo.

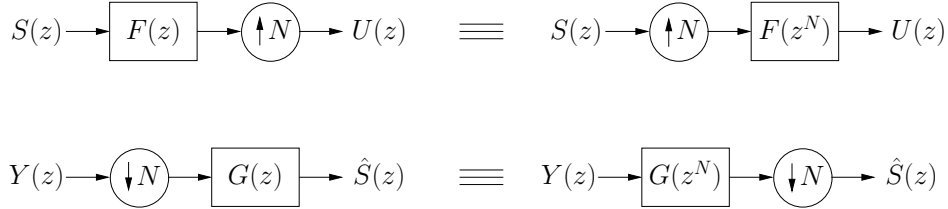


Figura 2.4: Identidades nobres no domínio  $\mathcal{Z}$ .

e para que, no caso da decimação, não ocorra o *aliasing*, limitando-se o sinal **antes** de suas amostras serem descartadas [21], [22].

No caso da interpolação, obtém-se uma versão suave do sinal  $s_{\text{int}}(k)$  processando-o com um filtro que elimine as repetições de espectro que aparecem centradas nas frequências  $\pm \frac{2\pi}{N}i$ , com  $i \in \{1, \dots, N-1\} \subset \mathbb{N}$ . Semelhantemente, é necessário que se garanta que o sinal original não terá sobreposição de espectros após a sua decimação, ou seja, no caso de um sinal real passa-baixas, por exemplo, é necessário filtrar o sinal para que o mesmo fique limitado à banda  $(-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N})$ . A Figura 2.3 mostra como as operações de interpolação e decimação são implementadas na prática.

Existem formas específicas para se manipular os blocos de decimação e interpolação em um sistema com múltiplas taxas. Tal manipulação pode ser particularmente interessante quando há interesse de comutar as operações de filtragem com as operações de mudança de taxa de amostragem. Essas formas específicas de manipulação baseiam-se nas chamadas **identidades nobres** [21], [22].

A Figura 2.4 contém uma descrição por diagrama de blocos dessas identidades. Em termos da interpolação, no lugar de primeiro interpolar um dado sinal para então filtrá-lo por um filtro que esteja numa taxa mais alta, é interessante primeiramente filtrar o sinal em uma taxa mais baixa para então interpolá-lo. Essa estratégia permite uma economia de operações aritméticas e de memória. Em relação à decimação, no lugar de primeiro filtrar o sinal por um filtro que esteja em uma taxa mais alta para então decimar o resultado, é possível primeiro decimar a entrada do filtro para que este trabalhe a uma taxa inferior, permitindo assim a economia de recursos computacionais. Matematicamente, essas operações podem ser descritas



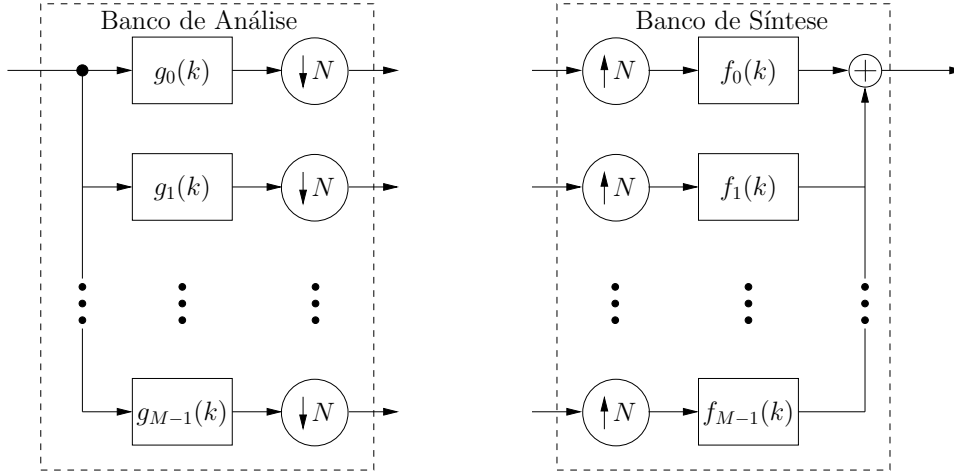


Figura 2.5: Bancos de filtros de análise e de síntese no domínio do tempo.

por [21],[22]:

$$[S(z)F(z)]_{\uparrow N} = U(z) = [S(z)]_{\uparrow N} F(z^N), \quad (2.3)$$

$$[Y(z)]_{\downarrow N} G(z) = \hat{S}(z) = [Y(z)G(z^N)]_{\downarrow N}, \quad (2.4)$$

em que  $[(\cdot)]_{\uparrow N}$  e  $[(\cdot)]_{\downarrow N}$  denotam as operações de interpolação e decimação por  $N$  sobre  $(\cdot)$ , respectivamente.

A maior parte das aplicações de sistemas com múltiplas taxas de amostragem refere-se aos bancos de filtros [21],[22]. Um banco de filtros é um conjunto de filtros que compartilham uma entrada comum ou uma saída comum [22]. Ambos os casos são exibidos na Figura 2.5. Os filtros do conjunto  $\{g_m(k)\}_{m \in \mathcal{M}}$ , onde  $m \in \mathcal{M} = \{0, 1, \dots, M-1\} \subset \mathbb{N}$ , compõem o chamado **banco de análise**, enquanto que os filtros do conjunto  $\{f_m(k)\}_{m \in \mathcal{M}}$  compõem o chamado **banco de síntese**. Como é possível verificar, um banco de filtros aplica os blocos básicos gerais de decimação e de interpolação para dividir o sinal original em sub-bandas com o intuito de processar individualmente cada um dos subsinais resultantes na etapa de análise e, após tal processamento, recompor o sinal resultante através do banco de síntese. Mais informações a respeito de bancos de filtros e processamento em múltiplas taxas podem ser encontradas nas referências [21], [22], [28], [29].

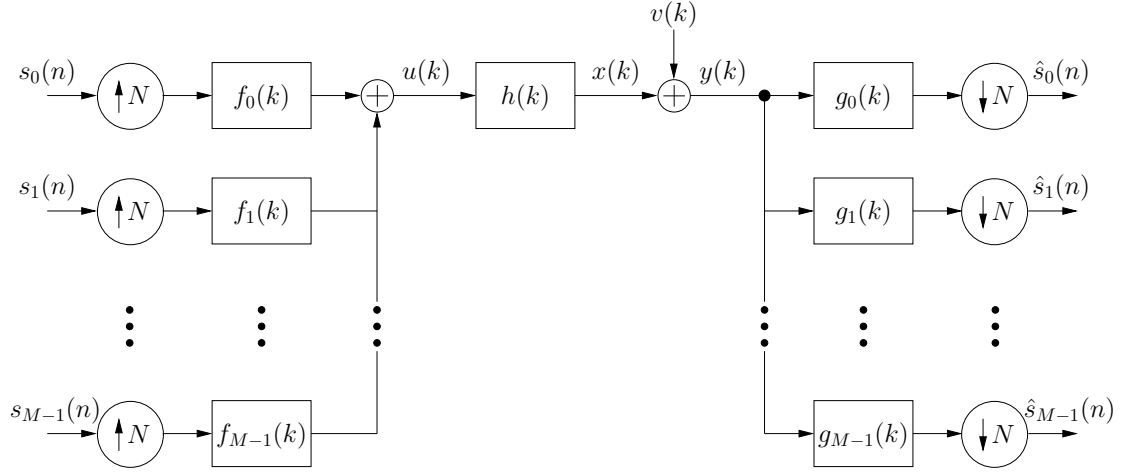


Figura 2.6: Transceptor multicanal no domínio do tempo.

## 2.2 Transceptores Multicanais

Considere o modelo de um transceptor multicanal [4], [22], [28] conforme é descrito na Figura 2.6, em que um sistema de comunicação é modelado como um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês *multiple-input multiple-output*). As amostras de cada sequência  $s_m(n)$  pertencem a uma determinada constelação  $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$  (por exemplo, PAM, QAM ou PSK [30], [31]) e representam a  $m$ -ésima entrada do transceptor, onde  $m \in \mathcal{M}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ . A saída correspondente do transceptor é denotada por  $\hat{s}_m(n) \in \mathbb{C}$ . Idealmente,  $\hat{s}_m(n)$  deve ser uma estimativa confiável de  $s_m(n - \delta)$ , em que  $\delta \in \mathbb{N}$  é o atraso introduzido pelo processo de transmissão/recepção.

Um transceptor multicanal que modela um sistema de comunicação requer um projeto apropriado para o conjunto de filtros causais de transmissão  $\{f_m(k)\}_{m \in \mathcal{M}}$  e para o conjunto de filtros causais de recepção  $\{g_m(k)\}_{m \in \mathcal{M}}$ . Tais filtros operam com uma taxa de amostragem  $N$  vezes maior do que a taxa associada a cada sequência  $s_m(n)$ . Note que  $n$  representa o índice de tempo para a entrada e a saída do transceptor, enquanto que um índice de tempo distinto  $k \in \mathbb{Z}$  é utilizado para as respostas ao impulso dos subfiltros e para os sinais internos entre interpoladores e decimadores. Ademais, considera-se que os filtros de transmissão e recepção são fixos, isto é, não são variantes no tempo.

Os subfiltros têm como objetivo processar as sequências de entrada  $s_m(n)$ , para cada  $m \in \mathcal{M}$ , com o intuito de reduzir as distorções introduzidas pelo canal, de

forma que as sequências  $\hat{s}_m(n)$  são tidas como boas estimativas de  $s_m(n - \delta)$  em algum sentido previamente definido. Usualmente, o objetivo final é reduzir a BER ou maximizar o *throughput*.

O modelo do canal é representado por um filtro FIR  $h(k) \in \mathbb{C}$  cuja ordem é  $L \in \mathbb{N}$ . Esse modelo representa a propriedade de seletividade em frequência do canal. Além disso, há também um ruído aditivo  $v(k) \in \mathbb{C}$ , o qual modela a interferência total do ambiente, como por exemplo, a interferência multiusuário (MUI, do inglês *multi-user interference*) e o ruído térmico.

Dependendo do contexto, os sinais envolvidos no modelo serão considerados como determinísticos ou estocásticos. Entretanto, não será utilizada uma notação diferente para distingui-los, assim como é feito em vários textos técnicos [20]. Assim, apenas como um exemplo, em um contexto estocástico, poderão ser associadas a  $v(k)$  ou  $s_m(n)$  estatísticas de segunda ordem, tais como funções de autocorrelação  $r_{vv}(l, k)$ ,  $r_{s_m s_m}(p, n)$  ou outros tipos de estatísticas.

## 2.2.1 Representação no Domínio do Tempo

De acordo com a Figura 2.6 o sinal de entrada do canal  $u(k)$  é dado por:

$$u(k) = \sum_{(i,m) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{M}} s_m(i) f_m(k - iN). \quad (2.5)$$

A relação de entrada e saída do canal é representada por:

$$y(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} h(j) u(k - j) + v(k). \quad (2.6)$$

No receptor, o transceptor processa o sinal  $y(k)$  objetivando gerar as estimativas dos sinais transmitidos:

$$\hat{s}_m(n) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_m(l) y(nN - l). \quad (2.7)$$

Assim, combinando as equações (2.5), (2.6) e (2.7) é possível descrever a relação entre os sinais de entrada  $s_m(n)$  e as estimativas  $\hat{s}_m(n)$ , conforme se segue:

$$\hat{s}_m(n) = \sum_{(i,j,l,m) \in \mathbb{Z}^3 \times \mathcal{M}} g_m(l) h(j) s_m(i) f_m(nN - l - j - iN) + \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_m(l) v(nN - l). \quad (2.8)$$

A análise das expressões anteriores pode ser um tanto difícil. Porém, há algumas ferramentas alternativas de análise, tais como expressar o sistema no domínio do

tempo em forma matricial [7], [2]. Entretanto, para os propósitos deste trabalho, é mais conveniente utilizar uma descrição no domínio da transformada  $\mathcal{Z}$ , através da decomposição em componentes polifásicas dos sistemas envolvidos [21], [22], [28], [6].

## 2.2.2 Representação Polifásica

Uma vez que as taxas de interpolação e decimação são dadas por  $N$ , é mais apropriado representar os filtros de transmissão e de recepção utilizando suas decomposições em componentes polifásicas de ordem  $N$ , conforme se segue [6], [28]:

$$\begin{aligned}
F_m(z) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_m(k) z^{-k} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}} z^{-i} \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_m(jN + i) z^{-jN} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}} z^{-i} F_{i,m}(z^N), \tag{2.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_m(z) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_m(k) z^{-k} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}} z^i \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_m(jN - i) z^{-jN} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}} z^i G_{m,i}(z^N), \tag{2.10}
\end{aligned}$$

em que  $m \in \mathcal{M}$ , e  $F_m(z)$  e  $G_m(z)$  são as transformadas  $\mathcal{Z}$  de  $f_m(k)$  e  $g_m(k)$ , respectivamente. Sendo assim, pode-se reescrever os sistemas de equações (2.9) e (2.10) da seguinte forma [6], [28]:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} F_0(z) & \cdots & F_{M-1}(z) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \cdots & z^{-(M-1)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}^T(z)} \underbrace{\begin{bmatrix} F_{0,0}(z^N) & \cdots & F_{0,M-1}(z^N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{N-1,0}(z^N) & \cdots & F_{N-1,M-1}(z^N) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}(z^N)}, \\
\begin{bmatrix} G_0(z) \\ \vdots \\ G_{M-1}(z) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} G_{0,0}(z^N) & \cdots & G_{0,N-1}(z^N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{M-1,0}(z^N) & \cdots & G_{M-1,N-1}(z^N) \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}(z^N)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ z^{(M-1)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}(z^{-1})}, \tag{2.11}
\end{aligned}$$

A Figura 2.7 mostra a representação do transceptor multicanal utilizando-se as componentes polifásicas dos filtros envolvidos. Agora, utilizando as identidades

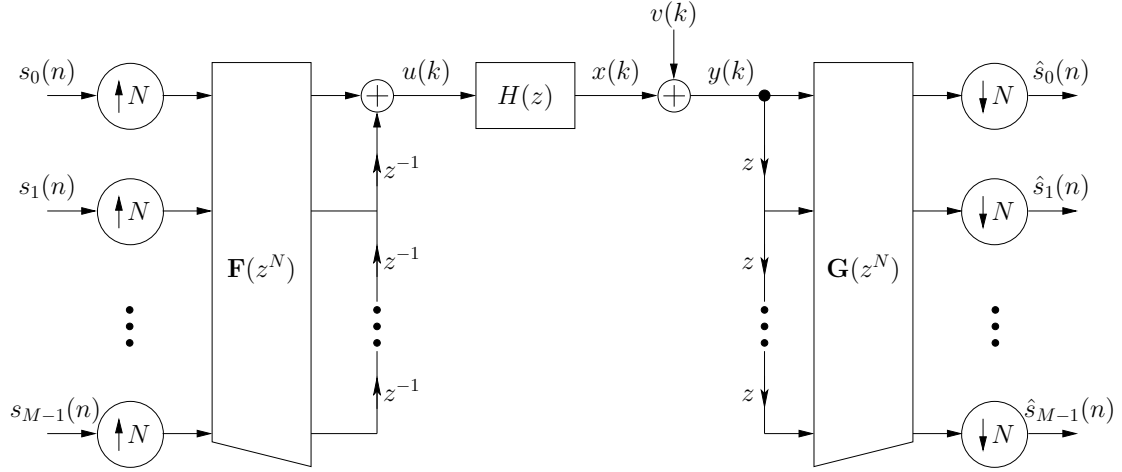


Figura 2.7: Representação polifásica do transceptor multicanal.

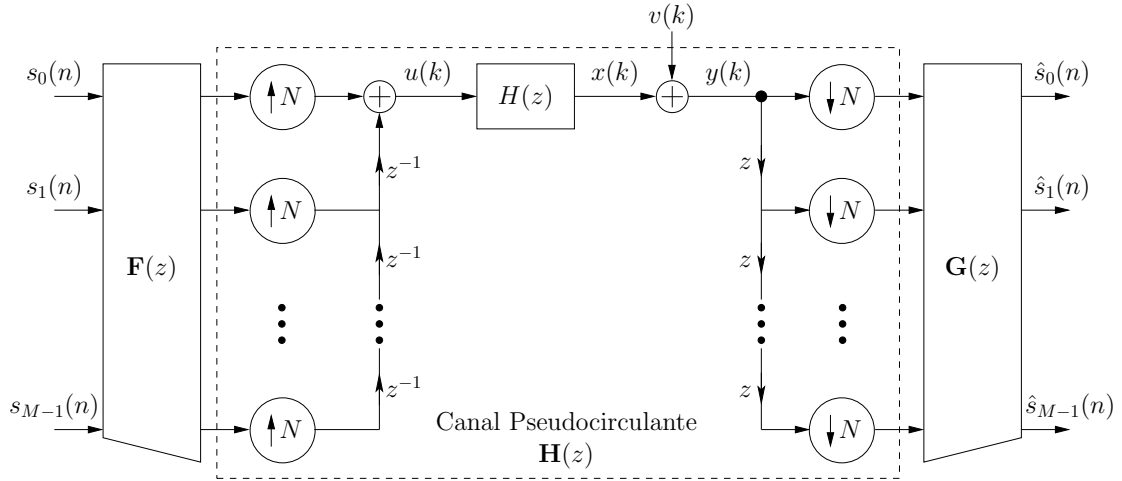


Figura 2.8: Representação polifásica modificada do transceptor multicanal.

nobres definidas na Seção 2.1, pode-se redesenhar o transceptor da Figura 2.7 para a forma ilustrada na Figura 2.8.

É possível mostrar que a área destacada na Figura 2.8, a qual engloba as linhas de atrasos/adiantamentos e os interpoladores/decimadores ao modelo de canal, pode ser representada por uma matriz pseudocirculante  $\mathbf{H}(z)$  de dimensão  $N \times N$ , definida analiticamente por [25], [22], [6]:

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & z^{-1}H_{N-1}(z) & z^{-1}H_{N-2}(z) & \cdots & z^{-1}H_1(z) \\ H_1(z) & H_0(z) & z^{-1}H_{N-1}(z) & \cdots & z^{-1}H_2(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ H_{N-1}(z) & H_{N-2}(z) & H_{N-3}(z) & \cdots & H_0(z) \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

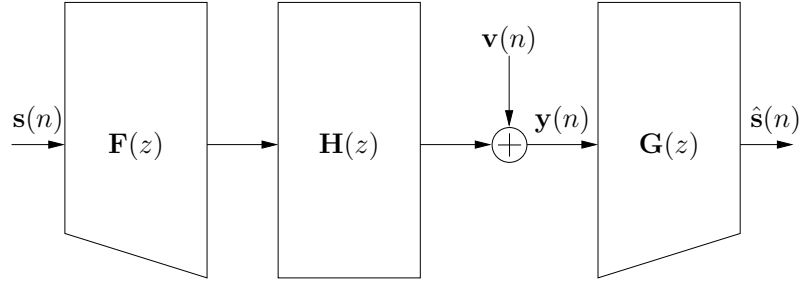


Figura 2.9: Transceptor multicanal no domínio da frequência (representação polifásica).

em que [25], [22], [6]

$$H(z) = \sum_{i \in \mathcal{N}} H_i(z^N) z^{-i} \quad \text{e} \quad H_i(z) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq jN + i \leq L}} h(jN + i) z^{-j}. \quad (2.13)$$

A Figura 2.9 descreve o sistema através das matrizes polifásicas do transceptor multicanal, incluindo a matriz pseudocirculante de canal. Essas matrizes foram definidas de forma que haja uma equivalência completa entre os sistemas modelados pelas Figuras 2.6 e 2.9.

Nesta dissertação, assume-se que  $N \geq L$ , isto é, que o fator de interpolação/decimação é maior ou igual à ordem do canal. Essa hipótese é razoável para diversas aplicações [6]. Para o caso em que  $N < L$ , o leitor pode verificar os resultados em [7], [25]. Assim, quando  $N \geq L$ , cada um dos elementos  $H_i(z)$ , com  $i \in \mathcal{N}$ , será um filtro simples com apenas um coeficiente, ou seja,  $H_i(z) = h(i)$ , caso  $i \leq L$ , e  $H_i(z) = 0$ , em caso contrário. Portanto, a matriz pseudocirculante de canal pode ser representada como uma matriz FIR de primeira ordem [6]:

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(L) & h(L-1) & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & h(L) & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & h(L) & \cdots & h(0) \end{bmatrix} + z^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & h(1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & h(L) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Além disso, os vetores de símbolos transmitidos e recebidos presentes na Fi-

gura 2.9 são respectivamente denotados por:

$$\mathbf{s}(n) = [s_0(n) \ s_1(n) \ \cdots \ s_{M-1}(n)]^T, \quad (2.15)$$

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = [\hat{s}_0(n) \ \hat{s}_1(n) \ \cdots \ \hat{s}_{M-1}(n)]^T. \quad (2.16)$$

A partir da Figura 2.9 não é difícil inferir que a matriz de transferência  $\mathbf{T}(z)$  do transceptor multicanal pode ser expressa como:

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{H}(z)\mathbf{F}(z), \quad (2.17)$$

onde foi considerado o caso particular em que  $v(k) \equiv 0$ , motivado pelo projeto *zero-forcing* de sistemas [6]. O transceptor possui a propriedade *zero-forcing* sempre que  $\mathbf{T}(z) = z^{-d}\mathbf{I}_M$ , em que  $d \in \mathbb{N}$ .

## 2.3 Transceptores em Bloco

O caso de transceptores sem memória, em que  $\mathbf{F}(z) = \mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}$ , é analisado nesta seção. Esse caso engloba os conhecidos transceptores em bloco [6] (em inglês, *block-based transceivers*), já que esses sistemas não utilizam informações de outros blocos durante o processo de transmissão e recepção. Isso é possível apenas se os comprimentos dos filtros  $\{f_m(k)\}_{m \in \mathcal{M}}$  e  $\{g_m(k)\}_{m \in \mathcal{M}}$  são menores que ou iguais a  $N$ . Os sistemas OFDM e SC-FD tradicionais são transceptores em bloco.

### 2.3.1 CP-OFDM

O sistema OFDM que emprega prefixo cíclico como redundância (CP-OFDM, do inglês *Cyclic Prefix OFDM*) caracteriza-se pelas seguintes matrizes de transmissão e recepção, respectivamente [32], [33]:

$$\mathbf{F} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{L \times (M-L)} & \mathbf{I}_L \\ & \mathbf{I}_M \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{\text{CP}} \in \mathbb{C}^{N \times M}} \mathbf{W}_M^H, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} \mathbf{W}_M \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times L} & \mathbf{I}_M \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{\text{CP}} \in \mathbb{C}^{M \times N}}, \quad (2.19)$$

em que  $\mathbf{W}_M \in \mathbb{C}^{M \times M}$  é a matriz de DFT normalizada de dimensão  $M \times M$ ,  $\mathbf{I}_M$  é a matriz identidade de dimensão  $M \times M$ ,  $\mathbf{0}_{X \times Y}$  é uma matriz de zeros de dimensão

$X \times Y$  e  $\mathbf{E} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  é a matriz responsável pela equalização dos sinais após a remoção do prefixo cíclico e a aplicação da DFT. Note que o bloco de dados que se deseja transmitir possui comprimento  $M$ , mas, na verdade, transmite-se um bloco de comprimento  $N = M + L$  pois os últimos  $L$  elementos do sinal resultante da aplicação da IDFT são repetidos no início do bloco, utilizando-se, assim, um prefixo cíclico como redundância.

As matrizes  $\mathbf{A}_{\text{CP}}$  e  $\mathbf{R}_{\text{CP}}$  são as matrizes responsáveis pela adição e pela remoção do prefixo cíclico, respectivamente. Note que o produto  $\mathbf{R}_{\text{CP}}\mathbf{H}(z)\mathbf{A}_{\text{CP}} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  é dado por:

$$\mathbf{R}_{\text{CP}}\mathbf{H}(z)\mathbf{A}_{\text{CP}} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & h(1) \\ h(1) & h(0) & \cdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & h(L) \\ h(L) & h(L-1) & & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & h(L) & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & & h(0) \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

ou seja,  $\mathbf{R}_{\text{CP}}$  remove a interferência entre os blocos, enquanto que  $\mathbf{A}_{\text{CP}}$  opera sobre a matriz de Toeplitz sem memória resultante  $\mathbf{R}_{\text{CP}}\mathbf{H}(z) \in \mathbb{C}^{M \times N}$  de forma a transformá-la em uma matriz circulante de dimensão  $M \times M$ .

Uma vez que a matriz de canal resultante da adição e posterior remoção do prefixo cíclico é uma matriz circulante, então ela se torna diagonal após a multiplicação pelas matrizes de IDFT e de DFT no transmissor e receptor, respectivamente [34]. Assim, tem-se que o modelo equivalente de uma transmissão CP-OFDM é dado por:

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{s} + \mathbf{E}\mathbf{v}' \quad (2.21)$$

onde, por simplicidade, não foi denotada a dependência com o tempo dos sinais envolvidos e [34]

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_m\}_{m=0}^{M-1} = \mathbf{W}_M\mathbf{R}_{\text{CP}}\mathbf{H}(z)\mathbf{A}_{\text{CP}}\mathbf{W}_M^H \quad (2.22)$$

$$= \text{diag}\left\{\sqrt{M}\mathbf{W}_M \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{0}_{(M-L-1) \times 1} \end{bmatrix}\right\}, \quad (2.23)$$

em que  $\mathbf{h} = [h(0) \ h(1) \ \cdots \ h(L)]^T$  e  $\mathbf{v}' = \mathbf{W}_M\mathbf{R}_{\text{CP}}\mathbf{v}$ .



O equalizador  $\mathbf{E}$  pode ser definido de várias formas, dentre as quais se destacam os projetos ZF e MMSE [35]. No caso do projeto ZF, assume-se que a matriz  $\mathbf{\Lambda}$  é inversível, de forma que

$$\mathbf{E}_{\text{ZF}} = \mathbf{\Lambda}^{-1}. \quad (2.24)$$

No caso do projeto MMSE, não há necessidade de assumir que a matriz  $\mathbf{\Lambda}$  é inversível pois a mesma não será invertida. A solução MMSE linear é dada por [36]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{MMSE}} &= \arg \left\{ \min_{\forall \mathbf{E} \in \mathbb{C}^{M \times M}} \mathbf{E} [\|\mathbf{s} - \mathbf{E}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{s} + \mathbf{v}')\|_2^2] \right\} = \mathbf{\Lambda}^H \left( \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \\ &= \text{diag} \left\{ \frac{\lambda_m^*}{|\lambda_m|^2 + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2}} \right\}_{m=0}^{M-1}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde foi considerado que os símbolos transmitidos e o ruído na saída do canal são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d, do inglês *independent and identically distributed*), provenientes de um processo estocástico branco com média zero e mutuamente independentes<sup>3</sup>. Além disso, considerou-se que  $\mathbf{E}[ss^*] = \sigma_s^2$  e  $\mathbf{E}[vv^*] = \sigma_v^2$ .

### 2.3.2 ZP-OFDM

O sistema OFDM que utiliza zeros como elementos de redundância (ZP-OFDM, do inglês *Zero Padding OFDM*) caracteriza-se pelas seguintes matrizes de transmissão e recepção, respectivamente [32], [33]:

$$\mathbf{F} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0}_{L \times M} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{\text{ZP}} \in \mathbb{C}^{N \times M}} \mathbf{W}_M^H, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} \mathbf{W}_M \underbrace{\begin{bmatrix} & \mathbf{I}_L \\ \mathbf{I}_M & \\ & \mathbf{0}_{(M-L) \times L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{\text{ZP}} \in \mathbb{C}^{M \times N}}, \quad (2.27)$$

onde, mais uma vez, são adicionados  $L$  elementos de redundância e  $N = M + L$ .

As matrizes  $\mathbf{A}_{\text{ZP}}$  e  $\mathbf{R}_{\text{ZP}}$  são as matrizes responsáveis pela adição e pela remoção do intervalo de guarda nulo, respectivamente. O produto  $\mathbf{R}_{\text{ZP}}\mathbf{H}(z)\mathbf{A}_{\text{ZP}} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  é

---

<sup>3</sup>Note que se  $\mathbf{v}$  possui tais características, então  $\mathbf{v}' = \mathbf{W}_M \mathbf{R}_{\text{CP}} \mathbf{v}$  também as possui.

dado por:

$$\mathbf{R}_{\text{ZP}}\mathbf{H}(z)\mathbf{A}_{\text{ZP}} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & h(1) \\ h(1) & h(0) & \cdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & h(L) \\ h(L) & h(L-1) & & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & h(L) & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & & h(0) \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{\text{CP}}\mathbf{H}(z)\mathbf{A}_{\text{CP}}, \quad (2.28)$$

ou seja,  $\mathbf{A}_{\text{ZP}}$  remove a interferência entre os blocos, enquanto que  $\mathbf{R}_{\text{ZP}}$  opera sobre a matriz de Toeplitz sem memória resultante  $\mathbf{H}(z)\mathbf{A}_{\text{ZP}} \in \mathbb{C}^{N \times M}$  de forma a transformá-la em uma matriz circulante de dimensão  $M \times M$ .

Uma vez que  $\mathbf{R}_{\text{ZP}}\mathbf{H}(z)\mathbf{A}_{\text{ZP}} = \mathbf{R}_{\text{CP}}\mathbf{H}(z)\mathbf{A}_{\text{CP}}$ , então todas as demais considerações feitas na Subseção 2.3.1 aplicam-se também aqui.

Deve-se ressaltar que o ZP-OFDM considerado aqui<sup>4</sup> é um caso simplificado de um sistema ZP-OFDM genérico proposto em [32]. O caso mais geral de sistemas ZP-OFDM permite que se recuperem os símbolos transmitidos independentemente da localização dos zeros do modelo de canal. Porém, tal sistema é computacionalmente mais custoso do que o ZP-OFDM descrito aqui, já que a matriz equivalente de canal não é transformada em uma matriz circulante, inviabilizando sua diagonalização através de matrizes de DFT e de IDFT.

### 2.3.3 CP-SC-FD

O sistema SC-FD que emprega prefixo cíclico como redundância (CP-SC-FD, do inglês *Cyclic Prefix SC-FD*) é inteiramente análogo ao CP-OFDM e caracteriza-se pelas seguintes matrizes de transmissão e recepção, respectivamente:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{L \times (M-L)} & \mathbf{I}_L \\ & \mathbf{I}_M \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}_M^H \mathbf{E} \mathbf{W}_M \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times L} & \mathbf{I}_M \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

---

<sup>4</sup>Este sistema também é conhecido como ZP-OFDM-OLA, em que OLA provém do inglês *overlap-and-add* [32].

### 2.3.4 ZP-SC-FD

O sistema SC-FD que adiciona zeros como redundância (ZP-SC-FD, do inglês *Zero Padding SC-FD*) é análogo ao ZP-OFDM, sendo definido pelas seguintes matrizes de transmissão e recepção, respectivamente:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0}_{L \times M} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}_M^H \mathbf{E} \mathbf{W}_M \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M & \mathbf{I}_L \\ \mathbf{0}_{(M-L) \times L} \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

### 2.3.5 Transceptores em Bloco com Redundância Reduzida

Lin e Phoong [9], [10], [6] mostraram que a quantidade de redundância  $K \in \mathbb{N}$  de um transceptor em bloco livre de IBI deve satisfazer a desigualdade  $2K \geq L$ , em que  $K = N - M$ . Eles apresentaram uma parametrização geral de um transceptor DMT (do inglês *Discrete Multi-Tone*) sem memória, bem como um caso particular interessante que será utilizado neste trabalho. Esse caso particular é caracterizado pelas seguintes matrizes de transmissão e recepção, respectivamente [6]:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{0}_{K \times M} \end{bmatrix}_{N \times M}, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times (L-K)} & \mathbf{G}_0 \end{bmatrix}_{M \times N}, \quad (2.34)$$

em que  $\mathbf{F}_0 \in \mathbb{C}^{M \times M}$  e  $\mathbf{G}_0 \in \mathbb{C}^{M \times (M+2K-L)}$ .

Assim sendo, a matriz de transferência do transceptor multicanal é dada por:

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{G}\mathbf{H}(z)\mathbf{F} = \mathbf{G}_0\mathbf{H}_0\mathbf{F}_0 = \mathbf{T}, \quad (2.35)$$

onde a matriz de canal resultante após a inserção e remoção de redundância é definida

por [6]:

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} h(L-K) & \cdots & h(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ h(K) & \ddots & & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & & h(0) \\ h(L) & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & & & h(L-K) \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & h(L) & \cdots & h(K) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(M+2K-L) \times M}. \quad (2.36)$$

Nesse caso, considerando  $v(k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ , tem-se que:

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \mathbf{G}_0 \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_0 \mathbf{s}(n) = \mathbf{T} \mathbf{s}(n). \quad (2.37)$$

Há algumas restrições sobre a resposta ao impulso do canal para que exista a solução ZF. Tais restrições estão relacionadas ao conceito de zeros cômruos (em inglês, *congruous zeros*) [6], [27]. Os zeros cômruos de uma função de transferência  $H(z)$  são os zeros distintos  $z_0, z_1, \dots, z_{\mu-1} \in \mathbb{C}$  dessa função que respeitam a seguinte propriedade:  $z_i^N = z_j^N, \forall i, j \in \{0, 1, \dots, \mu-1\}$ . Note que  $\mu$  é uma função de  $N$ . Conforme é mostrado em [6], [27], [7], o modelo do canal deve respeitar a restrição  $\mu(N) \leq K$ , onde  $\mu(N)$  denota a cardinalidade do maior (em termos de número de elementos) conjunto de zeros cômruos em relação a  $N$ .

Assim, é claro que se um transceptor em bloco com redundância mínima existir, ou seja, se  $\mu(N) \leq L/2 = K \in \mathbb{N}$ , então sua solução ZF é tal que, dado  $\mathbf{H}_0 \in \mathbb{C}^{M \times M}$  e uma vez projetado/definido  $\mathbf{F}_0$ , deve-se ter

$$\mathbf{G}_0 = (\mathbf{H}_0 \mathbf{F}_0)^{-1} = \mathbf{F}_0^{-1} \mathbf{H}_0^{-1}. \quad (2.38)$$

Obviamente, tal solução para o receptor é computacionalmente intensiva em geral por dois motivos principais:

- **O problema de projeto do receptor:** o processo de inversão de uma dada matriz  $M \times M$  geralmente requer  $\mathcal{O}(M^3)$  operações aritméticas. Essa complexidade é demasiadamente alta quando comparada a de sistemas práticos, tais como OFDM e SC-FD. De fato, os projetos dos equalizadores ZF e MMSE para

tais sistemas possuem complexidade  $\mathcal{O}(M \log M)$ , uma vez que suas respectivas soluções são baseadas na aplicação da DFT sobre a resposta ao impulso do canal (vide equações (2.22), (2.24) e (2.25)).

- **O problema de equalização:** em geral, o processo de multiplicar o vetor recebido pela matriz receptora possui complexidade  $\mathcal{O}(M^2)$ . Novamente, essa complexidade é considerada muito mais alta do que  $\mathcal{O}(M \log M)$ , que é a complexidade de equalização nos sistemas OFDM e SC-FD tradicionais. Esse processo simples de equalização dos sistemas OFDM e SC-FD deve-se ao cálculo eficiente da DFT, bem como a multiplicações por matrizes diagonais.

## 2.4 Considerações Finais

Este capítulo tratou da modelagem de sistemas de comunicação através de transceptores multicanais ou TMUXs. Foi dada uma ênfase especial para os transceptores fixos e sem memória. Dentre esses, os transceptores que implementam os sistemas CP-OFDM, ZP-OFDM, CP-SC-FD e ZP-SC-FD foram revistos, destacando-se suas soluções ZF e MMSE. Por fim, os resultados da literatura a respeito de transceptores que empregam redundância reduzida foram descritos.

Uma questão que se levanta naturalmente a respeito das discussões deste capítulo é: por que os sistemas OFDM e SC-FD tradicionais são tão simples? A resposta encontra-se no fato de que, em ambos os casos (no problema de projeto do receptor e no problema de equalização), a matriz efetiva de canal é transformada em uma matriz circulante através do processo de inserção e remoção da redundância. Isso permite explorar a propriedade de que toda matriz circulante quadrada é diagonalizável por um par de matrizes de DFT e IDFT. Essa decomposição espectral simples é de extrema importância para implementações práticas dos sistemas OFDM e SC-FD.

Além disso, uma outra questão surge naturalmente: é possível que existam sistemas similares ao OFDM e SC-FD, mas que trabalhem com redundância mínima e, simultaneamente, sejam computacionalmente simples? A resposta é afirmativa e pode ser encontrada através da exploração adequada das propriedades da matriz efetiva de canal,  $\mathbf{H}_0$  (vide equação (2.36)), como será visto nos próximos capítulos.

# Capítulo 3

## Representações de Matrizes Estruturadas

Intuitivamente, uma matriz é dita estruturada quando seus coeficientes seguem uma determinada lei de formação. Tal lei pode ser proveniente de uma relação matemática entre tais coeficientes ou simplesmente da forma por meio da qual eles estão dispostos na matriz. Nas aplicações, é comum que os padrões de estrutura de uma matriz forneçam os meios necessários para explorar de forma mais eficiente as características do problema que tal matriz modela.

Em geral, uma matriz estruturada pode ser descrita utilizando um conjunto “reduzido” de parâmetros por meio de uma fórmula compacta. O termo “reduzido” é empregado para expressar que tal conjunto tem menos parâmetros do que a quantidade total de termos da matriz original.

Alguns exemplos de matrizes estruturadas são: diagonal, circulante, pseudocirculante, de Toeplitz, etc. Tais matrizes são frequentemente encontradas nas aplicações de processamento de sinais, especialmente nas aplicações de telecomunicações. Conforme foi destacado no Capítulo 2, um dos principais motivos do sucesso dos sistemas OFDM e SC-FD reside no fato de que tais transceptores conseguem transformar a matriz de convolução do canal, que é uma matriz de Toeplitz no caso em que o canal é invariante no tempo, em uma matriz circulante. Uma vez dispondo-se de uma representação do efeito do canal através de uma matriz circulante, pode-se empregar a decomposição espectral de tal matriz que se caracteriza por ter autovetores normalizados fixos e iguais às colunas da matriz de DFT normalizada [34]. Esse processo

de diagonalização permite que o projeto dos equalizadores seja simplificado.

Este capítulo trata das representações de matrizes com alguma estrutura particular. Tais representações baseiam-se no conceito de estrutura de deslocamento, o qual é explicado na Seção 3.1. Em seguida, as matrizes estruturadas de interesse para este trabalho são apresentadas na Seção 3.2. As decomposições de matrizes bezoutianas são apresentadas nas Seções 3.3 e 3.4. Tais decomposições são de fundamental importância para o projeto de transceptores com redundância mínima. Por fim, as principais contribuições deste capítulo são destacadas na Seção 3.5.

### 3.1 Estrutura de Deslocamento

Há várias formas de se medir o grau de estrutura de uma matriz, sendo a mais comum a utilização do operador de deslocamento (do termo em inglês *displacement operator*). É possível verificar se uma dada matriz de interesse é estruturada através da análise do posto da matriz que é resultado da aplicação deste operador à referida matriz de interesse.

Há várias aplicações cuja modelagem matemática resume-se à solução de um sistema linear do tipo  $\mathbf{C}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ , em que  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  e os demais vetores possuem dimensões compatíveis com o problema em questão. Note que, por simplicidade, foi assumido que a matriz  $\mathbf{C}$  é quadrada. De forma geral, caso haja solução para o sistema, a complexidade computacional assintótica associada a mesma será  $\mathcal{O}(M^3)$ . Dependendo da aplicação de interesse, tal complexidade pode ser demasiadamente alta, o que inibiria sua utilização em sistemas práticos.

Entretanto, é sabido que sistemas lineares que envolvem certos tipos de matrizes estruturadas podem ser resolvidos com uma redução substancial da complexidade computacional. Se  $\mathbf{C}$  for uma matriz de Toeplitz, por exemplo, a solução do sistema pode ser obtida com  $\mathcal{O}(M \log^2 M)$  operações aritméticas [37]. Além disso, matrizes de Toeplitz estão presentes em inúmeras aplicações cuja modelagem é feita por meio de sistemas lineares [38], [13].

Kailath *et al* propuseram uma medida que possibilita a indicação de quão distinta uma dada matriz é de uma matriz de Toeplitz, a saber [38], [13]: o posto de deslocamento (em inglês, *displacement rank*). A Definição 1 contém uma descrição

formal sobre os operadores de deslocamento de uma matriz.

**Definição 1** (Operadores de Deslocamento [13]). Dadas três matrizes  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ , os operadores  $\nabla_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}, \Delta_{\mathbf{A}, \mathbf{B}} : \mathbb{C}^{M \times M} \rightarrow \mathbb{C}^{M \times M}$ , definidos analiticamente como  $\nabla_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}(\mathbf{C}) = \mathbf{AC} - \mathbf{CB}$  e  $\Delta_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}(\mathbf{C}) = \mathbf{C} - \mathbf{ACB}$ , são os **operadores lineares de deslocamento de Sylvester e de Stein**, respectivamente.

Em geral, as matrizes estruturadas são naturalmente associadas a algum operador linear de deslocamento. A função destes operadores é revelar se uma matriz pode ser representada com uma quantidade relativamente pequena de parâmetros. Com efeito, esta propriedade é a principal responsável pela existência de algoritmos super-rápidos para a inversão (quando é possível) e multiplicação de tais matrizes por vetores. A Definição 2 formaliza essa noção de “quantidade relativamente pequena de parâmetros”.

**Definição 2** (Postos de Deslocamento [13]). Dados os operadores  $\nabla_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}, \Delta_{\mathbf{A}, \mathbf{B}} : \mathbb{C}^{M \times M} \rightarrow \mathbb{C}^{M \times M}$ , em que  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ , os **postos de deslocamento** relacionados a tais operadores aplicados a  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  são os postos das matrizes resultantes  $\nabla_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}(\mathbf{C})$  e  $\Delta_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}(\mathbf{C})$ .

Em geral,  $\mathbf{C}$  é representada por meio de  $M^2$  coeficientes. Porém, se  $R = \text{posto}\{\nabla_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}(\mathbf{C})\}$ , ou  $R = \text{posto}\{\Delta_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}(\mathbf{C})\}$ , e caso  $R \ll M$ , então a matriz pode ser representada utilizando-se de  $RM$  até  $2RM$  coeficientes independentes [13].

Nas Definições 1 e 2, as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são denominadas **matrizes de operação**. São essas matrizes as responsáveis por definirem completamente o operador de deslocamento. Por conta disso, é muito importante escolhê-las adequadamente com o intuito de se obter um posto de deslocamento relativamente pequeno. A Definição 3 introduz as matrizes de operação que são mais comumente encontradas nas aplicações.

**Definição 3** (Matrizes de Operação [13]). A matriz circulante- $\lambda$  denotada por  $\mathbf{Z}_\lambda$



e a matriz diagonal  $\mathbf{D}_\nu$  são definidas respectivamente por

$$\mathbf{Z}_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & & & \lambda \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_M \lambda \mathbf{e}_1] \quad \text{e} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{D}_\nu = \begin{bmatrix} \nu_0 & & & \\ & \nu_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \nu_{M-1} \end{bmatrix} = \text{diag}\{\boldsymbol{\nu}\}, \quad (3.2)$$

em que  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{e}_m$  é um vetor que possui seu  $m$ -ésimo elemento igual a 1 e todos os demais elementos iguais a 0, e  $\boldsymbol{\nu} = [\nu_0 \nu_1 \cdots \nu_{M-1}]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ . Note que  $\mathbf{Z}_\lambda^{-1} = \mathbf{Z}_{1/\lambda}^T, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Os métodos de projeto de transceptores em bloco desta dissertação baseiam-se na abordagem do posto de deslocamento das matrizes envolvidas. Essa abordagem é caracterizada pelos seguintes fatores [13], [15]:

- **Compressão:** o posto de deslocamento de uma matriz estruturada  $\mathbf{C}$  deve ser relativamente pequeno quando comparado à dimensão de  $\mathbf{C}$ . Neste caso, o operador de deslocamento aplicado à matriz pode ser **comprimido** utilizando-se o **gerador de deslocamento** para a matriz de interesse  $\mathbf{C}$ . O gerador de deslocamento é caracterizado pelo par  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  e possui as seguintes características: seja um operador de deslocamento de Sylvester com posto  $R$ . Assim, é fato que

$$\nabla_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}(\mathbf{C}) = \sum_{r=1}^R \mathbf{p}_r \mathbf{q}_r^T = \mathbf{P} \mathbf{Q}^T, \quad (3.3)$$

em que  $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_R] \in \mathbb{C}^{M \times R}$  e  $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_R] \in \mathbb{C}^{M \times R}$ , com  $\mathbf{p}_r = [p_{0r} \ p_{1r} \ \cdots \ p_{(M-1)r}]^T$  e  $\mathbf{q}_r = [q_{0r} \ q_{1r} \ \cdots \ q_{(M-1)r}]^T, \forall r \in \{1, \dots, R\}$ .

- **Operação:** uma vez comprimido, é possível realizar algumas operações sobre as matrizes estruturadas de uma forma muito mais rápida ao utilizar-se a representação compacta da matriz. Ou seja, no lugar de trabalhar diretamente com a matriz original, pode ser mais vantajoso trabalhar com o par gerador de deslocamento, tomando-se o cuidado de utilizar as técnicas adequadas para tanto.

- **Descompressão:** depois do estágio de operação, a matriz original (processada) pode ser facilmente recuperada através de uma **descompressão** de seu operador de deslocamento.

O primeiro resultado importante sobre operadores de deslocamento é que os operadores de Sylvester e de Stein podem ser facilmente convertidos de um para o outro, desde que se tenha ao menos uma das matrizes de operação,  $\mathbf{A}$  ou  $\mathbf{B}$ , inversível [13],[15]. Isso essencialmente mostra como operar em uma representação comprimida com o objetivo de transformá-la em uma outra representação compacta. Não é difícil de demonstrar este resultado, o qual se encontra sem prova na Proposição 1.

**Proposição 1** (Equivalência entre Operadores de Deslocamento [15]). *Se a matriz de operação  $\mathbf{A}$  é inversível, então  $\nabla_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{C}) = \mathbf{A}\Delta_{\mathbf{A}^{-1},\mathbf{B}}(\mathbf{C})$ . Por outro lado, se  $\mathbf{B}$  é inversível, então  $\nabla_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{C}) = -\Delta_{\mathbf{A},\mathbf{B}^{-1}}(\mathbf{C})\mathbf{B}$ .*

O segundo resultado concernente aos operadores de deslocamento relaciona o deslocamento de Sylvester de uma matriz com o deslocamento de Sylvester da inversa desta matriz. Este resultado mostra que a compressão da inversa de uma matriz pode ser obtida através da operação sobre a versão comprimida da matriz original. Novamente, este resultado é relativamente simples de ser provado e, portanto, é enunciado sem demonstração na Proposição 2.

**Proposição 2** (Deslocamento da Inversa [15]). *Dada uma matriz inversível  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  e duas matrizes de operação  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ , tem-se que  $\nabla_{\mathbf{B},\mathbf{A}}(\mathbf{C}^{-1}) = -\mathbf{C}^{-1}\nabla_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{C})\mathbf{C}^{-1}$ .*

As Proposições 3 e 4 introduzem dois resultados muito importantes. Elas descrevem como operações tradicionais, tais quais combinação linear e produto de matrizes, transformam os geradores de deslocamento das matrizes originais. As demonstrações destes resultados são simples e podem ser encontradas em [37].

**Proposição 3** (Gerador de uma Combinação Linear [37]). *Dados  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\nabla_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{C}) = \mathbf{P}\mathbf{Q}^T$ , e  $\nabla_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{D}) = \mathbf{P}'\mathbf{Q}'^T$ , tem-se que  $\nabla_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{C} + \alpha\mathbf{D}) = \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{Q}}^T$ , onde  $\bar{\mathbf{P}} = [\mathbf{P} \quad \alpha\mathbf{P}']$  e  $\bar{\mathbf{Q}} = [\mathbf{Q} \quad \mathbf{Q}']$ .*

**Proposição 4** (Gerador de um Produto [37]). *Dados  $\nabla_{\mathbf{A},\mathbf{B}}(\mathbf{C}) = \mathbf{P}\mathbf{Q}^T$  e  $\nabla_{\mathbf{B},\mathbf{D}}(\mathbf{E}) = \mathbf{P}'\mathbf{Q}'^T$ , tem-se que  $\nabla_{\mathbf{A},\mathbf{D}}(\mathbf{C}\mathbf{E}) = \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{Q}}^T$ , onde  $\bar{\mathbf{P}} = [\mathbf{P} \ \mathbf{C}\mathbf{P}']$  e  $\bar{\mathbf{Q}} = [\mathbf{E}^T\mathbf{Q} \ \mathbf{Q}']$ .*

Agora que as definições formais e os resultados fundamentais sobre operadores de deslocamento foram descritos, é possível prosseguir com o estudo das matrizes estruturadas que são de interesse para este trabalho.

## 3.2 Matrizes de Toeplitz, de Vandermonde, de Bézout e de Cauchy

A descrição formal de uma matriz de Toeplitz e de uma matriz de Vandermonde é introduzida na Definição 4.

**Definição 4** (Matrizes de Toeplitz e de Vandermonde [37]). A matriz  $\mathbf{T} = (t_{i,j})_{i,j=0}^{M-1} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  é **de Toeplitz** quando  $t_{i+1,j+1} = t_{i,j}$ ,  $\forall (i,j) \in \mathcal{M}^2 \setminus \{M-1\}^2$ . Neste caso,  $\mathbf{T}$  possui a seguinte forma:

$$\mathbf{T} = (t_{i-j})_{i,j=0}^{M-1} = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{1-M} \\ t_1 & t_0 & \cdots & t_{2-M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{M-1} & t_{M-2} & \cdots & t_0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Além disso, a matriz  $\mathbf{V}_{\boldsymbol{\nu}} = (\nu_{i,j})_{i,j=0}^{M-1} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  é **de Vandermonde** quando  $\nu_{i,j} = (\nu_i)^j$ ,  $\forall (i,j) \in \mathcal{M}^2$ , em que  $\boldsymbol{\nu} = [\nu_0 \ \nu_1 \ \cdots \ \nu_{M-1}]^T$ . Neste caso  $\mathbf{V}_{\boldsymbol{\nu}}$  é denotada por:

$$\mathbf{V}_{\boldsymbol{\nu}} = [(\nu_i)^j]_{i,j=0}^{M-1} = \begin{bmatrix} \nu_0^0 & \nu_0^1 & \cdots & \nu_0^{M-1} \\ \nu_1^0 & \nu_1^1 & \cdots & \nu_1^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{M-1}^0 & \nu_{M-1}^1 & \cdots & \nu_{M-1}^{M-1} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

*Observação 2.* Sabe-se que as  $M$ -ésimas raízes de  $\xi \in \mathbb{C}$  podem ser escritas como:

$$\xi_m = |\xi|^{1/M} e^{\frac{\angle \xi}{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}m} = \xi_0 e^{-j\frac{2\pi}{M}m} = \xi_0 W_M^m, \quad \forall m \in \mathcal{M}, \quad (3.6)$$

em que  $W_M = e^{-j\frac{2\pi}{M}}$ ,  $j^2 = -1$  e  $\angle \xi \in (-\pi, \pi)$  é a fase de  $\xi$ . Sendo assim, definindo-se  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_0 \ \xi_1 \ \cdots \ \xi_{M-1}]^T$ , então sua correspondente matriz de Vandermonde é dada

por [16]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_\xi &= \begin{bmatrix} \xi_0^0 & \xi_0^1 & \cdots & \xi_0^{M-1} \\ \xi_1^0 & \xi_1^1 & \cdots & \xi_1^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{M-1}^0 & \xi_{M-1}^1 & \cdots & \xi_{M-1}^{M-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \xi_0^0 W_M^0 & \xi_0^1 W_M^0 & \cdots & \xi_0^{M-1} W_M^0 \\ \xi_0^0 W_M^0 & \xi_0^1 W_M^1 & \cdots & \xi_0^{M-1} W_M^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_0^0 W_M^0 & \xi_0^1 W_M^{M-1} & \cdots & \xi_0^{M-1} W_M^{(M-1)^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} W_M^0 & W_M^0 & \cdots & W_M^0 \\ W_M^0 & W_M^1 & \cdots & W_M^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_M^0 & W_M^{M-1} & \cdots & W_M^{(M-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0^0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_0^1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \xi_0^{M-1} \end{bmatrix} \\
&= \sqrt{M} \mathbf{W}_M \text{diag}\{\xi_0^m\}_{m=0}^{M-1}, \tag{3.7}
\end{aligned}$$

em que  $\mathbf{W}_M \in \mathbb{C}^{M \times M}$  é a matriz normalizada de DFT [21].

Com a definição formal da matriz de Toeplitz, é possível introduzir o conceito de **matriz de Toeplitz-Bézout**, ou, simplesmente, **matriz t-bezoutiana**, ou, ainda, **t-bezoutiano**. Isso é feito na Definição 5.

**Definição 5** (Matrizes T-Bezoutianas [16]). A inversa de uma matriz de Toeplitz inversível é uma **matriz t-bezoutiana**.

Conforme foi destacado no Capítulo 2, o propósito deste trabalho é explorar a estrutura da matriz efetiva de canal  $\mathbf{H}_0$  (vide equação (2.36)) com o intuito de desenvolver transceptores eficientes e que utilizem redundância mínima (isto é,  $K = L/2$ ). No caso da solução ZF, por exemplo, a estratégia é utilizar uma abordagem similar à utilizada nos sistemas ZF-OFDM e ZF-SC-FD. Tal abordagem consiste em deduzir uma decomposição para a inversa da matriz efetiva de canal. Uma vez que  $\mathbf{H}_0$  é uma matriz de Toeplitz, busca-se uma decomposição de matrizes t-bezoutianas, as quais são comumente denotadas por  $\mathbf{B} \in \mathfrak{B} \subset \mathbb{C}^{M \times M}$ , em que  $\mathfrak{B}$  é a classe de todas as matrizes t-bezoutianas inversíveis  $M \times M$ .

Além de matrizes t-bezoutianas, outra importante matriz estruturada que será

utilizada nesta dissertação é a **matriz de Cauchy**, ou, ainda, **matriz de Pick**, cuja descrição formal está na Definição 6.

**Definição 6** (Matrizes de Cauchy [16]). A matriz  $\mathbf{C} = (c_{i,j})_{i,j=0}^{M-1}$  é uma matriz de **Cauchy** em relação a  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_0 \ \xi_1 \ \cdots \ \xi_{M-1}]^T \in \mathbb{C}^M$  e  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_0 \ \eta_1 \ \cdots \ \eta_{M-1}]^T \in \mathbb{C}^M$ , se o posto da matriz  $\Delta_{\mathbf{D}_\xi, \mathbf{D}_\eta}(\mathbf{C})$  é menor ou igual a 2.

Usualmente, uma matriz de Cauchy é denotada por  $\mathbf{C} \in \mathfrak{C}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \subset \mathbb{C}^{M \times M}$ , em que  $\mathfrak{C}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  é a classe associada a  $\boldsymbol{\xi}$  e  $\boldsymbol{\eta}$  de todas as matrizes de Cauchy inversíveis  $M \times M$ . Além disso, uma matriz de Cauchy é, na verdade, um caso particular de uma **matriz de Cauchy generalizada**<sup>1</sup>. De fato, a definição tradicional de matrizes de Cauchy [16] associadas a  $\boldsymbol{\xi}$  e  $\boldsymbol{\eta}$  é dada por  $c_{ij} = 1/(1 - \xi_i \eta_j)$ ,  $\forall (i, j) \in \mathcal{M}^2$ , onde é assumido que  $\xi_i \eta_j \neq 1$ , enquanto que uma matriz de Cauchy generalizada é aquela em que o posto da matriz  $\Delta_{\mathbf{D}_\xi, \mathbf{D}_\eta}(\mathbf{C}) = [(1 - \xi_i \eta_j) c_{ij}]_{i,j=0}^{M-1}$  é muito menor do que  $M$ .

Agora, é possível aplicar os operadores de deslocamento às matrizes desta seção com o intuito de verificar se elas, de fato, podem ser compactadas ou comprimidas. A primeira matriz a ser estudada é a matriz de Toeplitz. Considere o operador de

---

<sup>1</sup>Há muitos outros tipos de bezoutianos e de matrizes de Cauchy generalizadas. Esses outros tipos estão relacionados, por exemplo, a matrizes de Hankel, a matrizes de Toeplitz-mais-Hankel, etc. Nestes casos, utilizam-se as seguintes denominações: matrizes h-bezoutianas, (t+h)-bezoutianas, matrizes de H-Cauchy, matrizes de (T+H)-Cauchy, etc. Em especial, uma matriz de Cauchy tal que  $[(1 - \xi_i \eta_j) c_{ij}]_{i,j=0}^{M-1}$  tenha posto exatamente igual a 2 é chamada de **matriz de Lowner** [17]. Uma discussão mais aprofundada e completa deste assunto pode ser encontrada em [16].

Sylvester  $\nabla_{\mathbf{z}_\eta, \mathbf{z}_\xi}$  aplicado à matriz de Toeplitz  $\mathbf{T}$ , em que  $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{z}_\eta, \mathbf{z}_\xi}(\mathbf{T}) &= \mathbf{Z}_\eta \mathbf{T} - \mathbf{T} \mathbf{Z}_\xi \\
&= \begin{bmatrix} \eta t_{M-1} & \eta t_{M-2} & \cdots & \eta t_0 \\ t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{1-M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{M-2} & t_{M-1} & \cdots & t_{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_{-1} & \cdots & t_{1-M} & \xi t_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \xi t_1 \\ t_{M-3} & \cdots & t_{-1} & \vdots \\ t_{M-2} & \cdots & t_0 & \xi t_{M-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \eta t_{M-1} - t_{-1} & \cdots & \eta t_1 - t_{1-M} & \eta t_0 - \xi t_0 \\ 0 & \cdots & 0 & t_{1-M} - \xi t_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{-1} - \xi t_{M-1} \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{p}}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \eta t_{M-1} - t_{-1} & \cdots & \eta t_1 - t_{1-M} & \eta t_0 \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{q}}_1^T} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\xi t_0 \\ t_{1-M} - \xi t_1 \\ \vdots \\ t_{-1} - \xi t_{M-1} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{p}}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{q}}_2^T} \\
&= \hat{\mathbf{p}}_1 \hat{\mathbf{q}}_1^T + \hat{\mathbf{p}}_2 \hat{\mathbf{q}}_2^T = [\hat{\mathbf{p}}_1 \ \hat{\mathbf{p}}_2] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1^T \\ \hat{\mathbf{q}}_2^T \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{Q}}^T. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Portanto, é trivial concluir que uma matriz de Toeplitz pode ser comprimida. O mesmo ocorre com matrizes de Vandermonde,  $\mathbf{V}_\nu = (\nu_i^j)_{i,j=0}^{M-1}$ , e matrizes tradicionais de Cauchy,  $\mathbf{C} = [1/(1 - \xi_i \eta_j)]_{i,j=0}^{M-1}$ , conforme é mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{D}_\nu, \mathbf{Z}_0}(\mathbf{V}_\nu) &= \mathbf{D}_\nu \mathbf{V}_\nu - \mathbf{V}_\nu \mathbf{Z}_0 \\
&= \begin{bmatrix} \nu_0 & \cdots & \nu_0^{M-1} & \nu_0^M \\ \nu_1 & \cdots & \nu_1^{M-1} & \nu_1^M \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \nu_{M-1} & \cdots & \nu_{M-1}^{M-1} & \nu_{M-1}^M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu_0 & \cdots & \nu_0^{M-1} & 0 \\ \nu_1 & \cdots & \nu_1^{M-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \nu_{M-1} & \cdots & \nu_{M-1}^{M-1} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \nu_0^M \\ 0 & \cdots & 0 & \nu_1^M \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \nu_{M-1}^M \end{bmatrix}, \tag{3.9}
\end{aligned}$$

a qual é uma matriz de posto unitário; e

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbf{D}_\xi, \mathbf{D}_\eta}(\mathbf{C}) &= \mathbf{C} - \mathbf{D}_\xi \mathbf{C} \mathbf{D}_\eta \\ &= \left( \frac{1}{1 - \xi_i \eta_j} \right)_{i,j=0}^{M-1} - \left( \frac{\xi_i \eta_j}{1 - \xi_i \eta_j} \right)_{i,j=0}^{M-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.10)\end{aligned}$$

que também é uma matriz de posto unitário.

A Proposição 5 contém um importante resultado: a relação entre os geradores de deslocamento de uma matriz de Toeplitz e de sua inversa. Embora as referências bibliográficas [16], [18] e [17] utilizem este resultado, não há uma proposição geral nessas referências tal qual a que se segue.

**Proposição 5** (Geradores de Matrizes de Toeplitz & T-Bezoutiana). *Dada uma matriz de Toeplitz inversível  $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  e dado o par gerador de deslocamento  $(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{Q}})$  relacionado ao operador de deslocamento de Sylvester  $\nabla_{\mathbf{z}_\eta, \mathbf{z}_\xi}$  aplicado a  $\mathbf{T}$ , onde  $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ , tem-se que o par gerador de deslocamento  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  relacionado ao operador de deslocamento de Sylvester  $\nabla_{\mathbf{z}_\xi, \mathbf{z}_\eta}$  aplicado à matriz t-bezoutiana  $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}$  é dado por  $(-\mathbf{B}\hat{\mathbf{P}}, \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{Q}})$ .*

*Demonstração.* Uma vez que  $\nabla_{\mathbf{z}_\eta, \mathbf{z}_\xi}(\mathbf{T}) = \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{Q}}^T = \hat{\mathbf{p}}_1\hat{\mathbf{q}}_1^T + \hat{\mathbf{p}}_2\hat{\mathbf{q}}_2^T$ , então, com base na Proposição 2, tem-se que:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{z}_\xi, \mathbf{z}_\eta}(\mathbf{B}) &= -\mathbf{B}\nabla_{\mathbf{z}_\eta, \mathbf{z}_\xi}(\mathbf{T})\mathbf{B} \\ &= \underbrace{(-\mathbf{B}\hat{\mathbf{p}}_1)}_{\mathbf{p}_1} \underbrace{(\mathbf{B}^T \hat{\mathbf{q}}_1^T)}_{\mathbf{q}_1^T} + \underbrace{(-\mathbf{B}\hat{\mathbf{p}}_2)}_{\mathbf{p}_2} \underbrace{(\mathbf{B}^T \hat{\mathbf{q}}_2^T)}_{\mathbf{q}_2^T} \\ &= \mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1^T + \mathbf{p}_2 \mathbf{q}_2^T = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^T \quad (3.11)\end{aligned}$$

□

Essa proposição descreve a **primeira operação** que é possível realizar após comprimir uma dada matriz de Toeplitz.

*Observação 3.* Através da Proposição 5, é possível verificar que uma matriz t-bezoutiana possui posto de deslocamento no máximo igual a 2. Porém, também é possível definir o conceito de **matriz de Bézout generalizada**, ou, simplesmente,

**matriz bezoutiana generalizada**, ou, ainda, **bezoutiano generalizado** [16], como sendo a matriz  $\mathbf{B}$  tal que  $\nabla_{\mathbf{z}_\xi, \mathbf{z}_\eta}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}\mathbf{Q}^T$ , com  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \in \mathbb{C}^{M \times R} \times \mathbb{C}^{M \times R}$  e  $R \ll M$ .

### 3.3 Representação de Matrizes Bezoutianas através de DFTs

O objetivo desta seção é apresentar os principais resultados matemáticos que são extremamente úteis para o projeto de transceptores em bloco com redundância mínima baseados em DFT. Para tanto, são deduzidas decomposições de matrizes bezoutianas que utilizam apenas matrizes de DFT, de IDFT e matrizes diagonais. Tais decomposições são motivadas pelos sistemas tradicionais ZF-OFDM e ZF-SC-FD, os quais decompõem inversas de matrizes circulantes utilizando os mesmos tipos de matrizes.

#### 3.3.1 Representações de Matrizes de Cauchy de Posto Unitário

Uma das principais vantagens das matrizes de Cauchy refere-se à sua propriedade de possuir decomposições eficientes. A Proposição 6, a qual é descrita sem demonstração em [16], mostra como uma matriz de Cauchy tradicional pode ser decomposta utilizando-se apenas matrizes de DFT e matrizes diagonais.

**Proposição 6** (Representação de Matrizes de Cauchy através de DFT [16]). *Para todos  $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ , em que  $\xi\eta \neq 1$ , tem-se*

$$\left[ \frac{1}{1 - \xi_i \eta_j} \right]_{(i,j) \in \mathcal{M}^2} = \mathbf{C} = \frac{M}{1 - \xi\eta} \mathbf{W}_M (\text{diag}\{(\xi_0 \eta_0)^m\}_{m=0}^{M-1}) \mathbf{W}_M, \quad (3.12)$$

onde  $\xi_0 = |\xi|^{1/M} e^{\frac{\angle \xi}{M}}$ ,  $\eta_0 = |\eta|^{1/M} e^{\frac{\angle \eta}{M}}$ ,  $\xi_i = \xi_0 W_M^i$ , e  $\eta_j = \eta_0 W_M^j$ .

*Demonstração.* Dados  $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ , com  $\xi\eta \neq 1$ , sabe-se que  $\xi_i = \xi_0 W_M^i$  e  $\eta_j = \eta_0 W_M^j$ ,  $\forall (i, j) \in \mathcal{M}^2$ , são suas  $M$ -ésimas raízes, respectivamente. A partir da Observação 2, é fácil deduzir que  $\mathbf{V}_\xi = \sqrt{M} \mathbf{W}_M \text{diag}\{\xi_0^m\}_{m=0}^{M-1}$  e  $\mathbf{V}_\eta = \sqrt{M} \mathbf{W}_M \text{diag}\{\eta_0^m\}_{m=0}^{M-1}$ .



Agora, analisando-se o valor do  $ij$ -ésimo coeficiente da matriz  $\mathbf{V}_\xi \mathbf{V}_\eta^T$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{V}_\xi \mathbf{V}_\eta^T]_{ij} &= M [\mathbf{W}_M (\text{diag}\{(\xi_0 \eta_0)^m\}_{m=0}^{M-1}) \mathbf{W}_M^T]_{ij} \\
&= M [\mathbf{W}_M (\text{diag}\{(\xi_0 \eta_0)^m\}_{m=0}^{M-1}) \mathbf{W}_M]_{ij} \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} \xi_0^m \eta_0^m W_M^{im} W_M^{jm} = \frac{1 - (\xi_0 \eta_0 W_M^i W_M^j)^M}{1 - (\xi_0 W_M^i)(\eta_0 W_M^j)} \\
&= \frac{1 - \xi \eta}{1 - \xi_i \eta_j}. \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Assim, o resultado desejado segue trivialmente.  $\square$

Nessa proposição, a matriz  $\mathbf{C}$  é uma matriz de Cauchy de posto unitário que pode ser fatorada utilizando-se duas matrizes de DFT e uma matriz diagonal. Esse tipo de decomposição é bastante atrativo devido à sua capacidade de implementar produtos por vetores com um baixo custo computacional. Além disso, a restrição inicial de se ter  $\xi \eta \neq 1$  não é uma restrição forte porque este trabalho utiliza o caso particular em que  $\xi = 1$  e  $\eta = -1$  (vide Capítulo 4).

### 3.3.2 Transformação de Matrizes de Bézout em Matrizes de Cauchy

O objetivo desta subseção é transformar, de maneira computacionalmente eficiente, matrizes de Bézout em matrizes de Cauchy. Uma vez que se dispõe de uma representação simples de matrizes de Cauchy, é natural verificar se há conexões entre tais matrizes. De fato, este é o caso conforme é mostrado na Proposição 7. Esta proposição baseia-se num resultado similar de [16] que não é demonstrado. Entretanto, diferentemente da abordagem polinomial adotada em [16], este trabalho utiliza uma abordagem matricial que se baseia nos operadores de deslocamento de Sylvester e de Stein. Tal abordagem viabiliza a dedução de transformações entre matrizes de Bézout e de Cauchy sem a necessidade de estender com zeros as matrizes envolvidas, conforme é requerido em [16]. Com isso, é possível projetar transceptores multiportadoras, o que não é realizável utilizando-se exatamente a mesma formulação presente em [16]. Antes de descrever a Proposição 7, um resultado bastante útil é descrito no Lema 1. Este resultado é enunciado sem prova em [37].

**Lema 1.** Para todo  $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , tem-se que

$$\mathbf{Z}_\xi = \mathbf{V}_\xi^{-1} \mathbf{D}_\xi \mathbf{V}_\xi, \quad (3.14)$$

onde  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_0 \ \xi_1 \ \cdots \ \xi_{M-1}]^T$ ,  $\xi_0 = |\xi|^{1/M} e^{\frac{\xi}{M}}$  e  $\xi_i = \xi_0 W_M^i$ .

*Demonstração.* Primeiramente, considere que  $j \in \mathcal{M} \setminus \{M-1\}$ . Assim,  $[\mathbf{D}_\xi \mathbf{V}_\xi]_{ij} = \xi_i W_M^{ij} \xi_0^j = \xi_0 W_M^i W_M^{ij} \xi_0^j = W_M^{i(j+1)} \xi_0^{j+1} = [\mathbf{V}_\xi]_{i(j+1)}$ . Agora, considere que  $j = M-1$ . Nesse caso, tem-se  $[\mathbf{D}_\xi \mathbf{V}_\xi]_{i,(M-1)} = \xi_i W_M^{i(M-1)} \xi_0^{M-1} = W_M^{iM} \xi_0^M = \xi = \xi [\mathbf{V}_\xi]_{i,0}$ . Portanto, conclui-se que  $\mathbf{V}_\xi \mathbf{Z}_\xi = \mathbf{D}_\xi \mathbf{V}_\xi$  e, para o caso em que  $\xi \neq 0$ ,  $\mathbf{Z}_\xi = \mathbf{V}_\xi^{-1} \mathbf{D}_\xi \mathbf{V}_\xi$ .  $\square$

**Proposição 7** (Transformação de Matrizes de T-Bézout em Matrizes de Cauchy).

Para todos  $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ , com  $\eta \neq 0$ , se  $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}$ , então  $\mathbf{V}_\xi \mathbf{B} \mathbf{V}_\eta^T = \tilde{\mathbf{B}} \in \mathfrak{C}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ .

*Demonstração.* Como  $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}$ , então já é sabido que devem existir  $\mathbf{p}_r = [p_{0r} \ p_{1r} \ \cdots \ p_{(M-1)r}]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  e  $\mathbf{q}_r = [q_{0r} \ q_{1r} \ \cdots \ q_{(M-1)r}]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ , com  $r \in \{1, 2\}$ , de forma que o operador de deslocamento de Sylvester  $\nabla_{\mathbf{Z}_\xi, \mathbf{Z}_{1/\eta}}$  aplicado à  $\mathbf{B}$  pode ser escrito como  $\nabla_{\mathbf{Z}_\xi, \mathbf{Z}_{1/\eta}}(\mathbf{B}) = \mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1^T + \mathbf{p}_2 \mathbf{q}_2^T = \mathbf{P} \mathbf{Q}^T$ , onde  $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2]$  e  $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2]$ . Agora, considere o operador de deslocamento de Stein  $\Delta_{\mathbf{D}_\xi, \mathbf{D}_\eta}$  aplicado à  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{V}_\xi \mathbf{B} \mathbf{V}_\eta^T$ . Então, utilizando-se os resultados do Lema 1, da Proposição 1, e o fato de que  $\mathbf{Z}_\lambda^{-1} = \mathbf{Z}_{1/\lambda}^T, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{D}_\xi, \mathbf{D}_\eta}(\tilde{\mathbf{B}}) &= \Delta_{(\mathbf{V}_\xi \mathbf{Z}_\xi \mathbf{V}_\xi^{-1}), (\mathbf{V}_\eta^{-T} \mathbf{Z}_\eta^T \mathbf{V}_\eta^T)}(\tilde{\mathbf{B}}) \\ &= \mathbf{V}_\xi \mathbf{B} \mathbf{V}_\eta^T - (\mathbf{V}_\xi \mathbf{Z}_\xi \mathbf{V}_\xi^{-1}) (\mathbf{V}_\xi \mathbf{B} \mathbf{V}_\eta^T) (\mathbf{V}_\eta^{-T} \mathbf{Z}_\eta^T \mathbf{V}_\eta^T) \\ &= \mathbf{V}_\xi (\mathbf{B} - \mathbf{Z}_\xi \mathbf{B} \mathbf{Z}_\eta^T) \mathbf{V}_\eta^T \\ &= \mathbf{V}_\xi \Delta_{\mathbf{Z}_\xi, \mathbf{Z}_\eta^T}(\mathbf{B}) \mathbf{V}_\eta^T \\ &= -\mathbf{V}_\xi \nabla_{\mathbf{Z}_\xi, \mathbf{Z}_{1/\eta}}(\mathbf{B}) \mathbf{Z}_\eta^T \mathbf{V}_\eta^T \\ &= \underbrace{(-\mathbf{V}_\xi \mathbf{p}_1)}_{\tilde{\mathbf{p}}_1} \underbrace{(\mathbf{V}_\eta \mathbf{Z}_\eta \mathbf{q}_1)^T}_{\tilde{\mathbf{q}}_1^T} + \underbrace{(-\mathbf{V}_\xi \mathbf{p}_2)}_{\tilde{\mathbf{p}}_2} \underbrace{(\mathbf{V}_\eta \mathbf{Z}_\eta \mathbf{q}_2)^T}_{\tilde{\mathbf{q}}_2^T} \\ &= \tilde{\mathbf{p}}_1 \tilde{\mathbf{q}}_1^T + \tilde{\mathbf{p}}_2 \tilde{\mathbf{q}}_2^T = \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{Q}}^T, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde  $\tilde{\mathbf{p}}_r = -\mathbf{V}_\xi \mathbf{p}_r$  e  $\tilde{\mathbf{q}}_r = \mathbf{V}_\eta \mathbf{Z}_\eta \mathbf{q}_r$ , com  $r \in \{1, 2\}$ . Nesse caso, é fácil verificar que o posto de Stein de  $\tilde{\mathbf{B}}$  é menor do que ou igual a 2, o que implica que  $\tilde{\mathbf{B}} \in \mathfrak{C}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  (vide Definição 6).  $\square$

Como um subproduto dessa proposição, é fácil verificar a validade do seguinte corolário, o qual se baseia em um resultado similar de [16].

**Corolário 1.** *Para todos  $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ , com  $\xi\eta \neq 1$  e  $\eta \neq 0$ , se  $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}$ , com  $\nabla_{\mathbf{z}_\xi, \mathbf{z}_{1/\eta}}(\mathbf{B}) = \mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1^T + \mathbf{p}_2 \mathbf{q}_2^T$ , onde  $\mathbf{p}_r, \mathbf{q}_r \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ , então*

$$\left[ \tilde{\mathbf{B}} \right]_{ij} = \frac{\tilde{p}_{i1} \tilde{q}_{j1} + \tilde{p}_{i2} \tilde{q}_{j2}}{1 - \xi_i \eta_j}, \quad (3.16)$$

em que  $\mathbf{V}_\xi \mathbf{B} \mathbf{V}_\eta^T = \tilde{\mathbf{B}} \in \mathfrak{C}(\xi, \eta)$ ,  $\Delta_{\mathbf{D}_\xi, \mathbf{D}_\eta}(\tilde{\mathbf{B}}) = \tilde{\mathbf{p}}_1 \tilde{\mathbf{q}}_1^T + \tilde{\mathbf{p}}_2 \tilde{\mathbf{q}}_2^T$ ,  $\tilde{\mathbf{p}}_r = [\tilde{p}_{0r} \tilde{p}_{1r} \cdots \tilde{p}_{(M-1)r}]^T = -\mathbf{V}_\xi \mathbf{p}_r$ ,  $\tilde{\mathbf{q}}_r = [\tilde{q}_{0r} \tilde{q}_{1r} \cdots \tilde{q}_{(M-1)r}]^T = \mathbf{V}_\eta \mathbf{z}_\eta \mathbf{q}_r$ , com  $r \in \{1, 2\}$ ,  $\xi_0 = |\xi|^{1/M} e^{\frac{j\xi}{M}}$ ,  $\eta_0 = |\eta|^{1/M} e^{\frac{j\eta}{M}}$ ,  $\xi_i = \xi_0 W_M^i$  e  $\eta_j = \eta_0 W_M^j$ .

*Observação 4.* A demonstração da Proposição 7 juntamente com o Corolário 1 também revelam um resultado muito interessante: dada uma matriz  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  (bezoutiano generalizado), tal que  $\nabla_{\mathbf{z}_\xi, \mathbf{z}_{1/\eta}}(\mathbf{B}) = \mathbf{P} \mathbf{Q}^T$ , onde  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \in \mathbb{C}^{M \times R} \times \mathbb{C}^{M \times R}$  e  $R \in \mathbb{N}$ , então  $\mathbf{V}_\xi \mathbf{B} \mathbf{V}_\eta^T = \tilde{\mathbf{B}}$  é tal que

$$\left[ \tilde{\mathbf{B}} \right]_{ij} = \frac{[\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{Q}}^T]_{ij}}{1 - \xi_i \eta_j}, \quad (3.17)$$

com  $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{Q}}) = (-\mathbf{V}_\xi \mathbf{P}, \mathbf{V}_\eta \mathbf{z}_\eta \mathbf{Q})$  e  $\xi_i, \eta_j$  são definidos da mesma maneira como o foram no Corolário 1. Nesse caso, pode-se ter  $R \neq 2$ .

A Proposição 7 representa a **segunda operação** que pode ser realizada após a compressão de uma dada matriz de Toeplitz. Além disso, o Corolário 1 junto com a Proposição 6 descrevem o estágio de **descompressão**.

### 3.3.3 Representações de Bezoutianos

Agora, todas as ferramentas básicas para enunciar e demonstrar um dos principais resultados teóricos desta dissertação estão disponíveis. Este resultado descreve como decompor a inversa de uma matriz de Toeplitz empregando-se apenas matrizes de DFT, de IDFT e matrizes diagonais. Novamente deve ser ressaltado que este teorema se baseia em um resultado similar de [16]. Entretanto, diferentemente do artigo referido, a abordagem adotada aqui permite a dedução de representações de bezoutianos sem a obrigatoriedade de se estender tais bezoutianos com zeros, conforme é requerido em [16]. Esta é a característica principal que viabiliza o projeto de transceptores multiportadoras, já que, com a extensão com zeros, só seria possível o projeto de transceptores monoportadora.

**Teorema 1** (Resultado Principal). *Para todos  $\xi, \eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , com  $\xi\eta \neq 1$ , se  $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}$ , com  $\nabla_{\mathbf{z}_\xi, \mathbf{z}_{1/\eta}}(\mathbf{B}) = \mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1^T + \mathbf{p}_2 \mathbf{q}_2^T$ , em que  $\mathbf{p}_r, \mathbf{q}_r \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ , então*

$$\mathbf{B} = \frac{M}{1 - \xi\eta} \mathbf{V}_\xi^{-1} \left[ \sum_{r=1}^2 \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{p}}_r} \mathbf{W}_M (\text{diag}\{(\xi_0 \eta_0)^m\}_{m=0}^{M-1}) \mathbf{W}_M \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{q}}_r} \right] \mathbf{V}_\eta^{-T}, \quad (3.18)$$

onde  $\tilde{\mathbf{p}}_r = -\mathbf{V}_\xi \mathbf{p}_r$  e  $\tilde{\mathbf{q}}_r = \mathbf{V}_\eta \mathbf{z}_\eta \mathbf{q}_r$ , com  $r \in \{1, 2\}$ .

*Demonstração.* Pelo Corolário 1, tem-se que:

$$\mathbf{V}_\xi \mathbf{B} \mathbf{V}_\eta^T = \tilde{\mathbf{B}} = \sum_{r=1}^2 \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{p}}_r} \mathbf{C} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{q}}_r}, \quad (3.19)$$

onde  $\mathbf{C} = [1/(1 - \xi_i \eta_j)]_{(i,j) \in \mathcal{M}^2}$ ,  $\xi_0 = |\xi|^{1/M} e^{\frac{\angle \xi}{M}}$ ,  $\eta_0 = |\eta|^{1/M} e^{\frac{\angle \eta}{M}}$ ,  $\xi_i = \xi_0 W_M^i$ ,  $\eta_j = \eta_0 W_M^j$ ,  $\tilde{\mathbf{p}}_r = -\mathbf{V}_\xi \mathbf{p}_r$  e  $\tilde{\mathbf{q}}_r = \mathbf{V}_\eta \mathbf{z}_\eta \mathbf{q}_r$ , em que  $r \in \{1, 2\}$ . Agora, aplicando-se a Proposição 6 e isolando-se  $\mathbf{B}$ , segue-se o resultado esperado.  $\square$

*Observação 5.* Note que, utilizando-se os mesmos passos da demonstração do Teorema 1, juntamente com a Observação 4, não é difícil mostrar que: para todos  $\xi, \eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , com  $\xi\eta \neq 1$ , se  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  (bezoutiano generalizado) é tal que  $\nabla_{\mathbf{z}_\xi, \mathbf{z}_{1/\eta}}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}\mathbf{Q}$ , onde  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \in \mathbb{C}^{M \times R} \times \mathbb{C}^{M \times R}$  e  $R \in \mathbb{N}$ , então

$$\mathbf{B} = \frac{M}{1 - \xi\eta} \mathbf{V}_\xi^{-1} \left[ \sum_{r=1}^R \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{p}}_r} \mathbf{W}_M (\text{diag}\{(\xi_0 \eta_0)^m\}_{m=0}^{M-1}) \mathbf{W}_M \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{q}}_r} \right] \mathbf{V}_\eta^{-T}, \quad (3.20)$$

com  $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{Q}}) = (-\mathbf{V}_\xi \mathbf{P}, \mathbf{V}_\eta \mathbf{z}_\eta \mathbf{Q})$ ,  $\tilde{\mathbf{P}} = [\tilde{\mathbf{p}}_1 \ \cdots \ \tilde{\mathbf{p}}_R]$  e  $\tilde{\mathbf{Q}} = [\tilde{\mathbf{q}}_1 \ \cdots \ \tilde{\mathbf{q}}_R]$ .

## 3.4 Representação de Matrizes Bezoutianas

### Centro-Simétricas através de DHTs

O objetivo desta seção é descrever uma forma alternativa de decompor matrizes de Bézout. A motivação para isso encontra-se no fato de que diferentes decomposições são traduzidas em diferentes projetos dos bancos de filtros de análise e de síntese dos transceptores multicanais que implementam os sistemas de transmissão em bloco com redundância mínima. Tais diferenças nos bancos de filtros podem, eventualmente, implicar diferenças de desempenho em sistemas que se baseiam em decomposições distintas.

De forma análoga às representações descritas na Seção 3.3, serão deduzidas decomposições de matrizes bezoutianas centro-simétricas com base em quatro versões diferentes da transformada discreta de Hartley. Uma matriz  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  é uma **matriz centro-simétrica** quando  $\mathbf{B} = \mathbf{J}\mathbf{B}\mathbf{J}$ , onde

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{e}_M \ \mathbf{e}_{M-1} \ \cdots \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_1]. \quad (3.21)$$

É possível mostrar que toda matriz simétrica é uma matriz centro-simétrica.

A transformada de Hartley foi escolhida por dois motivos principais: (i) assim como a DFT, ela também possui algoritmos super-rápidos para a sua implementação e (ii) já existiam resultados na literatura de decomposições de bezoutianos utilizando DHT [18], [17] com uma abordagem similar à utilizada no caso das decomposições utilizando DFT.

A representação de bezoutianos centro-simétricos por meio da transformada discreta de Hartley exige que sejam definidas outras três transformadas que consistem em ligeiras modificações da tradicional DHT [21] e que, portanto, também serão denominadas DHTs [18], [17]. A Definição 7 introduz as matrizes associadas a tais transformações lineares.

**Definição 7** (DHTs [18]). As matrizes ortogonais das transformadas discretas de Hartley  $X$ , em que  $X \in \{\text{I, II, III, IV}\}$ , são definidas por:

$$\mathcal{H}_{\text{I}} = \frac{1}{\sqrt{M}} \left[ \text{sen} \left( \frac{2ij\pi}{M} \right) + \cos \left( \frac{2ij\pi}{M} \right) \right]_{i,j=0}^{M-1}, \quad (3.22)$$

$$\mathcal{H}_{\text{II}} = \frac{1}{\sqrt{M}} \left[ \text{sen} \left( \frac{i(2j+1)\pi}{M} \right) + \cos \left( \frac{i(2j+1)\pi}{M} \right) \right]_{i,j=0}^{M-1}, \quad (3.23)$$

$$\mathcal{H}_{\text{III}} = \frac{1}{\sqrt{M}} \left[ \text{sen} \left( \frac{(2i+1)j\pi}{M} \right) + \cos \left( \frac{(2i+1)j\pi}{M} \right) \right]_{i,j=0}^{M-1}, \quad (3.24)$$

$$\mathcal{H}_{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{M}} \left[ \text{sen} \left( \frac{(2i+1)(2j+1)\pi}{2M} \right) + \cos \left( \frac{(2i+1)(2j+1)\pi}{2M} \right) \right]_{i,j=0}^{M-1} \quad (3.25)$$

Note que  $\mathcal{H}_X^{-1} = \mathcal{H}_X^T$ ,  $\forall X \in \{\text{I, II, III, IV}\}$ , e  $\mathcal{H}_{\text{II}}^T = \mathcal{H}_{\text{III}}$ .

As matrizes de DHTs estão diretamente associadas a matrizes de DFTs modificadas, conforme é descrito na Definição 8.

**Definição 8** (DFTs [18]). As matrizes unitárias das transformadas discretas de Fourier  $X$ , em que  $X \in \{I, II, III, IV\}$ , são definidas por:

$$\mathbf{W}_I = \frac{1}{\sqrt{M}} \left[ \text{sen} \left( \frac{2ij\pi}{M} \right) - j \cos \left( \frac{2ij\pi}{M} \right) \right]_{i,j=0}^{M-1}, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{W}_{II} = \frac{1}{\sqrt{M}} \left[ \text{sen} \left( \frac{i(2j+1)\pi}{M} \right) - j \cos \left( \frac{i(2j+1)\pi}{M} \right) \right]_{i,j=0}^{M-1}, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{W}_{III} = \frac{1}{\sqrt{M}} \left[ \text{sen} \left( \frac{(2i+1)j\pi}{M} \right) - j \cos \left( \frac{(2i+1)j\pi}{M} \right) \right]_{i,j=0}^{M-1}, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{W}_{IV} = \frac{1}{\sqrt{M}} \left[ \text{sen} \left( \frac{(2i+1)(2j+1)\pi}{2M} \right) - j \cos \left( \frac{(2i+1)(2j+1)\pi}{2M} \right) \right]_{i,j=0}^{M-1} \quad (3.29)$$

Note que  $\mathbf{W}_X^{-1} = \mathbf{W}_X^H$ ,  $\forall X \in \{I, II, III, IV\}$ , e  $\mathbf{W}_{II}^T = \mathbf{W}_{III}$ .

### 3.4.1 Representação de Matrizes de Cauchy de Posto Dois

Diferentemente da decomposição de matrizes bezoutianas baseadas em DFT (Subseção 3.3.1), a decomposição utilizando DHTs necessita de uma representação eficiente de matrizes de Cauchy de posto igual a dois (no lugar de matrizes de Cauchy tradicionais, cujo posto é unitário).

A Proposição 8 é um resultado demonstrado em [18], [17] e, portanto, não será provado aqui. Ele mostra como decompor uma importante matriz de Cauchy de posto igual a dois que aparece nas representações de bezoutianos centro-simétricos (vide Subseção 3.4.2).

**Proposição 8.** *As transformadas de Hartley  $\mathcal{H}_{II}$  e  $\mathcal{H}_{IV}$  respeitam a seguinte relação:*

$$[\mathcal{H}_{II}\mathcal{H}_{IV}]_{ij} = \frac{1}{M} \frac{1}{\text{sen} \left( \frac{(2i+2j+1)\pi}{2M} \right)}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{M}^2. \quad (3.30)$$

Conforme é demonstrado em [18], a matriz  $\mathcal{H}_{II}\mathcal{H}_{IV}$  é uma matriz de Cauchy de posto igual a dois, também conhecida como matriz de Lowner.

### 3.4.2 Transformação de Matrizes de Bézout Centro-Simétricas em Matrizes de Cauchy

Seguindo um procedimento similar ao adotado na Subseção 3.3.2, será mostrado nesta subseção como transformar uma matriz bezoutiana centro-simétrica em uma

matriz de Lowner, tendo em vista que já se dispõe de uma representação eficiente utilizando DHTs desta última matriz. Porém, antes de atacar este problema, serão necessários alguns resultados preliminares que facilitam a dedução de tal transformação entre matrizes.

As Definições 7 e 8 possuem conexões em alguns casos particulares, conforme fica evidenciado no Lema 2, o qual é enunciado e demonstrado em [18] e [17].

**Lema 2.** *Se  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  é uma matriz centro-simétrica, então*

$$\mathcal{H}_{\text{II}} \mathbf{B} \mathcal{H}_{\text{IV}} = j \mathbf{W}_{\text{II}} \mathbf{B} \mathbf{W}_{\text{IV}}. \quad (3.31)$$

Além desse lema, um outro resultado importante para esta subseção é o Lema 3, o qual descreve um resultado similar ao apresentado no Lema 1, mas agora utilizando as matrizes de DFT modificadas. Este resultado não foi retirado das referências bibliográficas desta dissertação.

**Lema 3.** *As quatro matrizes de DFT respeitam as seguintes identidades:*

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{W}_{\text{I}}^H \mathbf{D}_1 \mathbf{W}_{\text{I}} = \mathbf{W}_{\text{II}}^H \mathbf{D}_1 \mathbf{W}_{\text{II}}, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{Z}_{-1} = \mathbf{W}_{\text{III}}^H \mathbf{D}_{-1} \mathbf{W}_{\text{III}} = \mathbf{W}_{\text{IV}}^H \mathbf{D}_{-1} \mathbf{W}_{\text{IV}}, \quad (3.33)$$

onde  $\mathbf{D}_1 = \text{diag} \{W_M^m\}_{m=0}^{M-1}$  contém todas as  $M$ -ésimas raízes da unidade e  $\mathbf{D}_{-1} = \text{diag} \{W_M^m \exp(-j\frac{\pi}{M})\}_{m=0}^{M-1}$  contém todas as  $M$ -ésimas raízes de  $-1$ , com  $W_M = \exp(-j\frac{2\pi}{M})$ .

*Demonstração.* Considere primeiramente que  $j \in \mathcal{M} \setminus \{M-1\}$ . Assim,  $[\mathbf{D}_1 \mathbf{W}_{\text{I}}]_{ij} = W_M^i W_M^{ij} = W_M^{i(j+1)} = [\mathbf{W}_{\text{I}}]_{i(j+1)} = [\mathbf{W}_{\text{I}} \mathbf{Z}_1]_{ij}$ . A seguir, considere que  $j = M-1$ . Neste caso, tem-se que  $[\mathbf{D}_1 \mathbf{W}_{\text{I}}]_{i(M-1)} = W_M^i W_M^{i(M-1)} = W_M^{iM} = 1 = [\mathbf{W}_{\text{I}}]_{i0} = [\mathbf{W}_{\text{I}} \mathbf{Z}_1]_{i(M-1)}$ . As outras três identidades podem ser demonstradas de modo análogo.  $\square$

Por fim, o Lema 4 é um resultado de [18] e [17] que descreve como as matrizes de DFT modificadas se relacionam entre si.

**Lema 4.** *As quatro matrizes de DFT respeitam as seguintes identidades:*

$$\mathbf{W}_{\text{II}} = \text{diag} \left\{ e^{(-j\frac{\pi}{M}m)} \right\}_{m=0}^{M-1} \mathbf{W}_{\text{I}}, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{W}_{\text{IV}} = \text{diag} \left\{ e^{(-j\frac{\pi}{2M}(2m+1))} \right\}_{m=0}^{M-1} \mathbf{W}_{\text{III}}. \quad (3.35)$$

Os resultados anteriores são os fundamentos matemáticos para a Proposição 9, a qual constitui a primeira inovação desta seção. Ela se baseia em um resultado similar presente em [18] e [17]. Porém, diferentemente da abordagem polinomial adotada em [18] e [17], foi escolhida uma abordagem matricial que utiliza os conceitos de operadores de deslocamento de Sylvester e de Stein. Por conta dessa diferenciação, foi possível desenvolver transceptores que empregam matrizes de DHT no transmissor e que, portanto, funcionam como sistemas multiportadoras. Mais uma vez, isso não seria possível caso fosse empregada a extensão com zeros das matrizes bezoutianas, a qual é realizada em [18] e [17]. Além dessa característica, a Proposição 9 não se limita ao caso de matrizes bezoutianas reais, conforme é feito em [18] e [17].

**Proposição 9.** *Dada uma matriz centro-simétrica  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ , tal que  $\nabla_{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_{-1}}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}\mathbf{Q}^T$ , onde  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \in \mathbb{C}^{M \times R} \times \mathbb{C}^{M \times R}$  e  $R \in \mathbb{N}$ , então  $\mathcal{H}_{\text{II}}\mathbf{B}\mathcal{H}_{\text{IV}} = \tilde{\mathbf{B}}$  é tal que*

$$\Delta_{\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_{-1}}(\tilde{\mathbf{B}}) = \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{Q}}^T, \quad (3.36)$$

onde  $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{Q}}) = (-j\mathbf{W}_{\text{II}}\mathbf{P}, \mathbf{W}_{\text{IV}}\mathbf{z}_{-1}\mathbf{Q})$ . Além disso,  $\tilde{\mathbf{B}}$  pode ser expresso como

$$[\tilde{\mathbf{B}}]_{ij} = \frac{[(-\mathbf{W}_{\text{I}}\mathbf{P})(\mathbf{W}_{\text{III}}\mathbf{z}_{-1}\mathbf{Q})^T]_{ij}}{2\text{sen}\left(\frac{(2i+2j+1)\pi}{2M}\right)}. \quad (3.37)$$

*Demonstração.* Aplicando-se os resultados dos Lemas 2 e 3, da Proposição 1, além do fato  $\mathbf{z}_\lambda^{-1} = \mathbf{z}_{1/\lambda}^T, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , tem-se que o operador deslocamento de Stein  $\Delta_{\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_{-1}}$  aplicado a  $\tilde{\mathbf{B}}$  é dado por

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_{-1}}(\mathcal{H}_{\text{II}}\mathbf{B}\mathcal{H}_{\text{IV}}) &= \Delta_{\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_{-1}}(j\mathbf{W}_{\text{II}}\mathbf{B}\mathbf{W}_{\text{IV}}) \\ &= \Delta_{(\mathbf{w}_{\text{II}}\mathbf{z}_1\mathbf{w}_{\text{II}}^H), (\mathbf{w}_{\text{IV}}^*\mathbf{z}_{-1}^T\mathbf{w}_{\text{IV}}^T)}(j\mathbf{W}_{\text{II}}\mathbf{B}\mathbf{W}_{\text{IV}}) \\ &= j\mathbf{W}_{\text{II}}\mathbf{B}\mathbf{W}_{\text{IV}} - (\mathbf{W}_{\text{II}}\mathbf{z}_1\mathbf{W}_{\text{II}}^H)(j\mathbf{W}_{\text{II}}\mathbf{B}\mathbf{W}_{\text{IV}})(\mathbf{W}_{\text{IV}}^*\mathbf{z}_{-1}^T\mathbf{W}_{\text{IV}}^T) \\ &= j\mathbf{W}_{\text{II}}(\mathbf{B} - \mathbf{z}_1\mathbf{B}\mathbf{z}_{-1}^T)\mathbf{W}_{\text{IV}} \\ &= j\mathbf{W}_{\text{II}}\Delta_{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_{-1}^T}(\mathbf{B})\mathbf{W}_{\text{IV}} \\ &= -j\mathbf{W}_{\text{II}}\nabla_{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_{-1}}(\mathbf{B})\mathbf{z}_{-1}^T\mathbf{W}_{\text{IV}} \\ &= (-j\mathbf{W}_{\text{II}}\mathbf{P})(\mathbf{W}_{\text{IV}}\mathbf{z}_{-1}\mathbf{Q})^T. \end{aligned} \quad (3.38)$$



Assim, utilizando esse fato juntamente com o Lema 4, segue-se que

$$[\tilde{\mathbf{B}}]_{ij} = \frac{[(-j\mathbf{W}_{II}\mathbf{P})(\mathbf{W}_{IV}\mathbf{Z}_{-1}\mathbf{Q})^T]_{ij}}{(1 - W_M^i W_M^j e^{-j\frac{\pi}{M}j})} \quad (3.39)$$

$$= \frac{[(-j\mathbf{W}_{II}\mathbf{P})(\mathbf{W}_{IV}\mathbf{Z}_{-1}\mathbf{Q})^T]_{ij}}{\left(1 - e^{-j\frac{(2i+2j+1)\pi}{M}}\right)} \quad (3.40)$$

$$= \frac{e^{j\frac{i\pi}{M}} [(-j\mathbf{W}_{II}\mathbf{P})(\mathbf{W}_{IV}\mathbf{Z}_{-1}\mathbf{Q})^T]_{ij} e^{j\frac{(2j+1)\pi}{2M}}}{e^{j\frac{(2i+2j+1)\pi}{2M}} - e^{-j\frac{(2i+2j+1)\pi}{2M}}} \quad (3.41)$$

$$= \frac{[(-\mathbf{W}_{IP})(\mathbf{W}_{III}\mathbf{Z}_{-1}\mathbf{Q})^T]_{ij}}{2\text{sen}\left(\frac{(2i+2j+1)\pi}{2M}\right)}. \quad (3.42)$$

□

### 3.4.3 Representações de Bezoutianos Centro-Simétricos

Nesta subseção serão desenvolvidas novas decomposições para bezoutianos centro-simétricos. Conquanto tais decomposições tenham como base os artigos de Heinig e Rost [18], [17], elas representam inovações especialmente por permitirem tratar do caso em que as matrizes envolvidas são complexas. Porém, antes de apresentar o resultado principal, será necessário introduzir alguns termos e resultados preliminares.

**Definição 9** (Paridade e Simetria [18]). Dadas as matrizes  $\mathbf{J}' = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_M \ \cdots \ \mathbf{e}_3 \ \mathbf{e}_2]$  e  $\mathbf{J}'' = [-\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_M \ \cdots \ \mathbf{e}_3 \ \mathbf{e}_2]$ , tem-se que um vetor  $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  é:

- **par**, se  $\mathbf{J}'\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}$ ;
- **ímpar**, se  $\mathbf{J}'\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{\nu}$ ;
- **quase par**, se  $\mathbf{J}''\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}$ ;
- **quase ímpar**, se  $\mathbf{J}''\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{\nu}$ .

As definições de vetor quase par e vetor quase ímpar não estão presentes nas referências bibliográficas desta dissertação. Elas foram necessárias para corrigir um pequeno erro presente no artigo [18] a respeito do resultado do Lema 5. Esse artigo enuncia um resultado (vide equações (3.45) e (3.46)) sobre vetores par e ímpar que não é verificado na prática. De fato, as novas definições foram a forma encontrada para corrigir tal engano, conforme ficará claro no enunciado do Lema 5 [18], [17].

**Lema 5.** *Dados um vetor par  $\boldsymbol{\nu}_e \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ , um vetor ímpar  $\boldsymbol{\nu}_o \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ , um vetor quase par  $\boldsymbol{\nu}_{qe} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  e um vetor quase ímpar  $\boldsymbol{\nu}_{qo} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ , tem-se que*

$$\mathbf{W}_I \boldsymbol{\nu}_e = \mathcal{H}_I \boldsymbol{\nu}_e, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{W}_I \boldsymbol{\nu}_o = -j \mathcal{H}_I \boldsymbol{\nu}_o, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{W}_{III} \boldsymbol{\nu}_{qe} = -j \mathcal{H}_{III} \boldsymbol{\nu}_{qe}, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{W}_{III} \boldsymbol{\nu}_{qo} = \mathcal{H}_{III} \boldsymbol{\nu}_{qo}. \quad (3.46)$$

A Proposição 10 é a segunda contribuição nesse sentido. Ela também se baseia em um resultado de [18]. Porém, aqui as matrizes podem ou não ser matrizes complexas.

**Proposição 10.** *Dado  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \in \mathbb{C}^{M \times R} \times \mathbb{C}^{M \times R}$ , com  $R \in \mathbb{N}$ , tem-se que*

$$-\mathbf{W}_I \mathbf{P} = \mathcal{H}_I(-\mathbf{P}_+ + j\mathbf{P}_-) = \bar{\mathbf{P}}, \quad (3.47)$$

$$\mathbf{W}_{III} \mathbf{Z}_{-1} \mathbf{Q} = \mathcal{H}_{III}(-j\mathbf{Q}_+ + \mathbf{Q}_-) = \bar{\mathbf{Q}}, \quad (3.48)$$

onde  $\mathbf{P}_\pm = (\mathbf{P} \pm \mathbf{J}'\mathbf{P})/2$ ,  $\mathbf{Q}_\pm = (\mathbf{Z}_{-1}\mathbf{Q} \pm \mathbf{J}''\mathbf{Z}_{-1}\mathbf{Q})/2$ .

*Demonstração.* Uma vez que  $\mathbf{P}_\pm = (\mathbf{P} \pm \mathbf{J}'\mathbf{P})/2$  e  $\mathbf{Q}_\pm = (\mathbf{Z}_{-1}\mathbf{Q} \pm \mathbf{J}''\mathbf{Z}_{-1}\mathbf{Q})/2$ , então cada uma das colunas de  $\mathbf{P}_+$  é um vetor par, enquanto que cada uma das colunas de  $\mathbf{Q}_+$  é um vetor quase par. Além disso, as colunas de  $\mathbf{P}_-$  e  $\mathbf{Q}_-$  são vetores ímpares e quase ímpares, respectivamente. Portanto, aplicando-se o Lema 5, tem-se que

$$-\mathbf{W}_I \mathbf{P} = -\mathcal{H}_I \mathbf{P}_+ + j \mathcal{H}_I \mathbf{P}_- = \mathcal{H}_I(-\mathbf{P}_+ + j\mathbf{P}_-) = \bar{\mathbf{P}} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{W}_{III} \mathbf{Z}_{-1} \mathbf{Q} = -j \mathcal{H}_{III} \mathbf{Q}_+ + \mathcal{H}_{III} \mathbf{Q}_- = \mathcal{H}_{III}(-j\mathbf{Q}_+ + \mathbf{Q}_-) = \bar{\mathbf{Q}}. \quad (3.50)$$

□

Por fim, o Teorema 2 é uma inovação importante que tem como base resultados similares de [18], porém apenas com a proposta desta dissertação é possível projetar transceptores multiportadoras que lidam com canais complexos.

**Teorema 2.** *Dada uma matriz centro-simétrica  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ , tal que  $\nabla_{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_{-1}}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}\mathbf{Q}^T$ , onde  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \in \mathbb{C}^{M \times R} \times \mathbb{C}^{M \times R}$  e  $R \in \mathbb{N}$  e dado o par  $(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}})$ , tal que  $\bar{\mathbf{P}} = \mathcal{H}_I(-\mathbf{P}_+ + j\mathbf{P}_-)$ ,  $\bar{\mathbf{Q}} = \mathcal{H}_{III}(-j\mathbf{Q}_+ + \mathbf{Q}_-)$ , em que  $\mathbf{P}_\pm = (\mathbf{P} \pm \mathbf{J}'\mathbf{P})/2$  e  $\mathbf{Q}_\pm = (\mathbf{Z}_{-1}\mathbf{Q} \pm \mathbf{J}''\mathbf{Z}_{-1}\mathbf{Q})/2$ , então*

$$\mathbf{B} = \frac{M}{2} \mathcal{H}_{III} \left( \sum_{r=1}^R \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{P}}_r} \mathcal{H}_{II} \mathcal{H}_{IV} \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{Q}}_r} \right) \mathcal{H}_{IV}, \quad (3.51)$$

onde  $\bar{\mathbf{p}}_r$  é a  $r$ -ésima coluna de  $\bar{\mathbf{P}}$  e  $\bar{\mathbf{q}}_r$  é a  $r$ -ésima coluna de  $\bar{\mathbf{Q}}$ .

*Demonstração.* Considerando que  $\bar{\mathbf{P}} = [\bar{\mathbf{p}}_1 \cdots \bar{\mathbf{p}}_R]$  e  $\bar{\mathbf{Q}} = [\bar{\mathbf{q}}_1 \cdots \bar{\mathbf{q}}_R]$ , então, com base nas Proposições 8, 9 e 10, tem-se que:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \left[ \frac{[\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{Q}}^T]_{ij}}{2\text{sen}\left(\frac{(2i+2j+1)\pi}{2M}\right)} \right]_{i,j=0}^{M-1} \quad (3.52)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \frac{M}{2} \sum_{r=1}^R \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{p}}_r} \mathcal{H}_{\text{II}} \mathcal{H}_{\text{IV}} \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{q}}_r}, \quad (3.53)$$

o que implica o resultado desejado utilizando também que  $\mathcal{H}_{\text{II}}^T = \mathcal{H}_{\text{III}}$ .  $\square$

### 3.5 Principais Contribuições

Este capítulo tratou das representações de matrizes estruturadas através da técnica de operadores de deslocamento. Para isso, todo um ferramental matemático foi desenvolvido para que fossem obtidas representações de matrizes bezoutianas utilizando-se apenas matrizes de DFT, de IDFT e matrizes diagonais, ou, ainda, matrizes de DHTs e matrizes diagonais. Tais representações serão utilizadas no Capítulo 4 para o projeto de transceptores em bloco com redundância mínima computacionalmente eficientes.

Destacam-se como contribuições originais (no melhor do conhecimento do autor) do presente capítulo os seguintes itens:

- Um resultado geral sobre a relação entre os pares geradores de deslocamento de matrizes de Toeplitz e de suas inversas (vide Proposição 5). É possível perceber que casos particulares deste resultado são conhecidos pelos autores G. Heinig e K. Rost, porém eles não enunciam um resultado como este em seus artigos.
- As demonstrações da Proposição 6 e do Lema 1 sobre representação de matrizes de Cauchy através de DFT e sobre a relação da matriz circulante- $\lambda$  com matrizes de Vandermonde, respectivamente. É provável que tais resultados já fossem conhecidos há algum tempo e, portanto, foram apenas enunciados nos artigos referenciados na presente dissertação.

- O desenvolvimento matemático sobre transformação de matrizes de T-Bézout para matrizes de Cauchy (vide Proposição 7) sem a necessidade de extensão com zeros das matrizes envolvidas. Além disso, os resultados que são consequência direta desta proposição (vide Corolário 1 e Observação 4) também são contribuições novas.
- O desenvolvimento matemático do resultado principal do capítulo sobre representação de matrizes de Bézout por meio de DFT (vide Teorema 1 e Observação 5) é original pois não necessita de extensão com zeros da matriz bezoutiana, assim como é requerido nos resultados de Heinig e Rost.
- O Lema 3 é uma contribuição desta dissertação.
- O resultado sobre transformação de matrizes de T-Bézout centro-simétricas para matrizes de Cauchy (vide Proposição 9) sem a necessidade de extensão com zeros das matrizes envolvidas e sem se restringir ao caso de matrizes reais.
- As definições de vetores quase par e quase ímpar, bem como da matriz  $\mathbf{J}''$  com o intuito de enunciar o Lema 5 sem as incorreções presentes nos artigos referenciados.
- Os resultados das Proposição 10 e do Teorema 2 que permitiram o desenvolvimento de representações por meio de DHTs de bezoutianos centro-simétricos e, possivelmente, complexos.

# Capítulo 4

## Projeto de Transceptores em Bloco com Redundância Mínima

O projeto de transceptores multicanais fixos, sem memória, com redundância mínima e que, simultaneamente, utilizem algoritmos super-rápidos para o processo de transmissão/recepção é discutido neste capítulo.

São propostos oito transceptores eficientes, quatro multiportadoras e quatro monoportadora, através da exploração da abordagem por estrutura de deslocamento da matriz efetiva de canal. Em termos de custo computacional, os sistemas resultantes dos projetos propostos são assintoticamente tão simples quanto os tradicionais OFDM e SC-FD no tocante ao processo de equalização<sup>1</sup>. Essa simplicidade e eficiência computacional deve-se ao fato dos novos transceptores utilizarem em sua estrutura somente matrizes diagonais, de DFT, de IDFT e de DHTs. Conforme será observado nos resultados experimentais (Capítulo 5), a principal característica dos transceptores propostos é uma maior taxa de transmissão efetiva de dados, quando comparados aos OFDM e SC-FD usuais, tendo em vista que eles precisam de metade da quantidade de redundância utilizada em tais sistemas.

Os projetos discutidos aqui serão de dois tipos: primeiramente serão descritas as soluções ZF para os sistemas multiportadoras e monoportadora baseados em DFT e DHTs (Seção 4.1). O projeto ZF possui a vantagem de não precisar da estimação de estatísticas do ruído de saída do canal. Porém, justamente por dispensar essa in-

---

<sup>1</sup> Essa comparação em termos de complexidade assintótica só é válida nas aplicações em que  $M$  é grande.

formação, seu desempenho pode ficar extremamente comprometido quando a razão sinal-ruído é relativamente pequena. Portanto, em várias aplicações, a solução ZF possui um apelo teórico maior do que prático. Após isso, a solução MMSE será descrita (Seção 4.2). O projeto MMSE acaba sendo, em geral, computacionalmente mais custoso do que a solução ZF devido à estimação de estatísticas do ruído, além da modificação da estrutura do receptor visando a levar em consideração tais estatísticas<sup>2</sup>. O ganho deste método de projeto reside em sua maior eficácia (quando comparado ao ZF) na equalização. O capítulo será finalizado destacando-se as principais contribuições do mesmo na Seção 4.3.

## 4.1 Solução ZF

### 4.1.1 Sistemas Multiportadoras Baseados em DFT

É possível projetar um transceptor multiportadoras com redundância mínima baseado na solução ZF através de uma abordagem similar ao transceptor ZF-OFDM. Primeiramente, considere que  $\xi = 1$  e  $\eta = -1$  (vide Seção 3.2). Nesse caso, uma vez que  $\xi_0 = 1$  e  $\eta_0 = e^{j\frac{\pi}{M}}$ , tem-se que  $\mathbf{V}_\xi^{-1} = \mathbf{W}_M^{-1}/\sqrt{M} = \mathbf{W}_M^H/\sqrt{M}$  e  $\mathbf{V}_\eta^{-T} = \mathbf{W}_M^H \text{diag}\{e^{-j\frac{\pi}{M}m}\}_{m=0}^{M-1}/\sqrt{M}$  (vide Observação 2 do Capítulo 3).

Agora, assim como no OFDM, defina

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{W}_M^H, \quad (4.1)$$

de forma que se tenha

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{W}_M \mathbf{H}_0^{-1} \quad (4.2)$$

com o intuito de implementar a solução *zero-forcing*. É claro que essa solução livre de ISI só pode ser implementada se  $\mathbf{H}_0$  for quadrada e inversível, o que implica que o modelo de canal deve ter ordem  $L$  par e a quantidade de redundância deve ser  $K = L/2$ . Quando esta condição não é atendida, é possível considerar uma extensão com um zero da resposta ao impulso do canal para que, então, a ordem do canal resultante seja par. Alternativamente, também é possível projetar o estimador de

---

<sup>2</sup>No caso do OFDM e do SC-FD, foi mostrado no Capítulo 2 que as estruturas dos receptores MMSE e ZF são iguais.

canal de forma que ele sempre produza como resposta um modelo de canal com ordem par.

Conforme Lin e Phoong observaram [10], na grande maioria dos experimentos, a matriz  $\mathbf{H}_0$  tem posto completo. Entretanto, o problema de condicionamento do canal, utilizando-se um pré-filtro, por exemplo, de forma que  $\mathbf{H}_0$  tenha posto completo, ainda é um problema em aberto.

Uma vez que  $\mathbf{H}_0$  é uma matriz de Toeplitz quadrada e, por hipótese, inversível, então  $\mathbf{H}_0^{-1}$  é uma matriz t-bezoutiana. Portanto, é possível aplicar o Teorema 1 do Capítulo 3, levando à seguinte decomposição:

$$\mathbf{H}_0^{-1} = \frac{1}{2} \mathbf{W}_M^H \left[ \sum_{r=1}^2 \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{p}}_r} \mathbf{W}_M (\text{diag}\{e^{j\frac{\pi}{M}m}\}_{m=0}^{M-1}) \mathbf{W}_M \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{q}}_r} \right] \mathbf{W}_M^H \text{diag}\{e^{-j\frac{\pi}{M}m}\}_{m=0}^{M-1}, \quad (4.3)$$

o que implica que

$$\mathbf{G}_0 = \frac{1}{2} \left[ \sum_{r=1}^2 \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{p}}_r} \mathbf{W}_M (\text{diag}\{e^{j\frac{\pi}{M}m}\}_{m=0}^{M-1}) \mathbf{W}_M \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{q}}_r} \right] \mathbf{W}_M^H \text{diag}\{e^{-j\frac{\pi}{M}m}\}_{m=0}^{M-1}, \quad (4.4)$$

em que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}_r &\stackrel{(a)}{=} -\sqrt{M} \mathbf{W}_M \mathbf{p}_r \\ &\stackrel{(b)}{=} \sqrt{M} \mathbf{W}_M \mathbf{H}_0^{-1} \hat{\mathbf{p}}_r \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_r &\stackrel{(c)}{=} \sqrt{M} \mathbf{W}_M (\text{diag}\{e^{j\frac{\pi}{M}m}\}_{m=0}^{M-1}) \mathbf{Z}_{-1} \mathbf{q}_r \\ &\stackrel{(d)}{=} \sqrt{M} \mathbf{W}_M (\text{diag}\{e^{j\frac{\pi}{M}m}\}_{m=0}^{M-1}) \mathbf{Z}_{-1} \mathbf{H}_0^{-T} \hat{\mathbf{q}}_r, \end{aligned} \quad (4.6)$$

com  $r \in \{1, 2\}$ , (a) e (c) sendo consequências do Teorema 1 do Capítulo 3, (b) e (d) sendo consequências da Proposição 5 do Capítulo 3 e da equação (3.8) e

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (4.7)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{bmatrix} -h_0(0,0) & [h_0(0,M-1) - h_0(1,0)] & \cdots & [h_0(0,1) - h_0(M-1,0)] \end{bmatrix}^T, \quad (4.8)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_1 = \begin{bmatrix} [-h_0(M-1,0) - h_0(0,1)] & [-h_0(1,0) - h_0(0,M-1)] & \cdots & -h_0(0,0) \end{bmatrix}^T \quad (4.9)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (4.10)$$

onde  $\mathbf{H}_0 = [h_0(i,j)]_{(i,j) \in \mathcal{M}^2}$  é definida na equação (2.36).

A Figura 4.1 ilustra um diagrama de blocos da solução ZF resultante para um transceptor multiportadoras com redundância mínima, utilizando somente matrizes

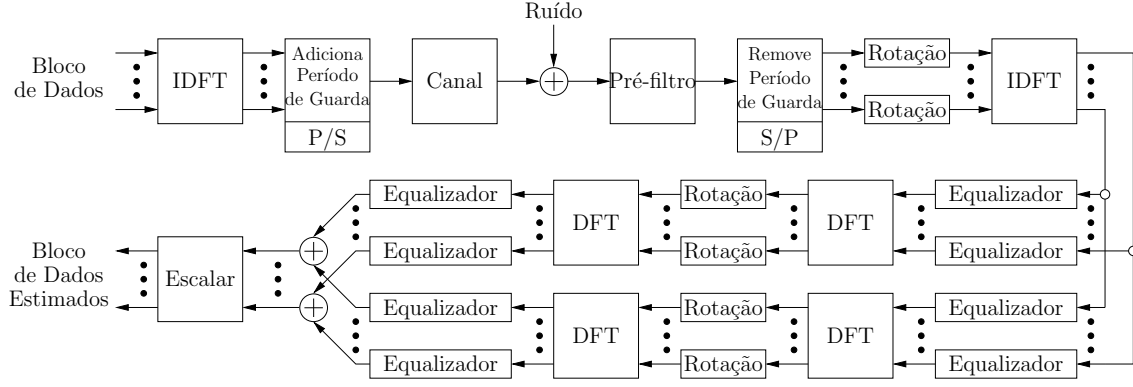


Figura 4.1: Solução ZF utilizando DFT de um transceptor multiportadoras com redundância mínima: DFT-ZF-MC-MRBT.

de DFT, de IDFT e matrizes diagonais. O sistema é denominado DFT-ZF-MC-MRBT (do inglês, *DFT-ZF MultiCarrier Minimum Redundancy Block Transceiver*). Neste transceptor, o período de guarda consiste de  $L/2$  zeros. O pré-filtro pode ser utilizado para encurtamento de canal (em inglês, *channel shortening*) e/ou para modificar algumas de suas características [6]. Após a remoção do período de guarda, são realizados  $M$  deslocamentos de fase em paralelo, em que o  $m$ -ésimo deslocamento de fase, ou a  $m$ -ésima rotação, é realizado através da multiplicação por  $e^{-j\frac{\pi}{M}m}$ . O primeiro passo para a equalização é realizado após a aplicação da IDFT sobre o vetor de dados. Logo após, o vetor de dados resultante é processado simultaneamente por dois ramos diferentes do transceptor. Os equalizadores deste estágio possuem apenas um coeficiente (em inglês, *1-tap equalizers*) para cada um dos  $M$  canais. Tais coeficientes são os elementos que compõem os vetores  $\tilde{\mathbf{q}}_1$  e  $\tilde{\mathbf{q}}_2$ . Após a aplicação da DFT, são novamente realizados deslocamentos de fase, mas agora, a  $m$ -ésima rotação é definida pelo número  $e^{j\frac{\pi}{M}m}$ . O passo final da equalização é realizado em cada ramo do receptor após a aplicação da DFT sobre os vetores que acabaram de passar pelos deslocamentos de fases. Os equalizadores de um coeficiente deste estágio são definidos como sendo os elementos que compõem os vetores  $\tilde{\mathbf{p}}_1$  e  $\tilde{\mathbf{p}}_2$ .

Observe que o processo de equalização global possui uma complexidade assintótica de  $\mathcal{O}(M \log M)$  operações aritméticas, assim como o ZF-OFDM. É claro que a proposta desta dissertação é um pouco mais complexa, uma vez que ela requer quatro aplicações de DFTs adicionais, sem levar em consideração as rotações e equalizações com um coeficiente adicionais, cuja complexidade é  $\mathcal{O}(M)$ . Porém,



conforme é ilustrado na figura, é possível tirar vantagens da estrutura paralela deste transceptor com o intuito de diminuir o tempo de processamento.

Os vetores  $\tilde{\mathbf{p}}_r$  e  $\tilde{\mathbf{q}}_r$  definem o equalizador ZF uma vez que eles contêm toda a informação a respeito do canal (note que todos os demais elementos presentes na estrutura do DFT-ZF-MC-MRBT são independentes do canal). Entretanto, para que seja possível calcular tais vetores, é necessário resolver quatro sistemas lineares  $\mathbf{H}_0 \mathbf{p}_r = \hat{\mathbf{p}}_r$  e  $\mathbf{H}_0 \mathbf{q}_r = \hat{\mathbf{q}}_r$ , com  $r \in \{1, 2\}$ , conforme indicam as equações (4.5) e (4.6). Conforme foi destacado na Seção 2.3.5, esse estágio é conhecido como o **problema de projeto do receptor**, o qual se distingue do **problema de equalização** que é o foco desta dissertação. Lembrando-se do que foi destacado naquela seção, o problema de projeto do receptor requer  $\mathcal{O}(M^3)$  operações aritméticas para matrizes genéricas. Porém, há alguns algoritmos super-rápidos que requerem apenas  $\mathcal{O}(M \log^2 M)$  operações quando o problema envolve matrizes estruturadas, tais como matrizes de Toeplitz. O leitor interessado é encorajado a verificar o algoritmo super-rápido do tipo “dividir para conquistar” (em inglês, *divide-and-conquer*) de V. Pan [37]. Tal algoritmo é baseado numa decomposição recursiva de complementos de Schur [14] da matriz de Toeplitz. Utilizando esse algoritmo, é possível resolver os sistemas lineares que definem o equalizador ZF de forma numericamente eficiente, viabilizando, assim, a determinação de  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{q}_1$  e  $\mathbf{q}_2$  com apenas  $\mathcal{O}(M \log^2 M)$  operações. Um tópico para pesquisas futuras seria utilizar técnicas de otimização para a determinação das soluções desse sistema de equações lineares. É possível que a adaptação de técnicas consagradas tais como algoritmos de gradiente conjugado [39] tenha um apelo prático maior do que o algoritmo de Pan.

Nesta dissertação, assume-se que o problema de projeto do receptor já foi previamente resolvido utilizando-se informação perfeita sobre o estado do canal (CSI, do inglês *Channel State Information*). Isso implica que a complexidade total dos sistemas propostos deve-se apenas ao estágio de equalização, ou seja, a complexidade assintótica do sistema completo de transmissão/recepção é  $\mathcal{O}(M \log M)$ . É claro que, na prática, será necessário a estimação da resposta ao impulso do canal bem como a determinação dos vetores  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{q}_1$  e  $\mathbf{q}_2$  que definem o equalizador. Contudo, desde que o canal possa ser modelado como um canal que varia de forma lenta no tempo, esses procedimentos não precisarão ser realizados para cada bloco

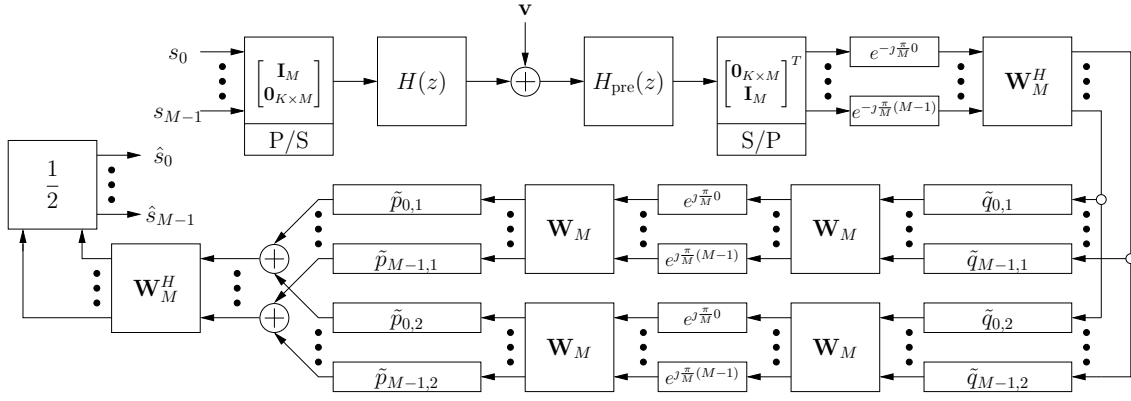


Figura 4.2: Solução ZF utilizando DFT de um transceptor monoportadora com redundância mínima: DFT-ZF-SC-MRBT.

transmitido, fazendo com que, na maior parte do tempo, apenas o **problema de equalização** seja o problema dominante.

#### 4.1.2 Sistemas Monoportadora Baseados em DFT

Utilizando uma abordagem similar à da Subseção 4.1.1, é possível projetar uma solução ZF para um transceptor monoportadora com redundância mínima, utilizando matrizes de DFT, de IDFT e matrizes diagonais. O sistema resultante é denominado DFT-ZF-SC-MRBT (do inglês, *DFT-ZF Single-Carrier Minimum Redundancy Block Transceiver*). Assim, de forma análoga ao transceptor ZF-SC-FD, seja

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{I}_M, \quad (4.11)$$

de tal forma que seja necessário definir

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{H}_0^{-1} \quad (4.12)$$

com o intuito de se obter a solução ZF.

Aplicando-se, novamente, o Teorema 1 do Capítulo 3, tem-se que:

$$\mathbf{G}_0 = \frac{1}{2} \mathbf{W}_M^H \left[ \sum_{r=1}^2 \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{p}}_r} \mathbf{W}_M (\text{diag}\{e^{j\frac{\pi}{M}m}\}_{m=0}^{M-1}) \mathbf{W}_M \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{q}}_r} \right] \mathbf{W}_M^H \text{diag}\{e^{-j\frac{\pi}{M}m}\}_{m=0}^{M-1}, \quad (4.13)$$

onde os vetores  $\tilde{\mathbf{p}}_r$  e  $\tilde{\mathbf{q}}_r$  já foram definidos na Subseção 4.1.1.

A Figura 4.2 ilustra o diagrama de blocos do transceptor DFT-ZF-SC-MRBT. Esta figura foi propositalmente desenhada de forma diferente com o intuito de mostrar diretamente os elementos matemáticos utilizados na implementação do receptor.

Além disso, é possível verificar que, assim como nos casos do OFDM e SC-FD, os diagramas de blocos dos transceptores multiportadoras e monoportadora são muito similares. A única diferença é a modificação da posição da IDFT do transmissor para o final do receptor.

### 4.1.3 Sistemas Multiportadoras Baseados em DHTs

Diferentemente das Subseções 4.1.1 e 4.1.2, nesta subseção será considerado que a resposta ao impulso do canal é simétrica, o que implica que a matriz de Toeplitz efetiva de canal  $\mathbf{H}_0$  é uma matriz simétrica, o mesmo ocorrendo com a matriz t-bezoutiana  $\mathbf{H}_0^{-1}$ . Salvo essa observação, o projeto de sistemas multiportadoras baseados em DHTs é inteiramente análogo ao projeto baseado em DFT. A diferença é que os resultados matemáticos utilizados aqui estão presentes na Seção 3.4, e não na Seção 3.3 como anteriormente.

Assim sendo, é possível projetar uma solução ZF para um transceptor multiportadoras com redundância mínima, utilizando matrizes de DHTs e matrizes diagonais. O sistema proposto é denominado DHT-ZF-MC-MRBT (do inglês, *DHT-ZF MultiCarrier Minimum Redundancy Block Transceiver*). Esse sistema é caracterizado pelas seguintes matrizes de transmissão e recepção, respectivamente:

$$\mathbf{F}_0 = \mathcal{H}_{\text{III}}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{G}_0 = \mathcal{H}_{\text{III}}^T \mathbf{H}_0^{-1} = \frac{M}{2} \left( \sum_{r=1}^2 \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{p}}_r} \mathcal{H}_{\text{II}} \mathcal{H}_{\text{IV}} \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{q}}_r} \right) \mathcal{H}_{\text{IV}}, \quad (4.15)$$

em que foi utilizada a seguinte decomposição da matriz inversa de canal (vide Teorema 2 da Seção 3.4):

$$\mathbf{H}_0^{-1} = \frac{M}{2} \mathcal{H}_{\text{III}} \left( \sum_{r=1}^2 \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{p}}_r} \mathcal{H}_{\text{II}} \mathcal{H}_{\text{IV}} \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{q}}_r} \right) \mathcal{H}_{\text{IV}}, \quad (4.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}}_r &\stackrel{(a)}{=} \mathcal{H}_{\text{I}} \left[ \left( \frac{-\mathbf{p}_r + j\mathbf{p}_r}{2} \right) + \mathbf{J}' \left( \frac{-\mathbf{p}_r - j\mathbf{p}_r}{2} \right) \right] \\ &\stackrel{(b)}{=} \mathcal{H}_{\text{I}} \left[ \left( \frac{\mathbf{H}_0^{-1} \hat{\mathbf{p}}_r - j\mathbf{H}_0^{-1} \hat{\mathbf{p}}_r}{2} \right) + \mathbf{J}' \left( \frac{\mathbf{H}_0^{-1} \hat{\mathbf{p}}_r + j\mathbf{H}_0^{-1} \hat{\mathbf{p}}_r}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_r &\stackrel{(c)}{=} \mathcal{H}_{\text{III}} \left[ \left( \frac{-j\mathbf{Z}_{-1} \mathbf{q}_r + \mathbf{Z}_{-1} \mathbf{q}_r}{2} \right) - \mathbf{J}'' \left( \frac{j\mathbf{Z}_{-1} \mathbf{q}_r + \mathbf{Z}_{-1} \mathbf{q}_r}{2} \right) \right] \\ &\stackrel{(d)}{=} \mathcal{H}_{\text{III}} \left[ \left( \frac{-j\mathbf{Z}_{-1} \mathbf{H}_0^{-1} \hat{\mathbf{q}}_r + \mathbf{Z}_{-1} \mathbf{H}_0^{-1} \hat{\mathbf{q}}_r}{2} \right) - \mathbf{J}'' \left( \frac{j\mathbf{Z}_{-1} \mathbf{H}_0^{-1} \hat{\mathbf{q}}_r + \mathbf{Z}_{-1} \mathbf{H}_0^{-1} \hat{\mathbf{q}}_r}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.18)$$

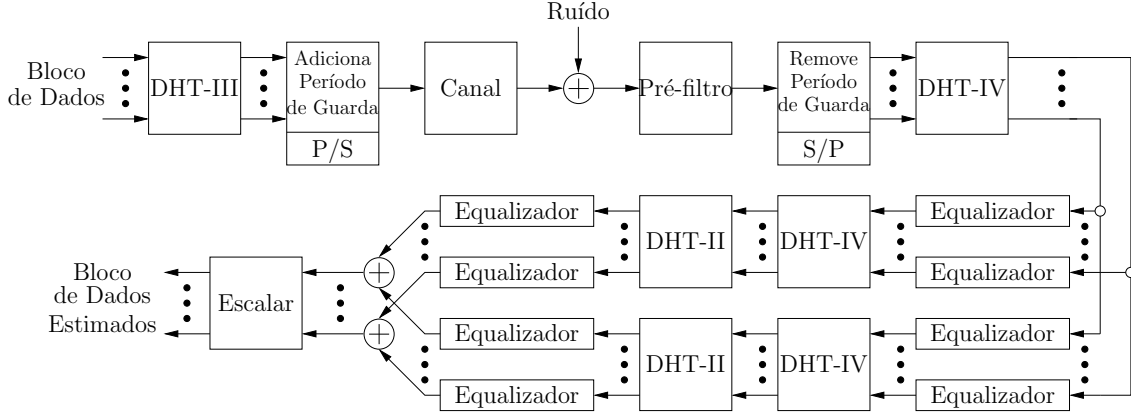


Figura 4.3: Solução ZF utilizando DHTs de um transceptor multiportadoras com redundância mínima: DHT-ZF-MC-MRBT.

com  $r \in \{1, 2\}$ , (a) e (c) sendo consequências do Teorema 2 da Seção 3.4, (b) e (d) sendo consequências da Proposição 5 do Capítulo 3 e da equação (3.8) e

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (4.19)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_2 = \begin{bmatrix} -h_0(0,0) & [h_0(0, M-1) - h_0(0,1)] & \cdots & [h_0(0,1) - h_0(0, M-1)] \end{bmatrix}^T, \quad (4.20)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_1 = \begin{bmatrix} [-h_0(0, M-1) - h_0(0,1)] & [-h_0(0,1) - h_0(0, M-1)] & \cdots & -h_0(0,0) \end{bmatrix}^T, \quad (4.21)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (4.22)$$

onde  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0^T = [h_0(i, j)]_{(i,j) \in \mathcal{M}^2}$  é definida na equação (2.36) lembrando que neste caso o canal é considerado simétrico.

A Figura 4.3 ilustra o diagrama de blocos do sistema resultante. Nesse transceptor, o período de guarda também é de  $L/2$  zeros. O pré-filtro transforma o canal equivalente em um canal simétrico [40], sendo este último o canal utilizado para o projeto do transceptor. Após a remoção do período de guarda, é aplicada a transformada DHT-IV sobre o vetor de dados. O primeiro passo da equalização sobre esse vetor de dados é realizado simultaneamente por dois ramos diferentes do transceptor. Os equalizadores desse estágio contêm apenas um coeficiente e são definidos pelos elementos que constituem os vetores  $\bar{\mathbf{q}}_1$  e  $\bar{\mathbf{q}}_2$ . Após a aplicação das transformadas DHT-IV e DHT-II, o passo de equalização final é realizado em cada ramo. Os equalizadores sem memória desse estágio são os elementos que compõem os vetores  $\bar{\mathbf{p}}_1$  e  $\bar{\mathbf{p}}_2$ .

As mesmas observações feitas na Subseção 4.1.1 sobre o **problema de projeto do receptor** aplicam-se aqui.

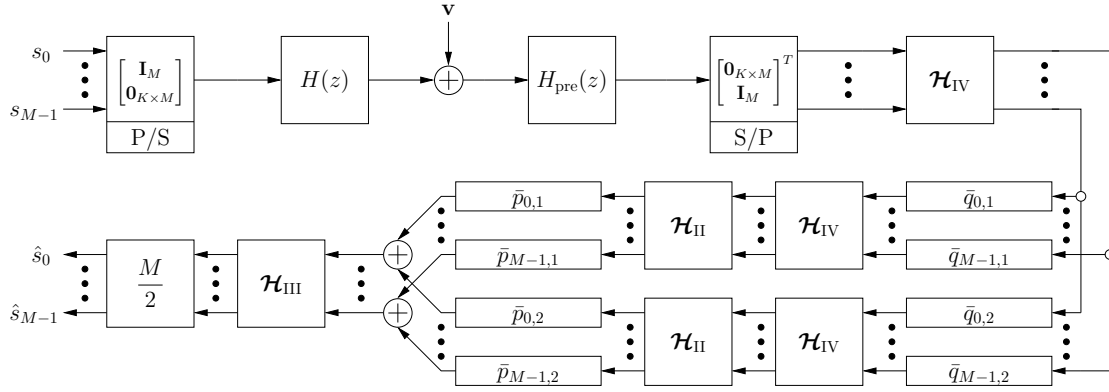


Figura 4.4: Solução ZF utilizando DHTs de um transceptor monoportadora com redundância mínima: DHT-ZF-SC-MRBT.

#### 4.1.4 Sistemas Monoportadora Baseados em DHTs

De forma análoga à Subseção 4.1.3, é possível projetar uma solução ZF para um transceptor monoportadora com redundância mínima, utilizando somente matrizes de DHTs e matrizes diagonais. O sistema resultante é denominado DHT-ZF-SC-MRBT (do inglês, *DHT-ZF Single-Carrier Minimum Redundancy Block Transceiver*). Assim, seja

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{I}_M, \quad (4.23)$$

de tal forma que seja obrigatório que

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{H}_0^{-1} \quad (4.24)$$

com o intuito de se obter a solução ZF.

Aplicando-se, novamente, o Teorema 2 da Seção 3.4, tem-se que:

$$\mathbf{G}_0 = \frac{M}{2} \mathcal{H}_{\text{III}} \left( \sum_{r=1}^2 \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{p}}_r} \mathcal{H}_{\text{II}} \mathcal{H}_{\text{IV}} \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{q}}_r} \right) \mathcal{H}_{\text{IV}}, \quad (4.25)$$

onde os vetores  $\bar{\mathbf{p}}_r$  e  $\bar{\mathbf{q}}_r$  já foram definidos na Subseção 4.1.3.

Pode-se verificar o diagrama de blocos do transceptor DHT-ZF-SC-MRBT na Figura 4.4. Novamente, esta figura foi desenhada de forma diferente para que os elementos matemáticos utilizados na implementação do receptor sejam diretamente visualizados. Percebe-se também uma grande semelhança entre os diagramas de blocos dos sistemas DHT-ZF-MC-MRBT e DHT-ZF-SC-MRBT.

## 4.2 Solução MMSE

Embora a existência de soluções ZF práticas tenha considerável relevância, a maior parte dos sistemas de comunicações trabalham em um ambiente onde o ruído de saída do canal não pode ser desprezado. Em tais cenários, a solução MMSE linear é mais adequada pois ela exprime um bom compromisso entre desempenho e complexidade de implementação.

Nesta seção, será mostrado como projetar transceptores multicanais em bloco que trabalham com redundância mínima e que são provenientes de uma solução MMSE linear. A solução proposta deixa claro que, embora os transceptores MMSE possuam uma complexidade computacional um pouco maior do que os transceptores ZF, eles podem tirar vantagens de suas estruturas paralelas, levando-os a terem o mesmo tempo de processamento para a equalização que os transceptores ZF requerem.

### 4.2.1 Sistemas Multiportadoras Baseados em DFT

Dado o sinal transmitido  $\mathbf{u} = \mathbf{F}_0 \mathbf{s}$  e o vetor recebido  $\mathbf{y} = \mathbf{H}_0 \mathbf{u} + \mathbf{v}$  (já considerando a adição e remoção da redundância), a solução MMSE linear  $\mathbf{K}_{\text{MMSE}} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  é dada por [36]:

$$\mathbf{K}_{\text{MMSE}} = \arg \left\{ \min_{\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{M \times M}} \mathbb{E} [\|\mathbf{u} - \mathbf{K}\mathbf{y}\|_2^2] \right\} = \mathbf{H}_0^H \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1}, \quad (4.26)$$

onde foi considerado que os símbolos transmitidos e o ruído na saída do canal são i.i.d, provenientes de um processo estocástico branco com média zero e mutuamente independentes. Além disso, considerou-se que  $\mathbb{E}[ss^*] = \sigma_s^2$  e  $\mathbb{E}[vv^*] = \sigma_v^2$ .

Assuma que  $\nabla_{\mathbf{z}_{1/\eta}, \mathbf{z}_\xi}(\mathbf{H}_0) = \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{Q}}^T$  e  $\nabla_{\mathbf{z}_\xi, \mathbf{z}_\rho}(\mathbf{H}_0^H) = \hat{\mathbf{P}}' \hat{\mathbf{Q}}'^T$ , para  $(\rho, \xi, \eta) \in \mathbb{C}^3$  e  $\eta \neq 0$ . Agora, aplicando-se a Proposição 4, tem-se que:

$$\nabla_{\mathbf{z}_{1/\eta}, \mathbf{z}_\rho}(\mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H) = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}} & \mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{P}}' \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{P}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}^T \mathbf{H}_0^H \\ \hat{\mathbf{Q}}'^T \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{Q}}^T} = \check{\mathbf{P}} \check{\mathbf{Q}}^T \quad (4.27)$$

Assumindo também que  $\nabla_{\mathbf{z}_{1/\eta}, \mathbf{z}_\rho}(\mathbf{I}) = \check{\mathbf{p}}' \check{\mathbf{q}}'^T$  e empregando o resultado da Proposição 3, obtém-se:

$$\nabla_{\mathbf{z}_{1/\eta}, \mathbf{z}_\rho} \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right) = \underbrace{\begin{bmatrix} \check{\mathbf{P}} & \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \check{\mathbf{p}}' \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{P}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \check{\mathbf{Q}}^T \\ \check{\mathbf{q}}'^T \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{Q}}^T} = \check{\mathbf{P}} \check{\mathbf{Q}}^T \quad (4.28)$$

Sendo assim, a partir da Proposição 2, segue-se que:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{z}_\rho, \mathbf{z}_{1/\eta}} \left[ \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \right] &= - \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \nabla_{\mathbf{z}_{1/\eta}, \mathbf{z}_\rho} \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right) \\
&\times \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \\
&= \underbrace{\left[ - \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \check{\mathbf{P}} \right]}_{\check{\mathbf{P}}'} \\
&\times \underbrace{\left[ \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-T} \check{\mathbf{Q}} \right]^T}_{\check{\mathbf{Q}}'^T} \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Assim, aplicando-se novamente a Proposição 4, tem-se:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{z}_\xi, \mathbf{z}_{1/\eta}} \left[ \mathbf{H}_0^H \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \right] &= \underbrace{\left[ \hat{\mathbf{P}}' \quad \mathbf{H}_0^H \check{\mathbf{P}}' \right]}_{\mathbf{P}} \underbrace{\left[ \hat{\mathbf{Q}}'^T \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \right]}_{\check{\mathbf{Q}}'^T} \\
&= \mathbf{P} \mathbf{Q}^T \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Portanto, o par gerador de deslocamento da solução MMSE linear é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \left[ \hat{\mathbf{P}}' \quad - \mathbf{K}_{\text{MMSE}} \hat{\mathbf{P}}' \quad - \mathbf{K}_{\text{MMSE}} \mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{P}}' \quad - \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{K}_{\text{MMSE}} \check{\mathbf{P}}' \right]_{M \times 7}, \tag{4.31} \\
\mathbf{Q} &= \left[ \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-T} \hat{\mathbf{Q}}' \quad \mathbf{K}_{\text{MMSE}}^T \hat{\mathbf{Q}}' \quad \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-T} \hat{\mathbf{Q}}' \right. \\
&\quad \left. \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-T} \check{\mathbf{q}}' \right]_{M \times 7}. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

É possível mostrar que o produto  $\mathbf{P} \mathbf{Q}^T$  pode ser simplificado utilizando-se a fórmula de Sherman-Morrison, a qual é descrita no Lema 6.

**Lema 6** (Lema de Inversão de Matrizes [39]). *Dadas as matrizes  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  e  $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ , sendo  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}^H \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})$  matrizes inversíveis, então a inversa de  $\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D}^H$  existe, sendo dada por:*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D}^H)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}^H \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{D}^H \mathbf{A}^{-1}. \tag{4.33}$$

Assim, calculando-se o produto  $\mathbf{PQ}^T$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{PQ}^T &= \hat{\mathbf{P}}' \hat{\mathbf{Q}}'^T \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} - \mathbf{K}_{\text{MMSE}} \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{Q}}^T \mathbf{K}_{\text{MMSE}} \\
&\quad - \mathbf{K}_{\text{MMSE}} \mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{P}}' \hat{\mathbf{Q}}'^T \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \\
&\quad - \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{K}_{\text{MMSE}} \check{\mathbf{p}}' \check{\mathbf{q}}'^T \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \\
&= \left[ \mathbf{I}_M - \mathbf{H}_0^H \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{H}_0 \right] \hat{\mathbf{P}}' \hat{\mathbf{Q}}'^T \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \\
&\quad - \mathbf{K}_{\text{MMSE}} \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{Q}}^T \mathbf{K}_{\text{MMSE}} - \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{K}_{\text{MMSE}} \check{\mathbf{p}}' \check{\mathbf{q}}'^T \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Aplicando-se o Lema 6 à equação (4.34), tem-se que o produto  $\mathbf{PQ}^T$  pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{PQ}^T &= \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \left( \mathbf{H}_0^H \mathbf{H}_0 + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \hat{\mathbf{P}}' \hat{\mathbf{Q}}'^T \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \\
&\quad - \mathbf{K}_{\text{MMSE}} \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{Q}}^T \mathbf{K}_{\text{MMSE}} - \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{K}_{\text{MMSE}} \check{\mathbf{p}}' \check{\mathbf{q}}'^T \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1}, \quad (4.35)
\end{aligned}$$

resultando em uma definição mais compacta para o par  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ , como se segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \left[ \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \left( \mathbf{H}_0^H \mathbf{H}_0 + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \hat{\mathbf{P}}' \quad - \mathbf{K}_{\text{MMSE}} \hat{\mathbf{P}} \quad - \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{K}_{\text{MMSE}} \check{\mathbf{p}}' \right]_{M \times 5}, \\
\mathbf{Q} &= \left[ \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-T} \hat{\mathbf{Q}}' \quad \mathbf{K}_{\text{MMSE}}^T \hat{\mathbf{Q}} \quad \left( \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_s^2} \mathbf{I} \right)^{-T} \check{\mathbf{q}}' \right]_{M \times 5}. \quad (4.36)
\end{aligned}$$

*Observação 6.* Note que, quando  $\sigma_v^2/\sigma_s^2 \rightarrow 0$ , tem-se que

$$\mathbf{P} = \left[ \mathbf{0}_{M \times 2} \quad - \mathbf{H}_0^{-1} \hat{\mathbf{P}} \quad \mathbf{0}_{M \times 1} \right]_{M \times 5}, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{Q} = \left[ (\mathbf{H}_0^{-1})^* \mathbf{H}_0^{-T} \hat{\mathbf{Q}}' \quad \mathbf{H}_0^{-T} \hat{\mathbf{Q}} \quad (\mathbf{H}_0^{-1})^* \mathbf{H}_0^{-T} \check{\mathbf{q}}' \right]_{M \times 5}, \quad (4.38)$$

de forma que  $\mathbf{PQ}^T = (-\mathbf{H}_0^{-1} \hat{\mathbf{P}})(\mathbf{H}_0^{-T} \hat{\mathbf{Q}})^T$ . Se esse resultado for comparado com o resultado da Proposição 5 do Capítulo 3, é possível verificar que o par gerador de deslocamento  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  corresponde a uma matriz t-bezoutiana e pode ser reduzido a  $(-\mathbf{H}_0^{-1} \hat{\mathbf{P}}, \mathbf{H}_0^{-T} \hat{\mathbf{Q}}) \in \mathbb{C}^{M \times 2} \times \mathbb{C}^{M \times 2}$  quando  $\sigma_v^2/\sigma_s^2 \rightarrow 0$ , isto é, as soluções MMSE e ZF são as mesmas neste caso.

Portanto, utilizando o resultado da Observação 5 do Capítulo 3 e considerando que  $(\rho, \xi, \eta) = (0, 1, -1)$ , tem-se que

$$\mathbf{K}_{\text{MMSE}} = \frac{1}{2} \mathbf{W}_M^H \left[ \sum_{r=1}^5 \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{p}}_r} \mathbf{W}_M (\text{diag}\{e^{j\frac{\pi}{M}m}\}_{m=0}^{M-1}) \mathbf{W}_M \mathbf{D}_{\check{\mathbf{q}}_r} \right] \mathbf{W}_M^H \text{diag}\{e^{-j\frac{\pi}{M}m}\}_{m=0}^{M-1}, \quad (4.39)$$



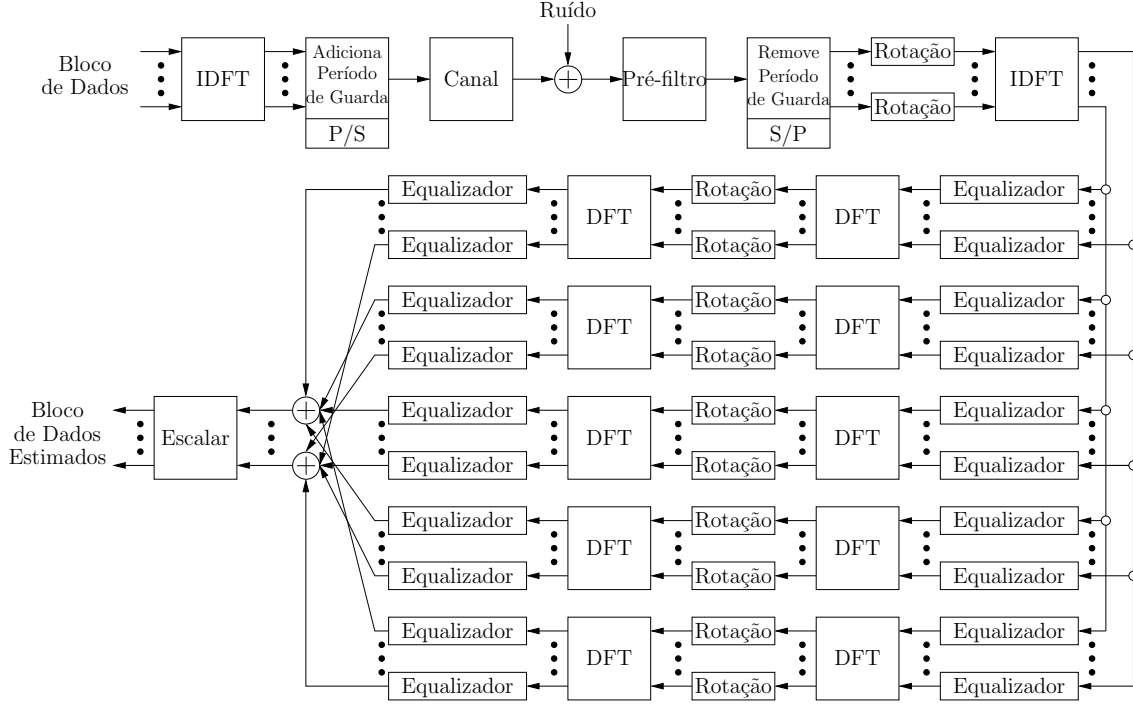


Figura 4.5: Solução MMSE utilizando DFT de um transceptor multiportadoras com redundância mínima: DFT-MMSE-MC-MRBT.

com  $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{Q}}) = (-\sqrt{M}\mathbf{W}_M\mathbf{P}, \sqrt{M}\mathbf{W}_M\text{diag}\{e^{j\frac{\pi}{M}m}\}_{m=0}^{M-1}\mathbf{Z}_{-1}\mathbf{Q})$ ,  $\tilde{\mathbf{P}} = [\tilde{\mathbf{p}}_1 \ \cdots \ \tilde{\mathbf{p}}_5]$  e  $\tilde{\mathbf{Q}} = [\tilde{\mathbf{q}}_1 \ \cdots \ \tilde{\mathbf{q}}_5]$ .

Os pares geradores de deslocamento  $(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{Q}}) \in \mathbb{C}^{M \times 2} \times \mathbb{C}^{M \times 2}$  e  $(\check{\mathbf{P}}', \check{\mathbf{Q}}') \in \mathbb{C}^{M \times 2} \times \mathbb{C}^{M \times 2}$  são facilmente encontrados através da equação (3.8). Além disso, não é difícil verificar que  $\check{\mathbf{p}}' = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T$  e  $\check{\mathbf{q}}' = [0 \ 0 \ \cdots \ -2]^T$ .

Assim, no caso de uma transmissão multiportadoras, é possível definir respectivamente as matrizes de transmissão e recepção por

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{W}_M^H, \quad (4.40)$$

$$\mathbf{G}_0 = \frac{1}{2} \left[ \sum_{r=1}^5 \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{p}}_r} \mathbf{W}_M \left( \text{diag}\{e^{j\frac{\pi}{M}m}\}_{m=0}^{M-1} \right) \mathbf{W}_M \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{q}}_r} \right] \mathbf{W}_M^H \text{diag}\{e^{-j\frac{\pi}{M}m}\}_{m=0}^{M-1}, \quad (4.41)$$

para que se obtenha a solução MMSE linear.

Note que o processo de equalização da solução MMSE linear requer quase o mesmo tempo de processamento da solução ZF, uma vez que as estruturas dos receptores são muito similares, sendo possível tirar vantagem da estrutura paralela intrínseca. Conforme fica claro na Figura 4.5 a solução MMSE possui cinco ramos paralelos, no lugar de apenas dois ramos como na solução ZF (vide Figura 4.1).

**O problema de projeto do equalizador** no caso MMSE parece ser um pouco

mais complicado do que no caso ZF. Este problema se resume a resolver  $5 \times 2 = 10$  sistemas de equações (no lugar de apenas quatro como na solução ZF). Neste caso, o algoritmo de V. Pan [37] não pode ser aplicado diretamente para a solução de tais sistemas, pois as matrizes envolvidas não são de Toeplitz. Este é um tópico para pesquisas futuras que foge do escopo da presente dissertação, mas é muito provável que haja um algoritmo que consiga resolver tais sistemas com complexidade assintótica  $\mathcal{O}(M \log^2 M)$  pois todas as matrizes envolvidas são resultado de operações com matrizes de Toeplitz.

## 4.2.2 Sistemas Monoportadora Baseados em DFT

De forma análoga à Subseção 4.2.1, é possível projetar uma solução MMSE para um transceptor monoportadora com redundância mínima, utilizando somente matrizes de DFT, de IDFT e matrizes diagonais. O sistema resultante é denominado DFT-MMSE-SC-MRBT (do inglês, *DFT-MMSE Single-Carrier Minimum Redundancy Block Transceiver*). Assim, definindo-se

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{I}_M, \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_0 = & \frac{1}{2} \mathbf{W}_M^H \left[ \sum_{r=1}^5 \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{p}}_r} \mathbf{W}_M (\text{diag}\{e^{j\frac{\pi}{M}m}\}_{m=0}^{M-1}) \mathbf{W}_M \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{q}}_r} \right] \\ & \times \mathbf{W}_M^H \text{diag}\{e^{-j\frac{\pi}{M}m}\}_{m=0}^{M-1}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

obtem-se a solução MMSE, onde os vetores  $\tilde{\mathbf{p}}_r$  e  $\tilde{\mathbf{q}}_r$  já foram definidos na Subseção 4.2.1. O diagrama de blocos do DFT-MMSE-SC-MRBT pode ser facilmente inferido a partir das definições de  $\mathbf{F}_0$  e  $\mathbf{G}_0$ , juntamente com os diagramas ilustrados nas Figuras 4.5 e 4.2.

## 4.2.3 Sistemas Multiportadoras Baseados em DHTs

Nesta subseção, será considerado que a matriz matriz t-bezoutiana  $\mathbf{H}_0^{-1}$  é uma matriz simétrica. Salvo essa observação, o projeto multiportadoras de soluções MMSE baseadas em DHTs é inteiramente análogo ao projeto baseado em DFT. De fato, o projeto é o mesmo até a definição do par gerador de deslocamento  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  (vide equação (4.36)) e, a partir de então, a diferença passa a ser que os resultados matemáticos utilizados aqui estão presentes na Seção 3.4, e não na Seção 3.3 como

anteriormente.

Note que, quando  $\mathbf{H}_0$  é uma matriz simétrica, então  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{J}\mathbf{H}_0\mathbf{J}$  é também uma matriz centro-simétrica, implicando que  $\mathbf{K}_{\text{MMSE}} = \mathbf{J}\mathbf{K}_{\text{MMSE}}\mathbf{J}$  é uma matriz centro-simétrica (embora não seja necessariamente simétrica – vide equação (4.26)), de forma que as hipóteses do Teorema 2 da Seção 3.4 são satisfeitas.

Assim, é possível projetar uma solução MMSE para um transceptor multiportadoras com redundância mínima, utilizando matrizes de DHTs e matrizes diagonais. O sistema proposto é denominado DHT-MMSE-MC-MRBT (do inglês, *DHT-MMSE MultiCarrier Minimum Redundancy Block Transceiver*). Esse sistema é caracterizado pelas seguintes matrizes de transmissão e recepção, respectivamente:

$$\mathbf{F}_0 = \mathcal{H}_{\text{III}}, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{G}_0 = \frac{M}{2} \left( \sum_{r=1}^5 \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{p}}_r} \mathcal{H}_{\text{II}} \mathcal{H}_{\text{IV}} \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{q}}_r} \right) \mathcal{H}_{\text{IV}}, \quad (4.45)$$

com  $(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) = (\mathcal{H}_{\text{I}}(-\mathbf{P}_+ + j\mathbf{P}_-), \mathcal{H}_{\text{III}}(-j\mathbf{Q}_+ + \mathbf{Q}_-))$ ,  $\mathbf{P}_{\pm} = (\mathbf{P} \pm \mathbf{J}'\mathbf{P})/2$ ,  $\mathbf{Q}_{\pm} = (\mathbf{Z}_{-1}\mathbf{Q} \pm \mathbf{J}''\mathbf{Z}_{-1}\mathbf{Q})/2$ ,  $\bar{\mathbf{P}} = [\bar{\mathbf{p}}_1 \ \cdots \ \bar{\mathbf{p}}_5]$  e  $\bar{\mathbf{Q}} = [\bar{\mathbf{q}}_1 \ \cdots \ \bar{\mathbf{q}}_5]$ . O diagrama de blocos do DHT-MMSE-MC-MRBT também pode ser inferido a partir das definições de  $\mathbf{F}_0$  e  $\mathbf{G}_0$ , juntamente com os diagramas ilustrados nas Figuras 4.5 e 4.3.

#### 4.2.4 Sistemas Monoportadora Baseados em DHTs

Analogamente à Subseção 4.2.3, é possível projetar uma solução MMSE para um transceptor monoportadora com redundância mínima, utilizando somente matrizes de DHTs e matrizes diagonais. O sistema resultante é denominado DHT-MMSE-SC-MRBT (do inglês, *DHT-MMSE Single-Carrier Minimum Redundancy Block Transceiver*). Assim, tem-se que

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{I}_M, \quad (4.46)$$

$$\mathbf{G}_0 = \frac{M}{2} \mathcal{H}_{\text{III}} \left( \sum_{r=1}^5 \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{p}}_r} \mathcal{H}_{\text{II}} \mathcal{H}_{\text{IV}} \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{q}}_r} \right) \mathcal{H}_{\text{IV}}, \quad (4.47)$$

onde, novamente, os vetores  $\bar{\mathbf{p}}_r$  e  $\bar{\mathbf{q}}_r$  já foram definidos na Subseção 4.2.3. Analogamente aos demais casos, o diagrama de blocos do DHT-MMSE-SC-MRBT pode ser facilmente inferido a partir das definições de  $\mathbf{F}_0$  e  $\mathbf{G}_0$ , juntamente com os diagramas ilustrados nas Figuras 4.5 e 4.4.

### 4.3 Principais Contribuições

Este capítulo tratou dos projetos de transceptores multicanais fixos e sem memória com redundância mínima. Os projetos propostos basearam-se nas soluções ZF e MMSE para sistemas multiportadoras e monoportadora. Foram propostos oito transceptores originais com base nas decomposições das matrizes envolvidas utilizando-se apenas matrizes de DFT, de IDFT, de DHTs e matrizes diagonais. Os transceptores propostos são: DFT-ZF-MC-MRBT, DFT-ZF-SC-MRBT, DHT-ZF-MC-MRBT, DHT-ZF-SC-MRBT, DFT-MMSE-MC-MRBT, DFT-MMSE-SC-MRBT, DHT-MMSE-MC-MRBT e DHT-MMSE-SC-MRBT.

Cabe ressaltar que o método desenvolvido para a determinação do par gerador de deslocamento da solução MMSE foi uma proposta original (no melhor do conhecimento do autor) que não foi fruto de modificações em resultados da literatura.

# Capítulo 5

## Simulações de Sistemas

### Transceptores

Neste capítulo, serão apresentados os resultados de alguns exemplos simulados em computador com o intuito de verificar o desempenho dos transceptores propostos em relação aos sistemas OFDM e SC-FD padrões.

Para isso, serão testados dois cenários diferentes. O primeiro cenário (Seção 5.1) corresponde a um teste artificial em que os sinais são transmitidos por canais de Rayleigh aleatórios, os quais não seguem um padrão pré-definido de atrasos e de potências relativos entre os coeficientes do canal (em inglês, *power-delay profile*). No segundo cenário, utilizou-se um canal prático do tipo ADSL (do inglês *Asymmetric Digital Subscriber Line*) para as simulações (Seção 5.2). As considerações finais deste capítulo são traçadas na Seção 5.3.

#### 5.1 Transmissão em Canais de Rayleigh Aleatórios

Neste primeiro exemplo, são transmitidos 200 blocos contendo cada um  $M = 32$  símbolos BPSK (sem levar em consideração os elementos de redundância). Os parâmetros utilizados para a comparação dos sistemas são a taxa de erro de *bits* (BER) e a taxa de transmissão efetiva (*throughput*). Tais parâmetros são calculados utilizando-se o método de Monte-Carlo por meio de 10.000 simulações. Foi

considerada a seguinte definição para o cálculo do *throughput*:

$$\text{Throughput} = \alpha \frac{M}{M + K} (1 - \text{BER}) f_s \quad \text{bps}, \quad (5.1)$$

em que  $\alpha$  é o número de *bits* exigidos para a representação de um símbolo da constelação  $\mathcal{C}$  utilizada na transmissão,  $K$  é a quantidade de redundância inserida no transmissor e  $f_s$  é a frequência de amostragem. Além disso, assume-se também que a taxa de amostragem associada aos símbolos é  $f_s = 1,0$  MHz e que o canal através do qual os sinais são transmitidos trabalha na mesma taxa de amostragem.

Neste exemplo, busca-se ilustrar uma aplicação cuja restrição em relação a atrasos seja predominante. Além disso, assume-se também que o canal modela um ambiente extremamente dispersivo. Assim, a resposta ao impulso do modelo de canal (complexo) é longa, sendo sua ordem dada por  $L = 30$ . Tanto a parte real como a parte imaginária são realizações de processos estocásticos gaussianos brancos, com média zero e independentes. Todos os *taps* do canal possuem a mesma potência média e o canal é sempre normalizado, ou seja,  $\mathbf{E}[\|\mathbf{h}\|_2^2] = 1$ . Uma nova realização do canal é gerada para cada uma das dez mil simulações. Devido à aleatoriedade na escolha dessas realizações, é muito provável que a quantidade de zeros cômputos do canal seja menor do que o comprimento da redundância, garantindo-se, assim, a existência de soluções ZF. No caso da transmissão utilizando-se DHTs, optou-se por gerar os canais já simétricos para que a condição de simetria da matriz efetiva de canal fosse satisfeita.

A definição de razão sinal-ruído (SNR, do inglês *Signal-to-Noise Ratio*) adotada nas simulações é a razão entre a potência média de um símbolo do sinal transmitido (sinal de entrada do canal) e a potência média do ruído aditivo na entrada do receptor.

Os sistemas utilizados na transmissão são os tradicionais ZP-OFDM e ZP-SC-FD, além dos sistemas propostos, a saber: DFT-MC-MRBT, DFT-SC-MRBT, DHT-MC-MRBT e DHT-SC-MRBT. Para cada um desses sistemas utilizam-se as soluções ZF e MMSE. O ZP-OFDM e ZP-SC-FD foram escolhidos porque possuem um modelo mais próximo dos sistemas propostos, já que estes utilizam a adição de zeros como redundância.

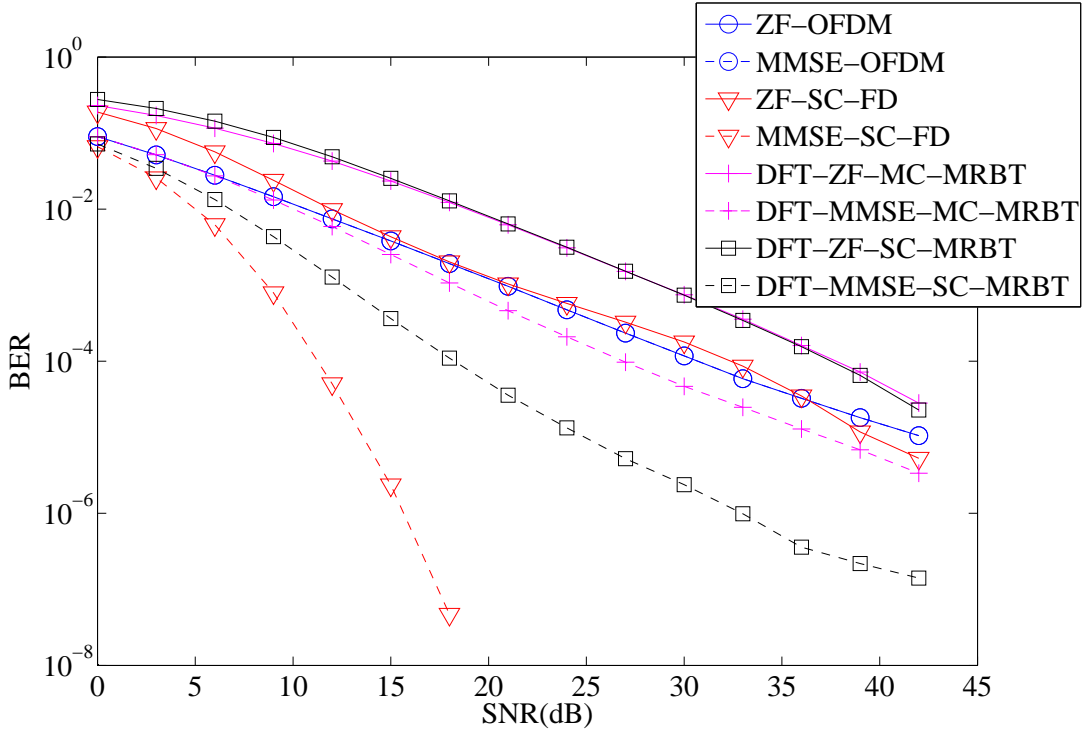


Figura 5.1: BER *versus* SNR para canais de Rayleigh aleatórios (transceptores baseados em DFT).

### 5.1.1 Sistemas Baseados em DFT

A Figura 5.1 mostra o desempenho em termos de BER dos transceptores propostos em comparação com o OFDM e o SC-FD. É possível verificar, neste caso em particular, que o sistema proposto DFT-MMSE-MC-MRBT possui um desempenho melhor do que a sua contraparte, MMSE-OFDM, o qual obteve exatamente o mesmo desempenho do ZF-OFDM. É possível verificar também que os sistemas propostos monoportadora e multiportadoras do tipo ZF possuem praticamente o mesmo desempenho em termos de BER, mas isso não ocorre com os mesmos sistemas do tipo MMSE, em que o transceptor monoportadora obteve um resultado muito melhor do que o multiportadoras. Por outro lado, esta figura indica que, com exceção do DFT-MMSE-MC-MRBT, os sistemas propostos não obtiveram o sucesso desejado em se tratando de BER. Porém, ao se considerar o efeito da BER na taxa de transmissão efetiva de dados, obtém-se um outro cenário em que os sistemas propostos se destacam (vide Figura 5.2).

A Figura 5.2 mostra um resultado favorável aos sistemas propostos principal-

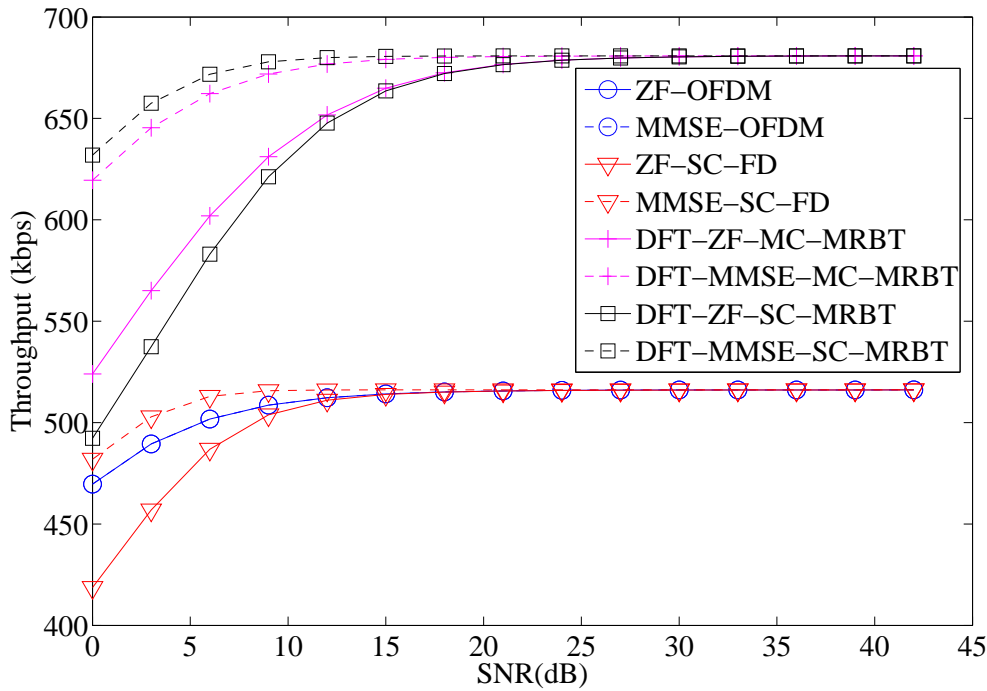


Figura 5.2: *Throughput versus SNR* para canais de Rayleigh aleatórios (transceptores baseados em DFT).

mente devido às escolhas para  $M$  e  $L$ . Com efeito, embora os sistemas propostos tenham obtido um desempenho pior em termos de BER (com exceção do DFT-MMSE-MC-MRBT), o fato deles utilizarem apenas  $L/2 = 15$  zeros para redundância no lugar de  $L = 30$  zeros faz com que a razão  $M/(L + K)$  seja maior no caso dos transceptores propostos do que nos transceptores tradicionais, aumentando, assim, suas taxas de transmissão. Porém, deve ser ressaltado que, nas aplicações em que  $M \gg L$ , os sistemas OFDM e SC-FD são soluções mais adequadas.

Voltando à discussão do desempenho em termos de BER, os resultados obtidos pelos transceptores propostos do tipo ZF podem ser explicados com base no número de condicionamento das matrizes efetivas de canal. De fato, no caso ZF monoportadora, por exemplo, o problema a ser resolvido é  $\mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{H}_0 \mathbf{s} + \mathbf{v}$ , cuja solução pode ser obtida multiplicando-se ambos os membros da equação por  $\mathbf{H}_0^{-1}$ .

Sabe-se que o número de condicionamento associado à matriz  $\mathbf{H}_0$  é dado por  $c = \|\mathbf{H}_0\|/\|\mathbf{H}_0^{-1}\|$ , para uma dada norma de matriz previamente fixada  $\|\cdot\|$ . Além



disso, dado que  $\mathbf{v} \neq 0$ , tem-se que [41]:

$$\frac{\|\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}\|}{\|\mathbf{s}\|} \leq c \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{H}_0 \mathbf{s}\|}. \quad (5.2)$$

No transceptor ZF-SC-FD,  $\mathbf{H}_0$  é uma matriz circulante, enquanto que no DFT-ZF-SC-MRBT é uma matriz de Toeplitz. Conforme foi observado durante as simulações, para quase todos os 10.000 canais gerados, o número de condicionamento da matriz circulante correspondente à uma determinada realização do canal foi menor do que o número de condicionamento da matriz de Toeplitz correspondente à mesma realização. Segundo a equação (5.2), isso implica que a matriz de Toeplitz tem um potencial maior para dar ganhos indevidos de ruído do que a matriz circulante. De fato isso aconteceu em aproximadamente 19% do total de canais gerados. Caso tais canais que geram matrizes de Toeplitz mal-condicionadas sejam desprezados, levando-se em consideração apenas os canais cujo número de condicionamento da matriz de Toeplitz associada seja no máximo seis vezes maior do que o número de condicionamento da matriz circulante associada, então é possível obter um desempenho melhor em termos de BER (especialmente para valores altos de SNR) e de *throughput* para os transceptores propostos do tipo ZF, conforme ilustram as Figuras 5.3 e 5.4.

Uma importante observação final é que o número de condicionamento da matriz de Toeplitz efetiva de canal pode ser modificado apropriadamente utilizando-se um pré-equalizador no domínio do tempo (TEQ, do inglês *Time-domain Equalizer*). Isso ficará mais claro na Seção 5.2.

### 5.1.2 Sistemas Baseados em DHTs

As Figuras 5.5 e 5.6 contêm os resultados das simulações similares às realizadas na Subseção 5.1.1. Neste caso, os canais já foram gerados simétricos e não foi colocada nenhuma restrição quanto ao condicionamento das matrizes envolvidas. Os resultados são bastante similares aos casos dos transceptores baseados em DFT. Percebe-se aqui que a grande vantagem dos sistemas propostos baseados em DHTs quando comparados aos tradicionais OFDM e SC-FD são suas maiores taxas de transmissão que são consequências diretas da utilização de redundância mínima para transmissão fixa e sem memória.

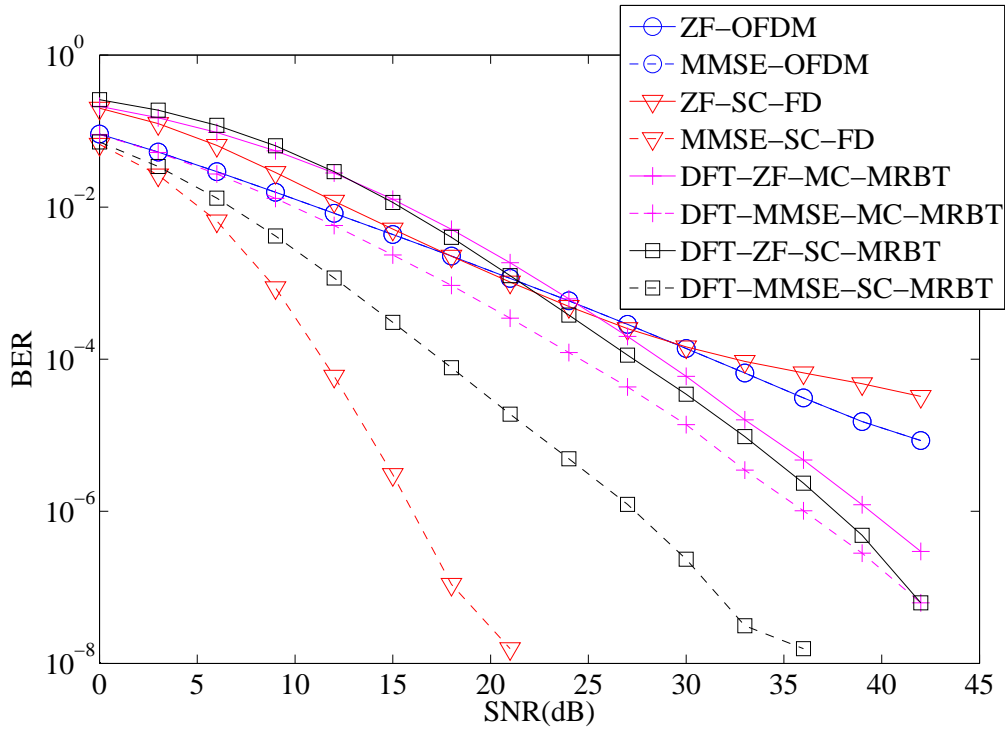


Figura 5.3: BER *versus* SNR para canais de Rayleigh aleatórios com restrição (transceptores baseados em DFT).

Uma vez que o condicionamento da matriz de Toeplitz de canal independe das matrizes de transmissão e de recepção, então os sistemas do tipo ZF propostos também sofrem com o ganho indevido de ruído. Mais uma vez, levando-se em consideração apenas os canais simétricos que não deem um ganho de ruído exarcebado (quando comparado ao ZF-OFDM e ZF-SC-FD), o que equivale a, aproximadamente, 85% dos canais, obtêm-se os resultados ilustrados nas Figuras 5.7 e 5.8.

## 5.2 Transmissão em Canal ADSL

Nesta seção, serão utilizados exemplos de transmissão que utilizam um canal prático ADSL. Este canal é representado pela aproximação FIR com 93 coeficientes da seguinte resposta ao impulso [42]:

$$H(z) = \frac{0,1z^{-2} - 0,1}{z^{-2} - 1,5z^{-1} + 0,54}. \quad (5.3)$$

Assume-se que a taxa de amostragem do canal é  $f_s = 1,0$  MHz. São transmitidos 2.000 blocos de dados, cada um deles contendo  $M = 128$  símbolos QPSK (desconsiderando os elementos nulos utilizados para intervalo de guarda). Novamente, as

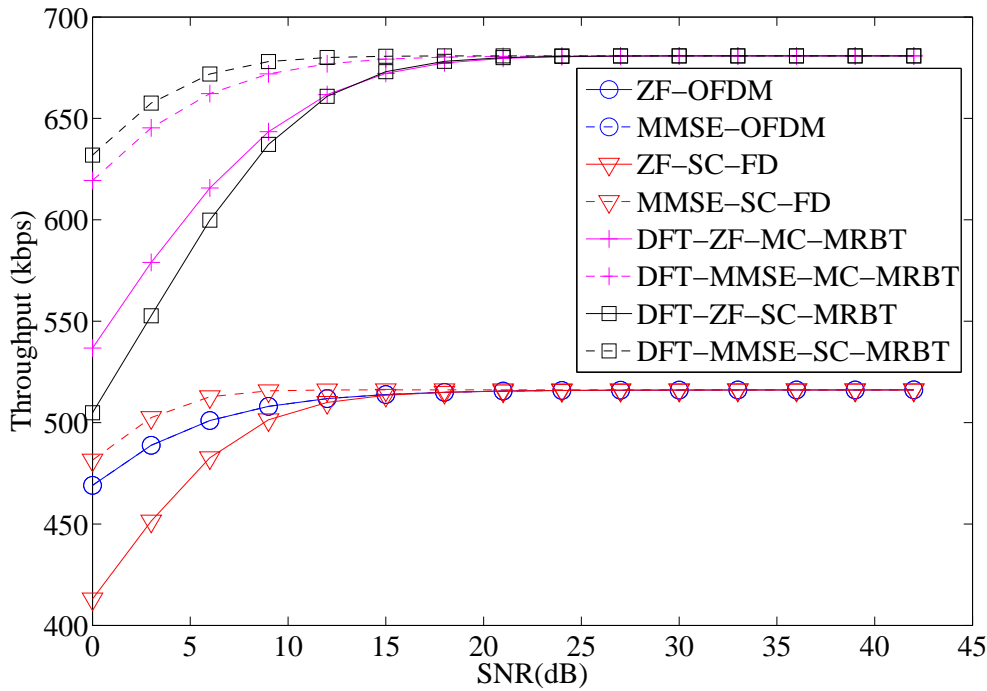


Figura 5.4: *Throughput versus SNR* para canais de Rayleigh aleatórios com restrição (transceptores baseados em DFT).

figuras de mérito são a BER e o *throughput*, assim como foi adotado na Seção 5.1. Considera-se também que os símbolos trabalham na mesma taxa de amostragem do canal.

### 5.2.1 Sistemas Baseados em DFT

Nas aplicações que empregam os sistemas OFDM e SC-FD e que estejam sujeitas a fortes restrições de atraso além de, simultaneamente, estarem submetidas a ambientes muito dispersivos, é mandatória a utilização de um pré-filtro na entrada do receptor (em inglês, *front-end prefilter*) com o intuito de reduzir o tamanho da resposta ao impulso equivalente do canal, viabilizando, assim, o uso de um intervalo de guarda menor [43].

Assumindo-se uma tal aplicação e buscando-se uma comparação mais justa em termos de *throughput* entre os sistemas propostos e os sistemas OFDM e SC-FD, optou-se por projetar um pré-filtro FIR de ordem 64, considerando uma SNR fixa em 30 dB para este projeto. O método utilizado neste projeto foi o UTC-MMSE (do inglês, *Unit-Time Constraint MMSE*) [43] e o comprimento da resposta ao impulso

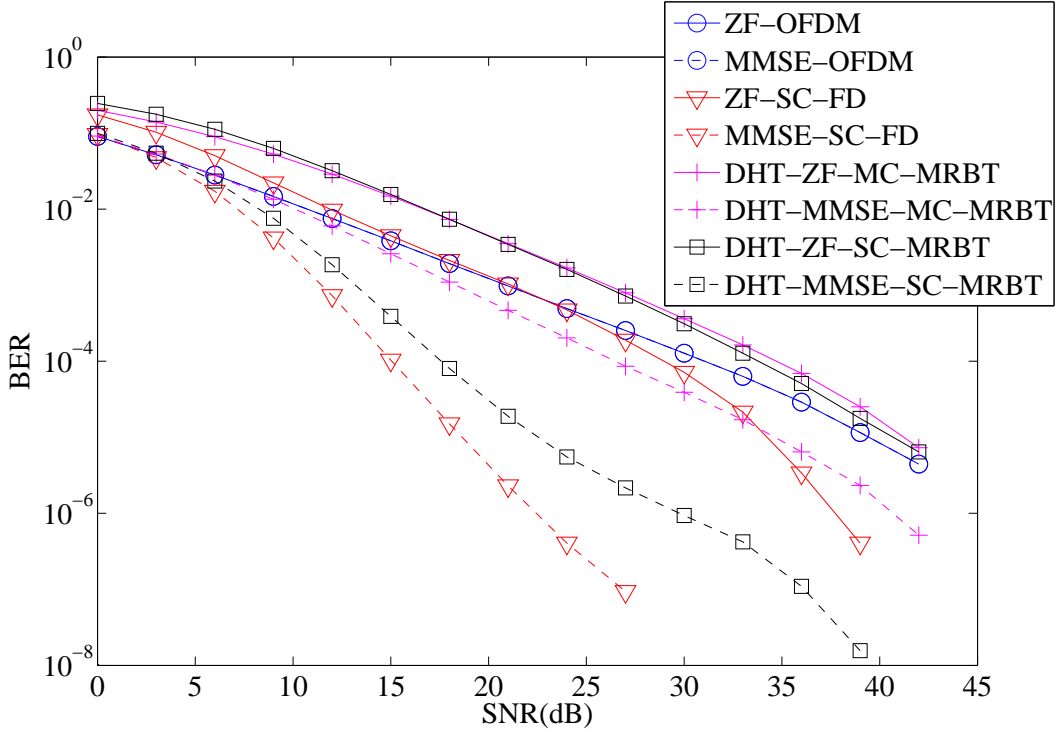


Figura 5.5: BER *versus* SNR para canais simétricos de Rayleigh aleatórios (transceptores baseados em DHTs).

do canal equivalente resultante (TIR, do inglês *Target Impulse Response*) foi fixado para  $L/2 + 1 = 47$ , de forma que a quantidade de redundância utilizada em todos os sistemas é  $L/2$ .

Além do pré-filtro para encurtamento de canal utilizado nos sistemas OFDM e SC-FD, utilizou-se também um pré-filtro nos sistemas propostos com o intuito de fazer com que a matriz de canal de Toeplitz equivalente fosse simétrica, já que, durante as simulações, observou-se que tal matriz possui um número de condicionamento mais apropriado de forma a diminuir o ganho indevido de ruído. Assim, conforme feito anteriormente, o pré-filtro foi projetado utilizando-se o método UTC-MMSE, objetivando um TIR de comprimento  $L + 1 = 93$  (ou seja, o comprimento da TIR é o mesmo do comprimento original do canal), mas acrescentando-se uma restrição quanto à simetria do canal. O leitor interessado em saber sobre as modificações que devem ser inseridas no projeto UTC-MMSE de forma a acrescentar a restrição de simetria pode consultar as referências [40] e [44].

A Figura 5.9 ilustra a magnitude da resposta em frequência do canal original, a magnitude da resposta em frequência do canal equivalente após o encurtamento,

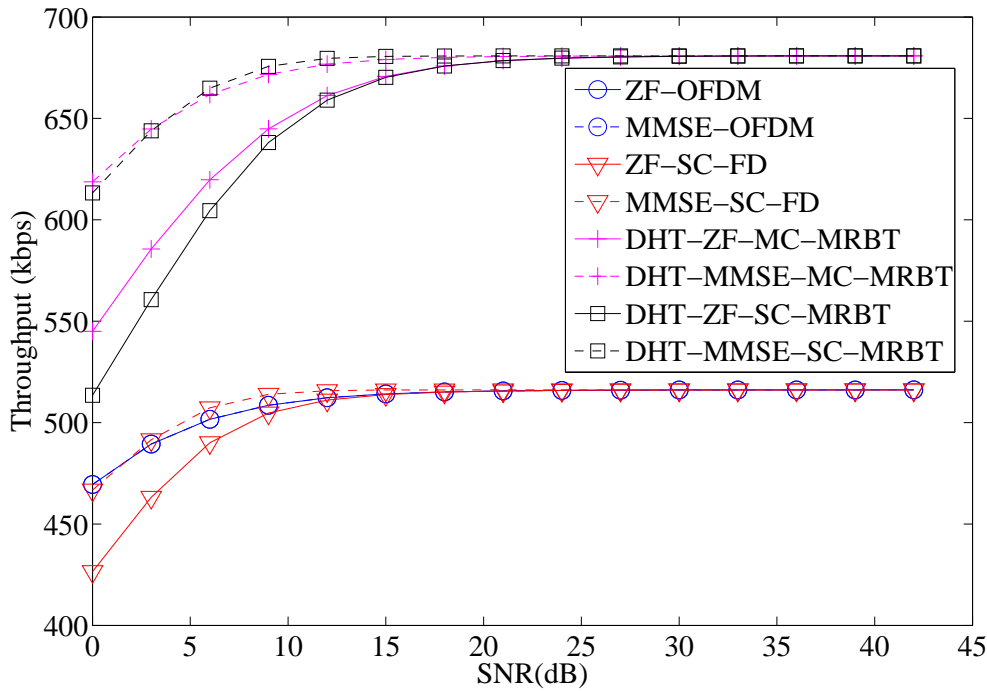


Figura 5.6: *Throughput versus SNR* para canais simétricos de Rayleigh aleatórios (transceptores baseados em DHTs).

o qual é empregado nos sistemas OFDM e SC-FD, e a magnitude da resposta em frequência do canal equivalente simétrico que é utilizado nos sistemas propostos MC-MRBT e SC-MRBT.

A Figura 5.10 exibe o desempenho em termos de BER para todos os sistemas propostos baseados em DFT, bem como para os sistemas OFDM e SC-FD. É possível verificar que todos os sistemas propostos obtiveram um desempenho ligeiramente melhor do que os sistemas usuais para ambos os casos, ZF e MMSE. Além disso, embora as quantidades de redundância inseridas pelos dois sistemas sejam a mesma, os sistemas propostos possuem um desempenho superior em termos de taxa de transmissão (vide Figura 5.11) devido às suas superioridades em relação à BER.

Além desse experimento, foi realizado outro tipo de simulação em que, no lugar de utilizar o pré-filtro dos transceptores propostos apenas para tornar o canal equivalente simétrico, optou-se por fazer o encurtamento do canal para o comprimento  $L/2 + 1 = 47$ , mantendo-se também a restrição quanto à simetria da TIR. A Figura 5.12 mostra uma comparação entre a magnitude da resposta em frequência do canal original de comprimento  $L + 1 = 93$  e dos canais encurtados assimétrico e

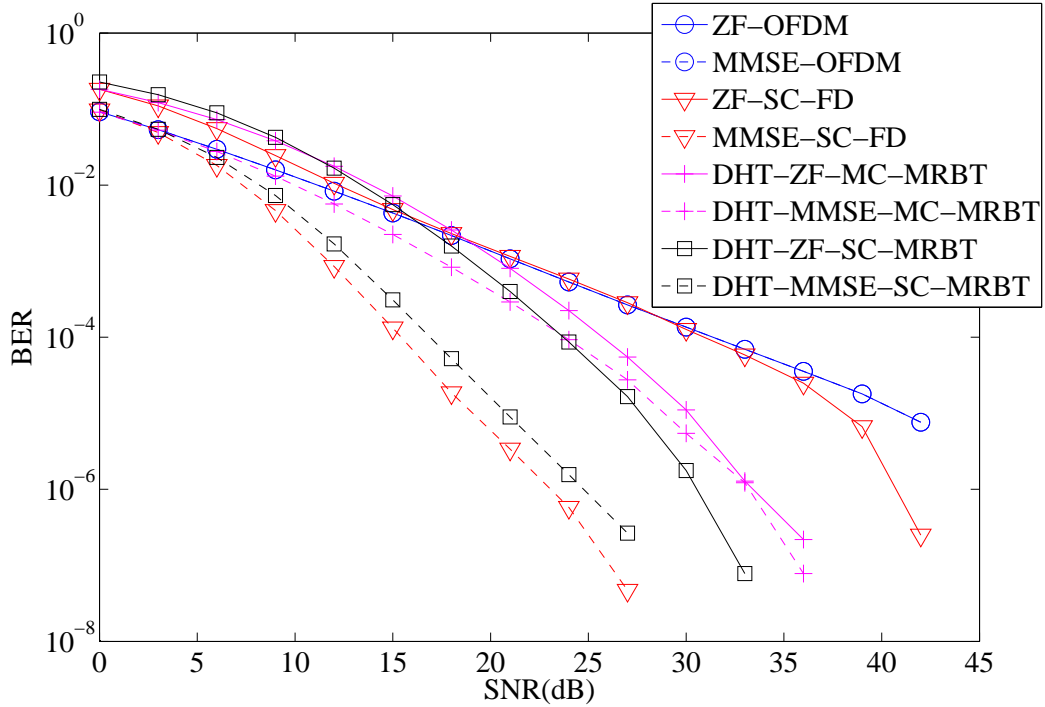


Figura 5.7: BER *versus* SNR para canais simétricos de Rayleigh aleatórios com restrição (transceptores baseados em DHTs).

simétrico de comprimento  $L/2 + 1 = 47$ .

As Figuras 5.13 e 5.14 contêm os resultados em relação à BER e à taxa de transmissão deste exemplo. Mais uma vez, os transceptores propostos obtiveram ligeira vantagem com relação à BER e uma vantagem significativa com relação ao *throughput* pois, neste caso, a quantidade de redundância inserida pelos sistemas propostos foi de  $K = L/4 = 23$  zeros.

## 5.2.2 Sistemas Baseados em DHTs

Os dois exemplos da Subseção 5.2.1 também foram realizados para os sistemas que utilizam DHTs. As Figuras 5.15 e 5.16 contêm os resultados quando os canais ADSL utilizados possuem comprimento 47 para os sistemas OFDM e SC-FD, e comprimento 93 para os sistemas MC-MRBT e SC-MRBT (vide Figura 5.9). As Figuras 5.17 e 5.18 apresentam os resultados obtidos quando, no lugar de uma TIR simétrica de comprimento 93, utiliza-se uma TIR simétrica de comprimento 47.

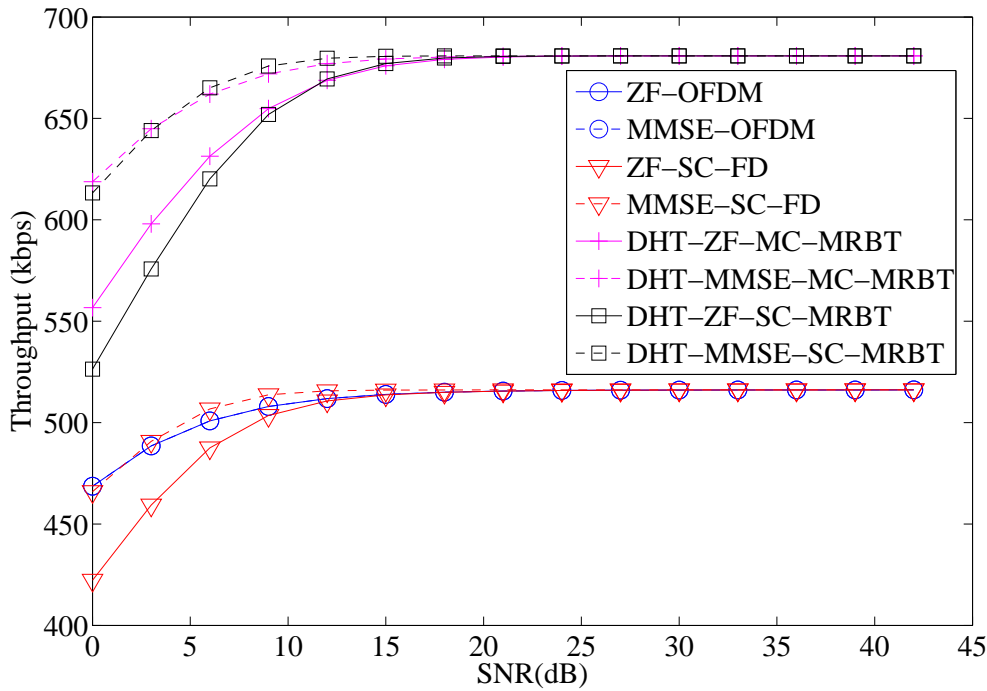


Figura 5.8: *Throughput versus SNR* para canais simétricos de Rayleigh aleatórios com restrição (transceptores baseados em DHTs).

### 5.3 Considerações Finais

Este capítulo apresentou os resultados de simulações dos oito transceptores propostos que utilizam redundância mínima. Com base nos resultados, foi possível constatar que, para alguns tipos de canais, os transceptores propostos permitem um alto ganho de ruído, especialmente os transceptores do tipo ZF. Porém, quando tais canais (menos de 20% do total gerado nas simulações apresentadas aqui) não são levados em consideração, é possível obter um desempenho melhor em termos de BER. A grande vantagem dos sistemas propostos ficou evidenciada nas simulações, a saber: o significativo ganho de taxa de transmissão efetiva. É claro que, esse ganho depende da razão entre o comprimento do bloco de dados sem redundância e o comprimento do bloco de dados transmitidos (já com redundância).

Os sistemas propostos se mostraram soluções promissoras nas aplicações em que se tenham restrições grandes sobre o atraso de processamento e experimentem canais cuja resposta ao impulso seja longa.

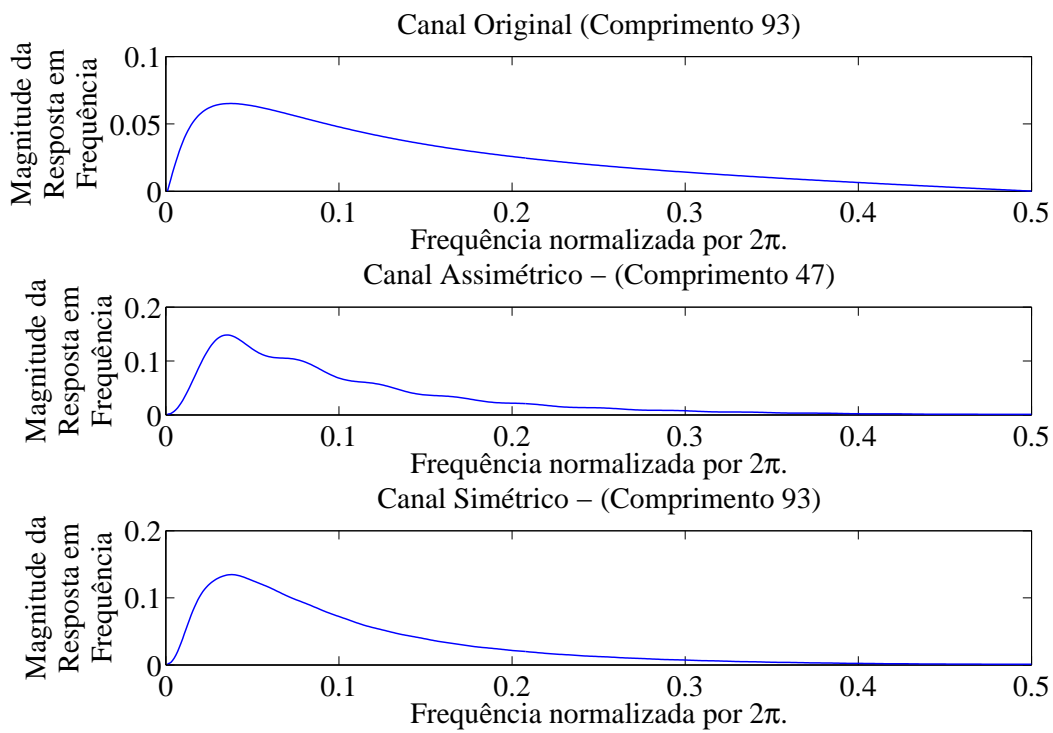


Figura 5.9: Magnitude da resposta em frequência dos canais original, assimétrico e simétrico, respectivamente.



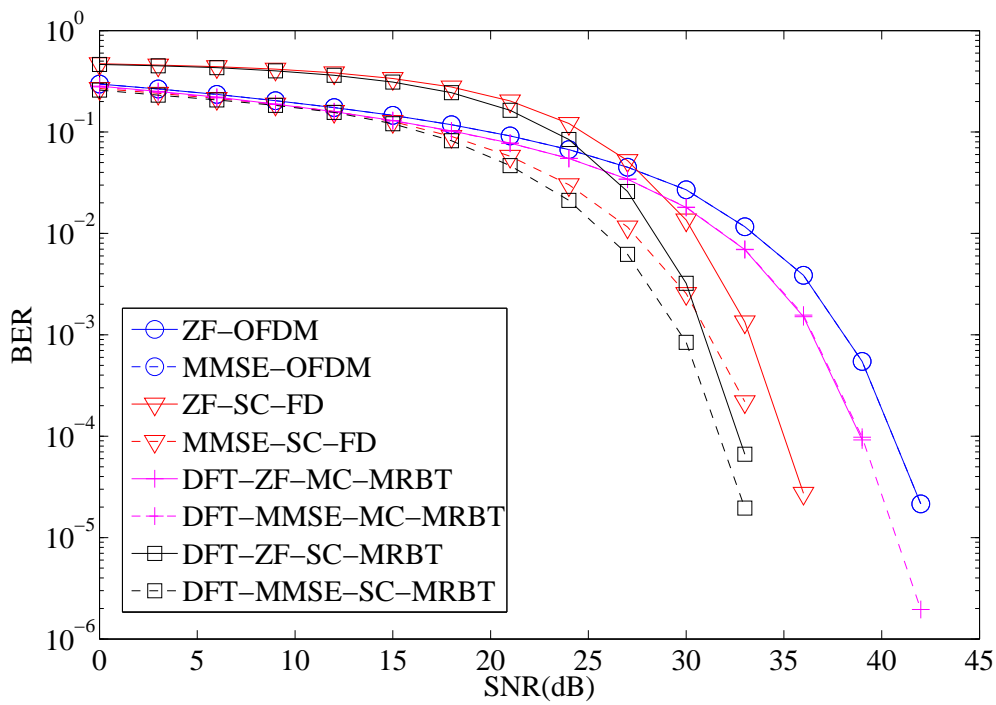


Figura 5.10: BER *versus* SNR para um canal ADSL com pré-filtragem (transceptores baseados em DFT). O OFDM e o SC-FD utilizam um canal equivalente de comprimento 47 e os sistemas propostos utilizam um canal equivalente simétrico de comprimento 93.

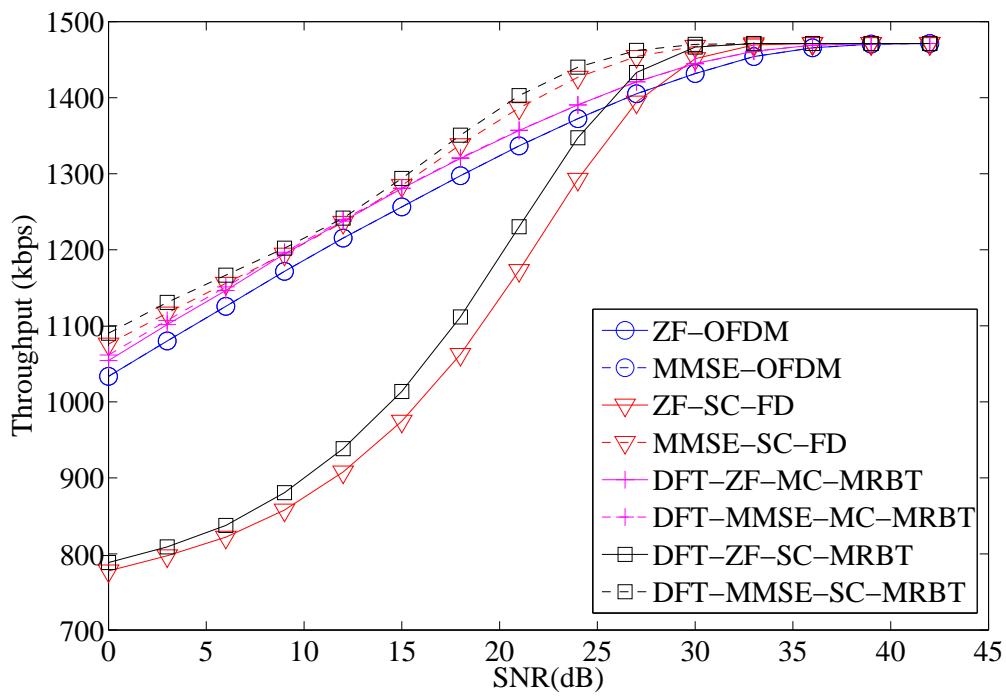


Figura 5.11: *Throughput versus SNR* para um canal ADSL com pré-filtragem (transceptores baseados em DFT). O OFDM e o SC-FD utilizam um canal equivalente de comprimento 47 e os sistemas propostos utilizam um canal equivalente simétrico de comprimento 93.

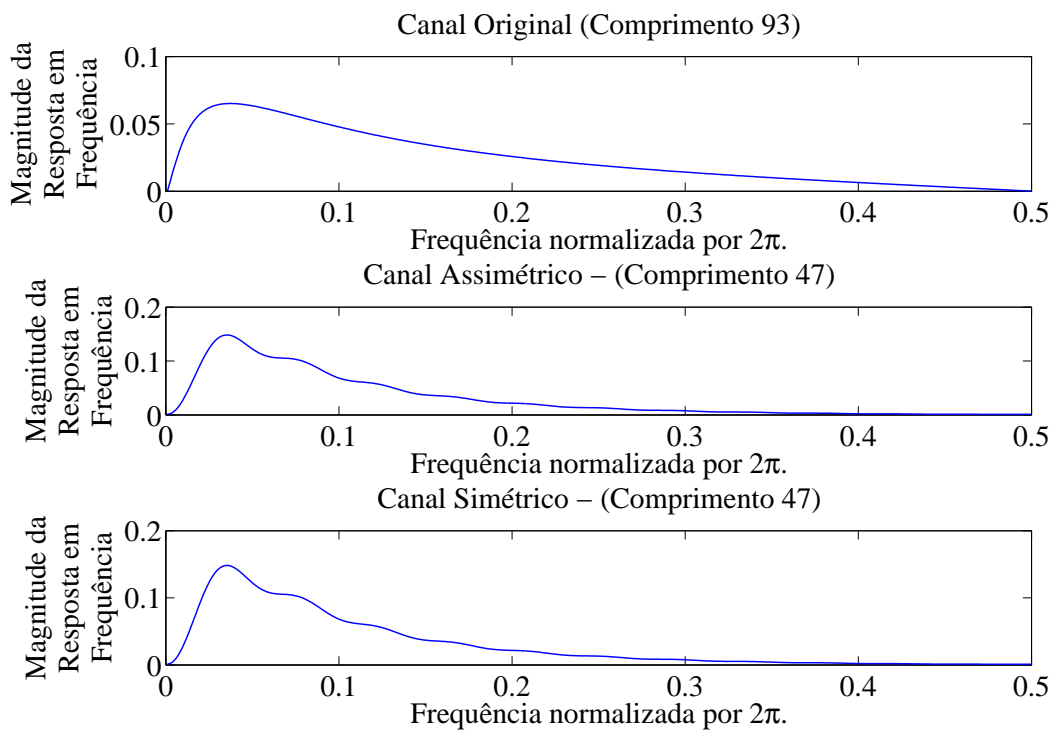


Figura 5.12: Magnitude da resposta em frequência dos canais original, assimétrico e simétrico com encurtamento, respectivamente.

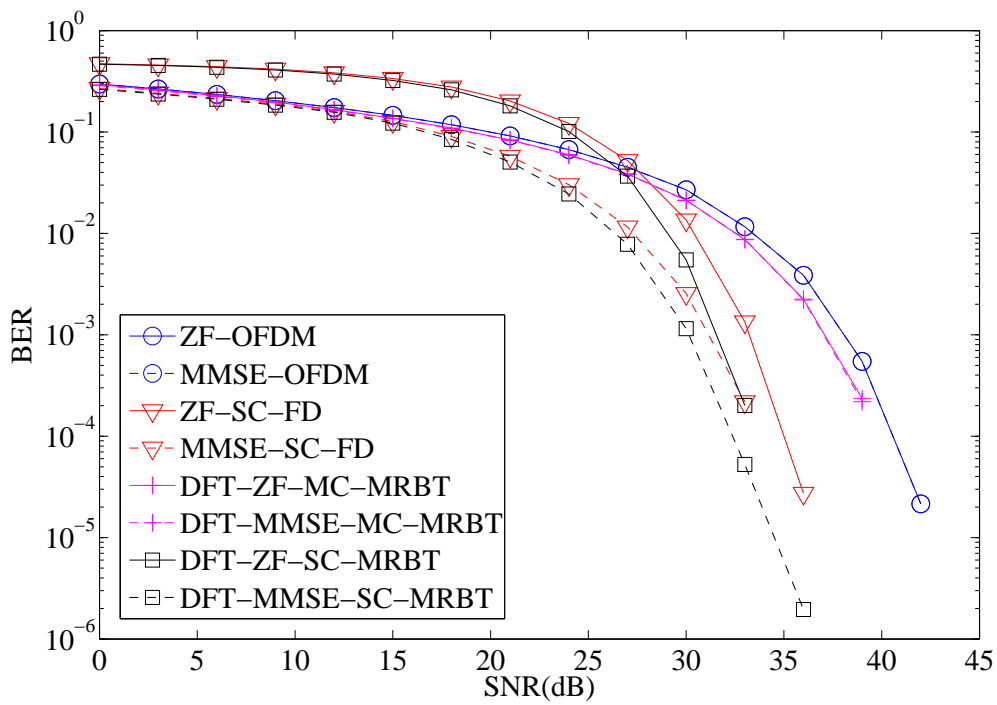


Figura 5.13: BER *versus* SNR para um canal ADSL com pré-filtragem (transceptores baseados em DFT). O OFDM e o SC-FD utilizam um canal equivalente de comprimento 47 e os sistemas propostos utilizam um canal equivalente simétrico de comprimento 47.

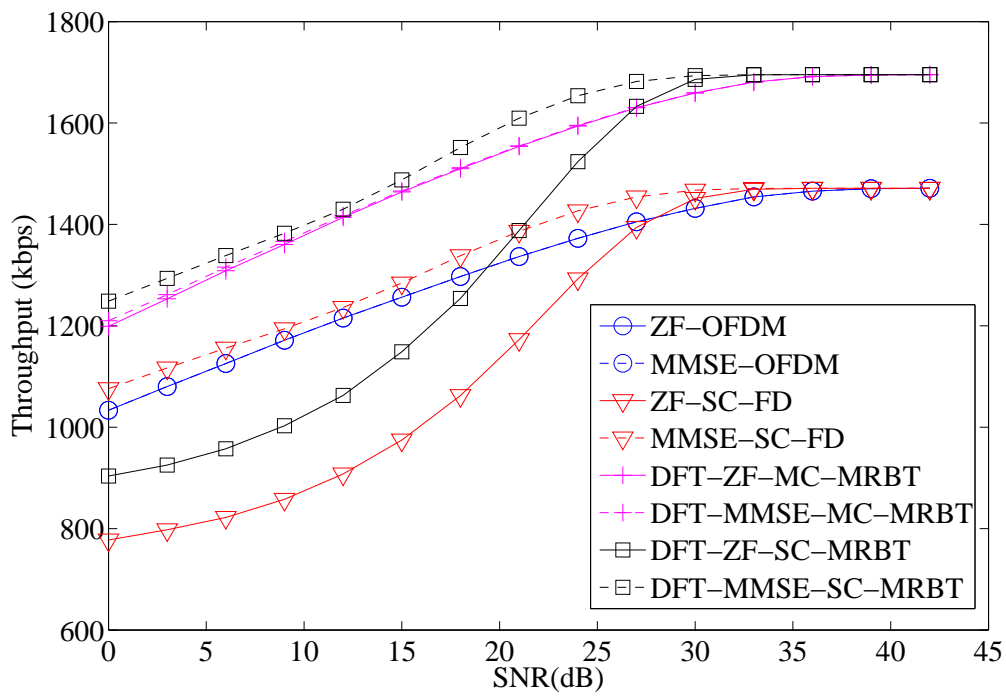


Figura 5.14: *Throughput versus SNR* para um canal ADSL com pré-filtragem (transceptores baseados em DFT). O OFDM e o SC-FD utilizam um canal equivalente de comprimento 47 e os sistemas propostos utilizam um canal equivalente simétrico de comprimento 47.

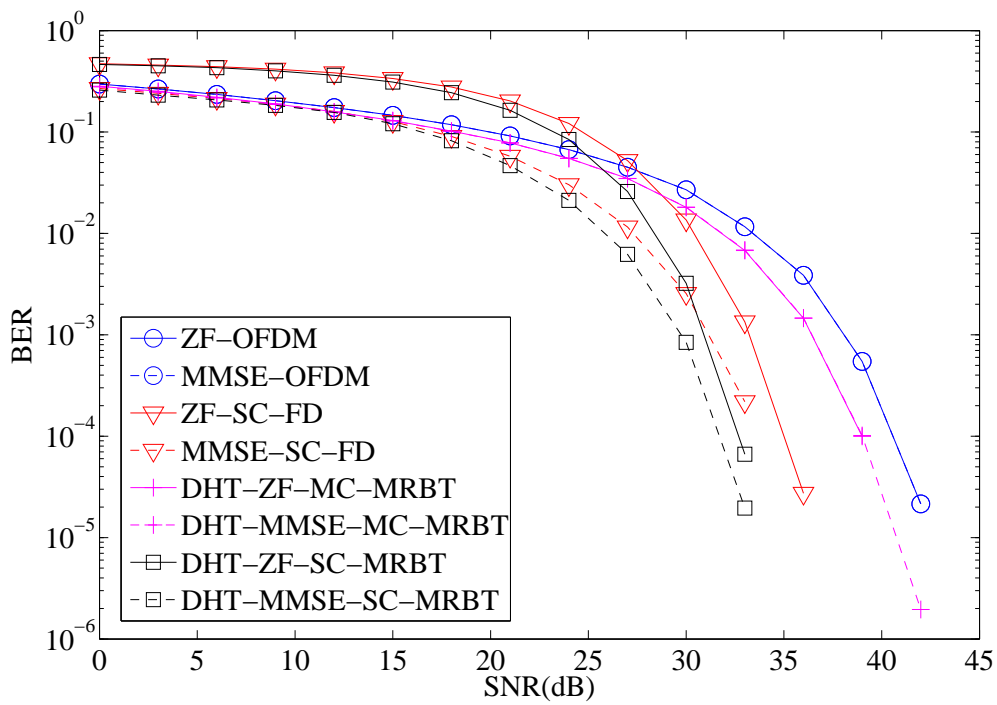


Figura 5.15: BER *versus* SNR para um canal ADSL com pré-filtragem (transceptores baseados em DHTs). O OFDM e o SC-FD utilizam um canal equivalente de comprimento 47 e os sistemas propostos utilizam um canal equivalente simétrico de comprimento 93.

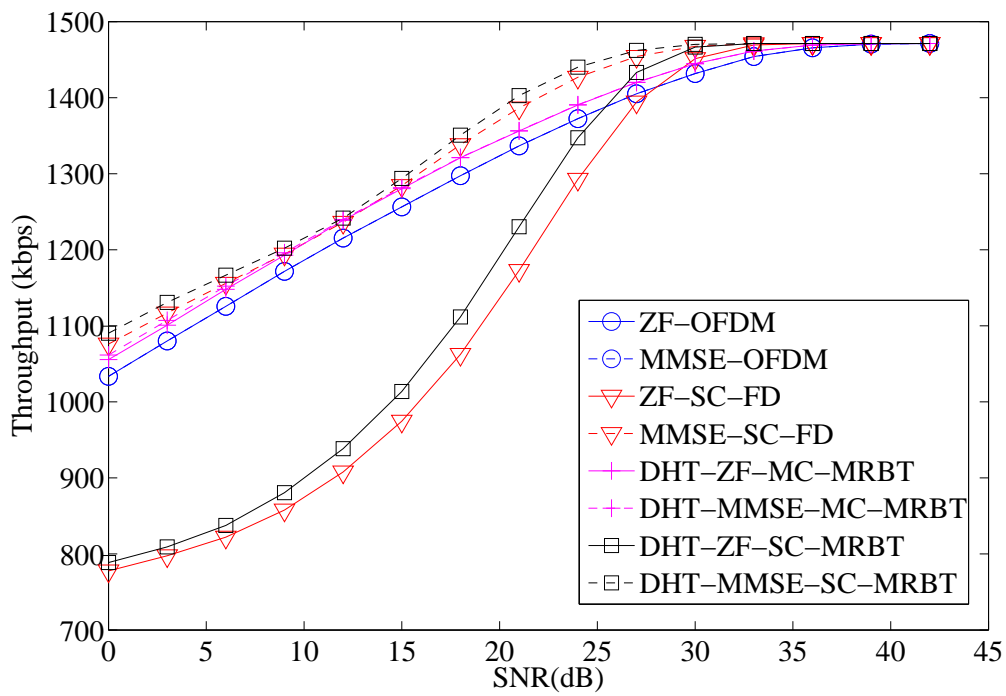


Figura 5.16: *Throughput versus SNR* para um canal ADSL com pré-filtragem (transceptores baseados em DHTs). O OFDM e o SC-FD utilizam um canal equivalente de comprimento 47 e os sistemas propostos utilizam um canal equivalente simétrico de comprimento 93.

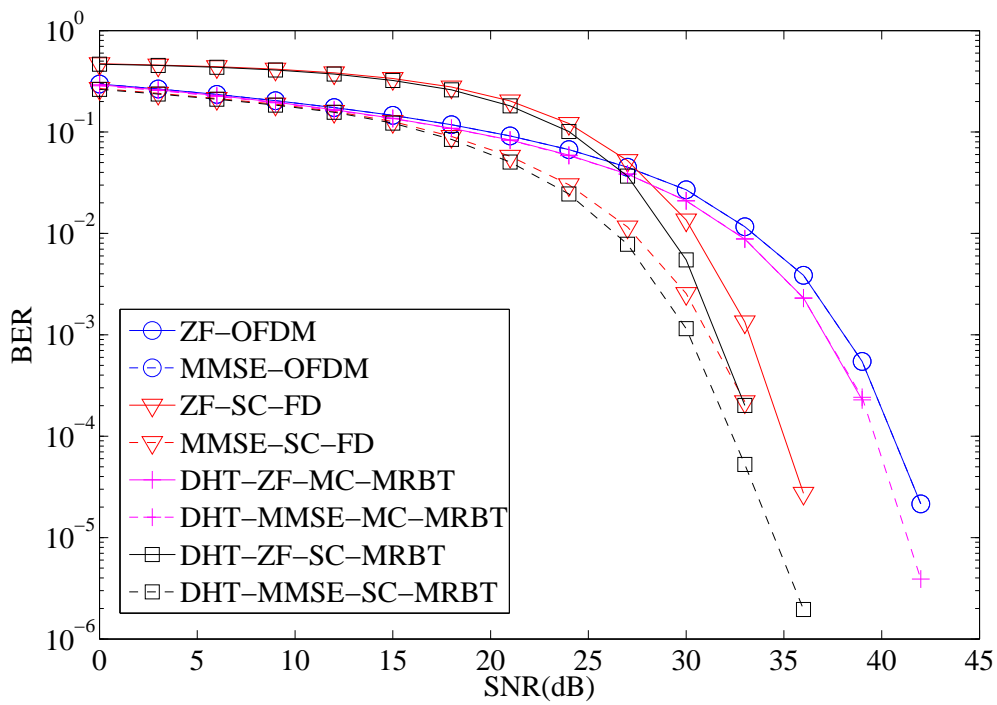


Figura 5.17: BER *versus* SNR para um canal ADSL com pré-filtragem (transceptores baseados em DHTs). O OFDM e o SC-FD utilizam um canal equivalente de comprimento 47 e os sistemas propostos utilizam um canal equivalente simétrico de comprimento 47.



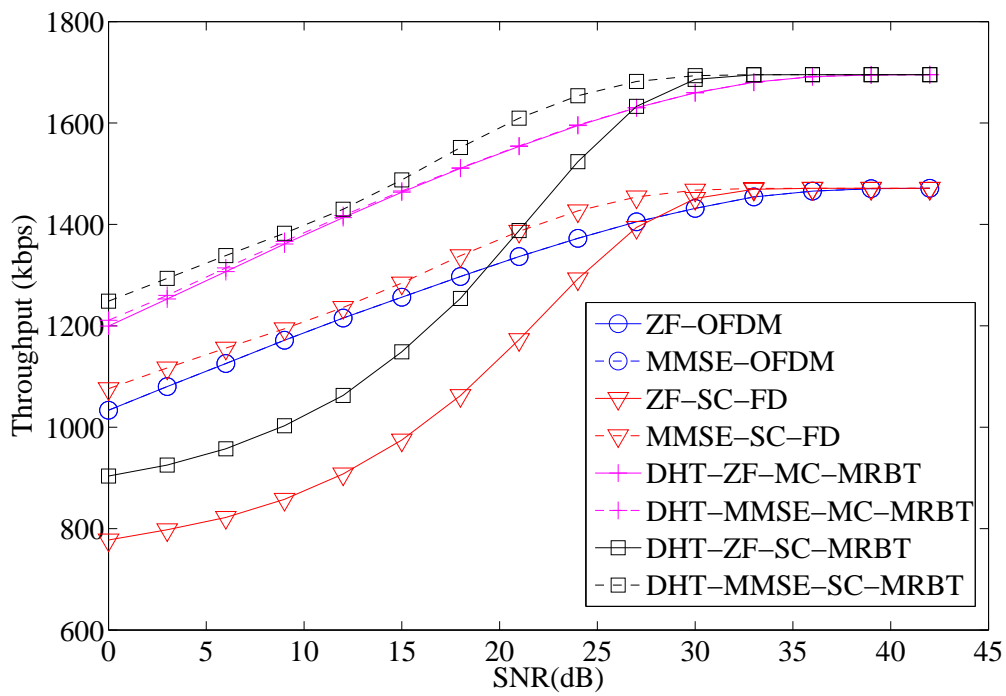


Figura 5.18: *Throughput versus SNR* para um canal ADSL com pré-filtragem (transceptores baseados em DHTs). O OFDM e o SC-FD utilizam um canal equivalente de comprimento 47 e os sistemas propostos utilizam um canal equivalente simétrico de comprimento 47.

# Capítulo 6

## Conclusões e Trabalhos Futuros

Nesta dissertação, foram propostas soluções efetivas para transceptores fixos e sem memória que utilizam redundância mínima. Tais transceptores foram deduzidos através de projetos dos tipos ZF e MMSE, usando apenas matrizes de DFT, de IDFT e matrizes diagonais, ou, ainda, matrizes de DHTs e matrizes diagonais (vide Capítulo 4). Esta característica fez com que os novos transceptores sejam computacionalmente eficientes.

A abordagem adotada aqui foi baseada nas propriedades de matrizes estruturadas utilizando-se os conceitos de operadores de deslocamento de Sylvester e de Stein. Tais conceitos exploram as propriedades estruturais de matrizes que tipicamente aparecem nas representações matriciais de canais de comunicação (vide Capítulo 2), tais como matrizes de Toeplitz, de Vandermonde, de Bézout e de Cauchy (vide Capítulo 3). Ao utilizar propriedades adequadas dos operadores de deslocamento, foi possível deduzir novas representações de bezoutianos generalizados, as quais foram a principal ferramenta para alcançar as soluções propostas para transceptores em bloco multiportadoras e monoportadora requerendo redundância mínima (cuja quantidade é dada pela metade da ordem do modelo FIR de canal).

As simulações mostraram que, com algumas pequenas restrições, os transceptores propostos possuem desempenho comparável aos transceptores usuais, tais como OFDM e SC-FD, em relação à taxa de erro de *bit*, mantendo, simultaneamente, uma complexidade computacional competitiva para o processo de equalização,  $\mathcal{O}(n \log n)$ . A principal característica dos transceptores propostos está no fato de possuírem uma taxa de transmissão efetiva de dados substancialmente maior do que os sistemas usu-

ais, especialmente para canais longos (vide Capítulo 5).

Este trabalho é apenas um ponto de partida para inúmeros outros trabalhos, dentre os quais se destacam os seguintes tópicos:

- Buscar utilizar outros tipos de transformadas reais para o projeto de transceptores multicanais fixos e sem memória. Um bom ponto de partida seria utilizar uma abordagem similar à descrita em [19];
- Verificar o desempenho dos transceptores propostos em ambientes com ruído colorido. É possível que o projeto mais elaborado dos bancos de filtros de análise e síntese de origem a transceptores mais robustos a tais interferências que muitas vezes ocorrem em situações práticas [45];
- Verificar o desempenho dos transceptores propostos quando o CFO é levado em consideração no modelo de comunicação;
- Desenvolver métodos práticos e otimizados para a estimação de canal nos sistemas propostos;
- Desenvolver um algoritmo super-rápido que resolva o problema de projeto do equalizador no caso dos sistemas provenientes da solução MMSE;
- Desenvolver soluções MMSE que sejam t-bezoutianos, no lugar de bezoutianos generalizados. A motivação para esse estudo é que, no caso do OFDM e SC-FD, as soluções ZF e MMSE possuem exatamente a mesma estrutura. Isso não ocorreu nos algoritmos desenvolvidos aqui, pois a solução ZF baseia-se em t-bezoutianos enquanto que a MMSE, em bezoutianos generalizados. É possível que a solução MMSE restrita a t-bezoutianos possua um desempenho semelhante a MMSE linear genérica, podendo ser mais simples do ponto de vista computacional. Este trabalho pode ser realizado utilizando-se os resultados sobre cálculo diferencial de matrizes estruturadas presentes em [46] e [47];
- Desenvolver transceptores rápidos com redundância reduzida, no lugar de redundância mínima. Alguns estudos mostram que a quantidade de redundância tem relação direta com o desempenho em termos de BER [48], [27]. Assim, é natural que se busquem soluções super-rápidas para sistemas transceptores

multicanais que trabalhem com redundância reduzida, no lugar de algo mais pretencioso como redundância mínima;

- Aplicar o conhecimento acumulado durante o projeto de transceptores fixos e sem memória em projetos de transceptores variantes no tempo e com memória [27], [7]. Um ponto de partida seria verificar se as soluções expressas no Teorema 1 do Capítulo 3, as quais são parametrizadas por escalares  $\xi$  e  $\eta$  podem servir como base para soluções de transceptores variantes no tempo, através da simples variação de tais escalares.
- Durante a defesa desta dissertação foi ressaltada a existência de trabalhos relacionados aos desenvolvidos aqui [49], [50].

A referência [49] não trata do problema de equalização, mas sim, do problema de estimação de canal para sistemas em bloco que utilizam redundância  $L$  (ou seja, não são sistemas de redundância mínima). Deve ser ressaltado que, em [49], há um resultado sobre a decomposição de t-bezoutianos hermitianos utilizando-se matrizes de DFT e matrizes diagonais sem a necessidade de extensão com zeros. O resultado desta dissertação é mais geral do que o de [49] pois a decomposição refere-se à bezoutianos generalizados sem a necessidade de extensão com zeros. A solução MMSE apresentada em [49] é um caso particular que usa o fato de a matriz de Toeplitz ( $\mathbf{H}$ ) em questão ser uma matriz de convolução, fazendo com que  $(\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma_v^2/\sigma_x^2\mathbf{I})$  seja uma matriz de Toeplitz. Isso implica que a decomposição de t-bezoutianos hermitianos presente em [49] pode ser aplicada sem problemas. No caso de sistemas com redundância mínima, porém,  $(\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^H + \sigma_v^2/\sigma_x^2\mathbf{I})$  não é de Toeplitz, o que fez com que se utilizem decomposições de bezoutianos generalizados tais quais as desenvolvidas nesta dissertação.

A referência [50] não trata de sistemas com redundância mínima. Além disso, ela só trata o caso de sistemas monoportadora. A principal ideia presente em [50] é simplificar o transceptor através da aproximação da matriz  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  por uma matriz circulante, em que  $\mathbf{H}$  é uma matriz de convolução, com o intuito de utilizar a decomposição espectral simples de matrizes circulantes. Ou seja, em [50] não é desenvolvida uma decomposição exata utilizando DFTs para

a matriz de equalização resultante da solução MMSE. Um possível trabalho futuro é tentar aplicar os conceitos presentes em [50] sobre tal aproximação nos sistemas com redundância mínima.

# Referências Bibliográficas

- [1] WANG, Z., MA, X., GIANNAKIS, G. B., “OFDM or single-carrier block transmissions?” *IEEE Trans. Commun.*, v. 52, pp. 380–394, 2004.
- [2] SCAGLIONE, A., GIANNAKIS, G. B., BARBAROSSA, S., “Redundant filter-bank precoders and equalizers part I: unification and optimal designs”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 47, pp. 1988–2006, 1999.
- [3] PANCALDI, F., VITETTA, G., KALBASI, R., et al., “Single-carrier frequency-domain equalization”, *IEEE SP Mag.*, v. 25, pp. 37–56, 2008.
- [4] AKANSU, A. N., DUHAMEL, P., L., et al., “Orthogonal transmultiplexers in communication: a review”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 46, pp. 979–995, 1998.
- [5] RIBEIRO, C. B., CAMPOS, M. L. R., DINIZ, P. S. R., “FIR equalizers with minimum redundancy”, *Proc. 2002 IEEE Intern. Conf. on Acoust. Speech and Signal Processing*, v. III, pp. 2673–2676, 2002.
- [6] LIN, Y. P., PHOONG, S. M., “Minimum redundancy for ISI free FIR filter-bank transceivers”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 50, pp. 842–853, 2002.
- [7] RIBEIRO, C. B., CAMPOS, M. L. R., DINIZ, P. S. R., “Time-varying FIR transmultiplexers with minimum redundancy”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 57, pp. 1113–1127, 2009.
- [8] SCAGLIONE, A., BARBAROSSA, S., GIANNAKIS, G. B., “Filterbank transceivers optimizing information rate in block transmissions over dispersive channels”, *IEEE Trans. Info. Theory*, v. 45, pp. 1019–1032, 1999.

- [9] LIN, Y. P., PHOONG, S. M., “Perfect discrete multitone modulation with optimal transceivers”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 48, pp. 1702–1711, 2000.
- [10] LIN, Y. P., PHOONG, S. M., “ISI-free FIR filter-bank transceivers for frequency selective channels”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 49, pp. 2648–2658, 2001.
- [11] TRAUTMANN, S., FLIEGE, N. J., “Perfect equalization for DMT systems without guard interval”, *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, v. 20, pp. 987–996, 2002.
- [12] VEGA, L. R., GALARZA, C. G., “Capacity-approaching block-based transceivers with reduced redundancy”, *Digital Signal Process.*, v. doi:10.1016/j.dsp.2008.07.011, pp. 1–20, 2008.
- [13] PAN, V. Y., *Structured Matrices and Polynomials: Unified Superfast Algorithms*. Springer: New York, 2001.
- [14] KAILATH, T., SAYED, A. H., “Displacement structure: theory and applications”, *SIAM Review*, v. 37, pp. 297–386, 1995.
- [15] PAN, V. Y., WANG, X., “Inversion of displacement operators”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, v. 24, pp. 660–667, 2003.
- [16] HEINIG, G., ROST, K., “DFT representations of Toeplitz-plus-Hankel Bezoutians with application to fast matrix-vector multiplication”, *Linear Algebra Appl.*, v. 284, pp. 157–175, 1998.
- [17] HEINIG, G., ROST, K., “Hartley transform representations of inverses of real Toeplitz-plus-Hankel matrices”, *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.*, v. 21, pp. 175–189, 2000.
- [18] HEINIG, G., ROST, K., “Hartley transform representations of symmetric Toeplitz matrix inverses with application to fast matrix-vector multiplication”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, v. 22, pp. 86–105, 2000.

- [19] HEINIG, G., ROST, K., “Efficient inversion formulas for Toeplitz-plus-Hankel matrices using trigonometric transformations”, *Struct. Matr. in Math., Comp. Sc., and Eng.*, v. 2, pp. 247–264, 2001.
- [20] DINIZ, P. S. R., *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation*. 3rd ed. Springer: Boston, MA, 2008.
- [21] DINIZ, P. S. R., DA SILVA, E. A. B., NETTO, S. L., *Digital Signal Processing: Systems Analysis and Design*. Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2002.
- [22] VAIDYANATHAN, P. P., *Multirate Systems and Filter Banks*. Englewood Cliffs: New Jersey, 1993.
- [23] VAIDYANATHAN, P. P., “Filter banks in digital communications”, *IEEE CAS Mag.*, v. 1, pp. 4–25, 2001.
- [24] VAIDYANATHAN, P. P., VRCELJ, B., “Transmultiplexers as precoders in modern digital communication: a tutorial review”, *Proc. 2004 IEEE Intern. Symposium on Circuits and Systems*, v. V, pp. 405–412, 2004.
- [25] RIBEIRO, C. B., *Equalização de Canal em Sistemas de Comunicações Utilizando Transmissão em Blocos*, Master’s Thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2002.
- [26] SCAGLIONE, A., GIANNAKIS, G. B., BARBAROSSA, S., “Redundant filter-bank precoders and equalizers part II: blind channel equalization, synchronization, and direct equalization”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 47, pp. 2007–2022, 1999.
- [27] RIBEIRO, C. B., *Sistemas de comunicações MIMO com reconstrução perfeita*, Ph.D. Thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.
- [28] VRCELJ, B., *Multirate Signal Processing Concepts in Digital Communications*, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, 2003.
- [29] DE BARCELLOS, L. C. R., *Estruturas Eficientes de Transmultiplexadores e de Bancos de Filtros Modulados por Cossenos*, Ph.D. Thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.



- [30] PROAKIS, J. G., *Digital Communications*. 4th ed. McGraw-Hill: New York, 2001.
- [31] GALLAGER, R. G., *Principles of Digital Communication*. Cambridge: New York, 2008.
- [32] MUQUET, B., WANG, Z., GIANNAKIS, G. B., et al., “Cyclic prefixing or zero padding wireless multicarrier transmissions?” *IEEE Trans. Commun.*, v. 50, pp. 2136–2148, 2002.
- [33] MERCHED, R., YOUSEF, N., “Carrier-offset and doppler compensation for OFDM receivers”, não foi publicado.
- [34] GRAY, R. M., *Toeplitz and Circulant Matrices: A Review*. Now Publisher: New York, 2006.
- [35] ZHANG, W., MA, X., GESTNER, B., et al., “Designing Low-Complexity Equalizers for Wireless Systems”, *IEEE Commun. Mag.*, v. 47, pp. 56–62, 2009.
- [36] SAYED, A. H., *Fundamentals of Adaptive Filtering*. Wiley: New York, 2003.
- [37] PAN, V. Y., “A unified superfast divide-and-conquer algorithm for structured matrices over abstract fields”, 1999, MSRI Preprint 1999-033, Mathematical Science Research Institute, Berkeley, CA.
- [38] KAILATH, T., KUNG, S.-Y., MORF, M., “Displacement ranks of a matrix”, *Bulletin of The American Math. Soc.*, v. 1, pp. 769–773, 1979.
- [39] ANTONIOU, A., LU, W.-S., *Practical Optimization: Algorithms and Engineering Applications*. Springer: New York, 2008.
- [40] RIBEIRO, C., SILVA, V., DINIZ, P. S. R., “Linear phase impulse response shortening for xDSL DMT modems”, *IEEE Int. Telecom. Symp.*, v. 1, pp. 368–371, 2002.
- [41] STRANG, G., *Linear Algebra and Its Applications*. 3rd ed. Harcourt Brace Jovanovich: San Diego, CA, 1988.

- [42] CIOFFI, J. M., “A Multicarrier Primer”, 1991, ANSI T1E1.4 Committee Contribution, no. 91-157, Boca Raton, FL: CRC Press.
- [43] AL-DHAHIR, N., CIOFFI, J. M., “Efficiently computed reduced-parameter input-aided MMSE equalizers for ML detection: a unified approach”, *IEEE Trans. Inf. Theory*, v. 42, pp. 903–915, 1996.
- [44] AL-DHAHIR, N., MINN, H., SATISH, S., “Optimum DCT-based multi-carrier transceivers for frequency-selective channels”, *IEEE Trans. Commun.*, v. 54, pp. 911–921, 2006.
- [45] FURTADO, M. B., *Otimização de Transceptores FIR Baseados em Bancos de Filtros Aplicados à Comunicação Digital Móvel e Fixa*, Ph.D. Thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006.
- [46] HJORUNGNES, A., PALOMAR, D. P., “Finding patterned complex-valued matrix derivatives by using manifolds”, *Proc. First Symposium on Applied Sciences in Biomedical and Communication Technologies*, pp. 1–5, 2008.
- [47] HJORUNGNES, A., GESBERT, D., “Introduction to complex-valued matrix differentiation”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 55, pp. 2740–2746, 2007.
- [48] VAIDYANATHAN, P. P., “On equalization of channels with ZP precoders”, *Proc. 2007 IEEE Intern. Symposium on Circuits and Systems*, v. 1, pp. 1329–1332, 2007.
- [49] MERCHED, R., “Application of superfast algorithms to pilot-based channel estimation schemes”, *Proc. The Ninth Workshop on Signal Processing Advances for Wireless Communications*, pp. 141–145, 2008.
- [50] GUAN, R., STROMER, T., “Krylov subspace algorithms and circulant embedding method for efficient wideband single-carrier equalization”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 56, pp. 2483–2495, 2008.