

EQUALIZAÇÃO DE MÍNIMA TAXA DE ERRO PARA A CONSTELAÇÃO  
L-PSK

Guilherme de Oliveira Pinto

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO  
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

---

Prof. Paulo Sergio Ramirez Diniz, Ph.D.

---

Prof. Ricardo Merched, Ph.D.

---

Prof. Charles Casimiro Cavalcante, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 2008

PINTO, GUILHERME DE OLIVEIRA

Equalização de Mínima Taxa de Erro  
para a Constelação L-PSK [Rio de  
Janeiro] 2008

VII, 66 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ,  
M.Sc., Engenharia Elétrica, 2008)

Dissertação - Universidade Federal do  
Rio de Janeiro, COPPE

1.Equalização Adaptativa 2.L-PSK

3.Sistemas de Comunicações 4.LMS

I.COPPE/UFRJ II.Título (série)

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## EQUALIZAÇÃO DE MÍNIMA TAXA DE ERRO PARA A CONSTELAÇÃO L-PSK

Guilherme de Oliveira Pinto

Agosto/2008

Orientador: Paulo Sergio Ramirez Diniz

Programa: Engenharia Elétrica

Os equalizadores adaptativos baseados nos critérios do erro quadrático e do erro médio quadrático são populares essencialmente porque possuem implementações simples através dos algoritmos RLS e LMS, respectivamente, e também porque suas funções-custo levam em consideração não somente a distorção causada pela sobreposição dos símbolos mas também toda e qualquer interferência sobre os símbolos transmitidos. No entanto, sabemos que os critérios do erro quadrático ou do erro médio quadrático não representam diretamente a principal figura de mérito da maior parte dos sistemas de comunicações digitais, sendo esta a taxa de erro de bits. Dessa forma, é imediato inferir que uma melhoria significativa de desempenho pode ser obtida se utilizarmos como função custo do procedimento de otimização a taxa de erro de símbolos, ao invés do erro quadrático ou do erro médio quadrático.

Dessa forma, nesta dissertação, primeiro, propomos o equalizador de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK. Então, depois disto, obtemos o equalizador adaptativo de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK, para o caso de elevada razão sinal-ruído e para um valor suficientemente elevado do número de símbolos da constelação L-PSK.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## MINIMUM SER EQUALIZATION FOR THE L-PSK CONSTELLATION

Guilherme de Oliveira Pinto

August/2008

Advisor: Paulo Sergio Ramirez Diniz

Department: Electrical Engineering

The ubiquitous Minimum Mean Square Error (MMSE) criterion has proved to be of great practical and theoretical importance, especially because of its simplicity, generality and analytical tractability. However, at the same time that the MMSE criterion provides a cost function that is general enough to be applied to innumerable problems of interest, it is not able to model precisely the cost function of most problems of practical interest.

Accordingly, in this work, we, first, propose the equalizer which minimizes directly the symbol error rate for the L-PSK signal constellation. And after that, by using approximations to the high signal-to-noise ratio and also to a signal constellation large enough, we propose the adaptive equalizer which approximately minimizes the symbol error rate for the L-PSK signal constellation.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Filtros Adaptativos . . . . .	1
1.2	Aplicação: Equalização Adaptativa . . . . .	1
1.3	Motivação . . . . .	3
1.4	Estrutura da Dissertação . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Filtros Adaptativos</b>	<b>5</b>
2.1	Algoritmo LMS . . . . .	5
2.2	Algoritmo LMP . . . . .	6
2.3	Equalização Adaptativa de Mínima Taxa de Erro para a Constelação 2-PAM . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Filtragem MIMO de Mínima Taxa de Erro</b>	<b>9</b>
3.1	Descrição do Sistema . . . . .	9
3.2	Cálculo da Expressão Exata para a SER . . . . .	13
3.3	Formulação do Problema de Otimização . . . . .	20
3.4	Comparação de Desempenho . . . . .	24
3.5	Conclusão . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Equalização Adaptativa de Mínima Taxa de Erro</b>	<b>27</b>
4.1	Introdução . . . . .	27
4.2	Derivação do Equalizador Adaptativo . . . . .	27
4.3	Comparação de Desempenho . . . . .	31
4.3.1	Ambiente de Simulações . . . . .	32
4.3.2	Desempenho em Regime Transiente . . . . .	33
4.3.3	Desempenho em Regime Permanente . . . . .	35

4.3.4	Considerações Finais . . . . .	36
4.4	Conclusão . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>41</b>
5.1	Trabalhos Futuros . . . . .	42
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>43</b>
<b>A</b>	<b>Prova do Lema 1</b>	<b>46</b>
<b>B</b>	<b>Prova da Proposição 3</b>	<b>49</b>
<b>C</b>	<b>Prova do Lema 3</b>	<b>52</b>
<b>D</b>	<b>Prova da Proposição 4</b>	<b>58</b>
<b>E</b>	<b>Prova do Lema 2</b>	<b>60</b>
<b>F</b>	<b>Prova do Lema 8</b>	<b>64</b>

# Lista de Figuras

1.1	Filtro Adaptativo . . . . .	2
3.1	Sistema MIMO. . . . .	11
3.2	$ \Delta_{ik}  \in [0, \frac{\pi}{L}]$ . . . . .	16
3.3	$ \Delta_{ik}  \in (\frac{\pi}{L}, \pi - \frac{\pi}{L}]$ . . . . .	17
3.4	$ \Delta_{ik}  \in (\pi - \frac{\pi}{L}, \pi]$ . . . . .	18
3.5	Comparação entre os algoritmos EMSERE, LMP e o filtro de Wiener para valores da SNR entre 0dB e 35dB. . . . .	26
4.1	Comparação entre os algoritmos AMSERE, EMSERE e LMP para a SNR de 25dB. . . . .	33
4.2	Comparação entre os algoritmos AMSERE, EMSERE e LMP para a SNR de 20dB. . . . .	34
4.3	Comparação entre os algoritmos AMSERE, EMSERE e LMP para a SNR de 30dB. . . . .	35
4.4	Comparação entre os algoritmos AMSERE, EMSERE, LMP e o filtro de Wiener para valores da SNR entre 0dB e 35dB. . . . .	36
4.5	Comparação entre os algoritmos AMSERE, EMSERE, e o filtro de Wiener para os 10 canais escolhidos. . . . .	38
4.6	Comparação entre os algoritmos AMSERE, EMSERE, e o filtro de Wiener e os coeficientes iniciais dos algoritmos AMSERE e EMSERE para os 20 canais aleatórios. . . . .	39
A.1	Ilustração do resultado apresentado pelo Lema 1. . . . .	48
F.1	Comparação entre $\text{snrh}(\lambda, s, \sigma)$ e $\frac{\mathcal{H}(\lambda, s, \sigma)}{\sin(\lambda)}$ para $\text{snr} = 10$ . . . . .	66
F.2	Comparação entre $\text{snrh}(\lambda, s, \sigma)$ e $\frac{\mathcal{H}(\lambda, s, \sigma)}{\sin(\lambda)}$ para $\text{snr} = 50$ . . . . .	66

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Filtros Adaptativos

Em meados da década de 1950, a introdução dos computadores digitais no controle dos *links* de comunicações fez com que a maior parte da atividade na área da teoria de sistemas estivesse direcionada para os sistemas com dados amostrados [1]. Como resultado desse esforço, o filtro de Kalman [1, 2] e o algoritmo LMS (*Least Mean Squares*) [3, 4] foram propostos no início da década de 60. O LMS é reconhecido, atualmente, como o mais simples e mais utilizado algoritmo de aprendizado [3].

Na Figura 1.1, esquematizamos o mecanismo, básico, de adaptação dos coeficientes de um filtro FIR,  $h(n)$ . Os sinais  $d(n)$  e  $x(n)$  correspondem ao sinal desejado e ao sinal utilizado como entrada do filtro adaptativo, respectivamente. O sinal  $e(n)$  corresponde a diferença entre a saída do filtro adaptativo,  $y(n)$ , e o sinal desejado,  $d(n)$ . Então, a cada amostra, o algoritmo adaptativo será responsável por alterar os coeficientes do filtro FIR com objetivo de reduzir o valor de uma função do sinal de erro,  $F\{e(n)\}$ .

### 1.2 Aplicação: Equalização Adaptativa

Na teoria dos sistemas de comunicações engloba-se o efeito das distorções causadas pelo filtro de transmissão, modulador, meio de transmissão e demodulador em um filtro comumente referido como o "canal" [5]. Em um canal monousuário



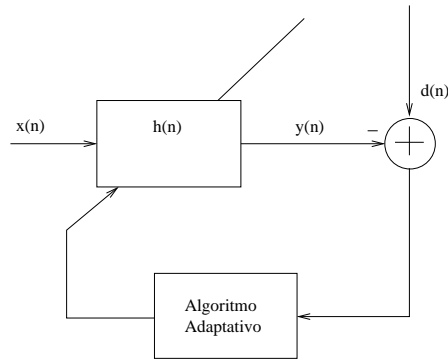


Figura 1.1: Filtro Adaptativo

a distorção causada pela sobreposição dos símbolos recebidos é chamada de interferência entre símbolos sendo o tipo de interferência mais comum ao lado do ruído aditivo [5]. Em sistemas de comunicações sem fio a interferência entre símbolos resulta, principalmente, da propagação do sinal pelo meio de transmissão por múltiplos caminhos.

A natureza do canal sem fio é inerentemente não estacionária. Não só a distância do aparelho à estação base poderá variar mas também os possíveis múltiplos caminhos. Dessa forma, nesse ambiente, qualquer solução para a supressão de interferência deverá adaptar-se às exigências do ambiente [5].

Apesar de o estudo da aplicação de filtros adaptativos em equalizadores ser uma área ativa de pesquisa [6, 7, 8], sua origem não é recente [9]. No início da década de 70 a utilização de filtros adaptativos para propósitos de equalização já era estudado. Já nessa época estabeleceu-se os dois modos de operação para o equalizador: o modo de treinamento onde o equalizador se adapta e o modo de operação onde o equalizador funciona como um filtro fixo ou adaptativo de forma cega.

Durante o modo de treinamento, a saída do canal será utilizada como entrada do filtro adaptativo e os símbolos transmitidos corresponderão ao sinal desejado. Dessa forma, poderemos obter, de maneira adaptativa e sem conhecimento prévio dos momentos estatísticos dos sinais envolvidos, um filtro que corrija as distorções produzidas pelo canal.

## 1.3 Motivação

Os equalizadores adaptativos baseados nos critérios do erro quadrático e do erro médio quadrático são populares essencialmente porque possuem implementações simples através dos algoritmos RLS e LMS [4], respectivamente, e também porque suas funções-custo levam em consideração não somente a distorção causada pela sobreposição dos símbolos mas também toda e qualquer interferência sobre os símbolos transmitidos. Uma evidência dessa popularidade corresponde ao fato de que alguns dos principais livros de filtragem adaptativa [10, 4, 9] dedicam-se quase que exclusivamente à exposição de algoritmos adaptativos que baseiam-se diretamente ou indiretamente nestes critérios.

No entanto, sabemos que os critérios do erro quadrático ou do erro médio quadrático não representam diretamente a principal figura de mérito da maior parte dos sistemas de comunicações digitais, sendo esta a taxa de erro de bits. Dessa forma, é imediato inferir que uma melhoria significativa de desempenho pode ser obtida se utilizarmos como função custo do procedimento de otimização a taxa de erro de símbolos, ao invés do erro quadrático ou do erro médio quadrático.

Então, com este objetivo em mente, os trabalhos [11, 12, 7] dedicaram-se a encontrar os equalizadores adaptativos de mínima taxa de erro para as constelações L-PAM [13] e L-QAM [13]. Em linhas gerais, os algoritmos encontrados apenas incorporam a atualização seletiva dos coeficientes ao já conhecido algoritmo LMS ao mesmo tempo que proporcionam um desempenho superior em relação a taxa de erro de símbolos.

Dessa forma, motivados por estes resultados, começamos a nos questionar como deveria ser o equalizador adaptativo de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK [13] e também se esse algoritmo possuiria alguma conexão com o algoritmo adaptativo que minimiza o quadrado da diferença de fase entre o sinal desejado e a saída do filtro adaptativo (algoritmo LMP ou *Least Mean Phase*) [14]. Neste contexto, surgiu o tópico desta dissertação, que corresponde ao desenvolvimento do equalizador adaptativo de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK.

## 1.4 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação tem como objetivo principal encontrar o equalizador adaptativo de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK. Mais precisamente, buscaremos as respostas às seguintes perguntas:

P1: Qual é a expressão do equalizador adaptativo de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK ?

P2: O equalizador adaptativo de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK possui alguma relação com o algoritmo adaptativo que minimiza o quadrado da diferença de fase entre o sinal desejado e a saída do filtro adaptativo (algoritmo LMP ou *Least Mean Phase*) [14]?

No capítulo 2 apresentamos os fundamentos teóricos desta dissertação, como a apresentação do algoritmo LMP (*Least Mean Phase*) [14] e a descrição do equalizador de mínima taxa de erro para a constelação L-PAM [11, 7].

No capítulo 3, considerando um sistema de comunicações MIMO que utiliza a constelação L-PSK, calcularemos os gradientes da SER em relação aos filtros MIMO de transmissão e de recepção. Este capítulo apresentará resultados instrumentais para o desenvolvimento do equalizador adaptativo de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK.

No capítulo 4 utilizaremos os resultados obtidos no capítulo anterior com objetivo de responder as perguntas P1 e P2. E, depois simularemos o algoritmo proposto com objetivo de avaliar o seu desempenho.

Finalmente, concluímos nosso trabalho no Capítulo 5 e discutimos alguns trabalhos que podem ser realizados a partir do desenvolvimento apresentado nesta dissertação.

# Capítulo 2

## Filtros Adaptativos

Nesse capítulo, apresentaremos os filtros adaptativos relacionados ao desenvolvimento do algoritmo adaptativo a ser proposto nesta dissertação, o equalizador adaptativo de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK. Neste capítulo descreveremos os algoritmos LMS (*Least Mean Squares*) [4, 9, 10], LMP (*Least Mean Phase*) [14] e o equalizador de mínima taxa de erro para a constelação 2-PAM [13, 11, 7].

Denotaremos os coeficientes do filtro adaptativo, no instante  $n$ , como  $\mathbf{w}(n) \in \mathbb{C}^{(l+1)}$ , para  $l \in \mathbb{N}$ . A entrada do filtro adaptativo e o sinal desejado serão denotados por  $\mathbf{u}(n) \in \mathbb{C}^{(l+1)}$ ,  $d(n) \in \mathbb{C}$ , respectivamente.

### 2.1 Algoritmo LMS

A forma real do algoritmo LMS (*Least Mean Squares*) foi proposta em 1960 pelo trabalho pioneiro de B. Widrow e M. E. Hoff Jr., marcando, assim, o início da teoria moderna de filtragem adaptativa [4, 9, 10]. Nessa seção derivaremos o algoritmo LMS como uma aproximação para o método da descida mais íngreme [4, 9].

O método da descida mais íngreme é um método iterativo de busca de solução que atualiza os valores da variável a ser otimizada no sentido oposto ao do vetor gradiente, da seguinte forma:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \nabla_w [\xi(\mathbf{w}(n))], \quad (2.1)$$

onde  $\mu$  corresponde ao passo do algoritmo e  $\nabla_w [\xi(\mathbf{w}(n))]$  ao vetor-gradiente da

função  $\xi(\cdot)$  em relação a  $\mathbf{w}(n)$  no ponto  $\xi(\mathbf{w}(n))$ .

Vale a pena ressaltar que apesar de o método apresentado nessa seção ser geral o suficiente para ser aplicado em qualquer função função-objetivo  $\xi(\mathbf{w}(n))$  o resultado da busca dependerá da condição inicial quando a função objetivo não for convexa ou côncava [15].

Para a função custo, convexa, do *erro médio quadrático linear* [4, 9] a recursão do método da descida mais íngreme pode ser escrita como

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \left[ \mathbf{R}_u \mathbf{w}(n) - \mathbf{R}_{ud} \right], \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{R}_u$  corresponde à matriz de autocorrelação do sinal de entrada e  $\mathbf{R}_{ud}$  à correlação cruzada entre o sinal desejado e o sinal de entrada.

Aproximando as matrizes  $\mathbf{R}_u$  e  $\mathbf{R}_{ud}$  por realizações instantâneas, obtemos as seguintes recursões

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \left[ \mathbf{u}(n) \mathbf{u}^T(n) \mathbf{w}(n) - \mathbf{u}(n) d(n) \right] \quad (2.3)$$

$$= \mathbf{w}(n) + \mu \mathbf{u}(n) \left[ d(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{u}(n) \right]. \quad (2.4)$$

Finalmente, obtemos na equação (2.4) a recursão que representa o algoritmo adaptativo LMS. Vale a pena salientar que durante a adaptação utilizamos somente o conjunto de coeficientes do filtro adaptativo do instante anterior,  $\mathbf{w}(n)$ , o regressor,  $\mathbf{u}(n)$ , e a diferença entre o sinal desejado,  $d(n)$ , e a saída do filtro adaptativo,  $\mathbf{w}^T(n) \mathbf{u}(n)$ .

## 2.2 Algoritmo LMP

Nessa seção, apresentaremos um algoritmo de filtragem adaptativa cuja motivação é complementar a motivação do algoritmo LMS. Nesta seção apresentaremos o algoritmo LMP (*Least Mean Phase*) [14] que, ao invés de minimizar a quadrado do valor absoluto entre o valor desejado e a saída do filtro adaptativo, busca minimizar o quadrado da diferença de fase entre o valor desejado e a saída do filtro adaptativo. Essa abordagem pode ser especialmente interessante quando desejamos utilizar esse algoritmo como um equalizador adaptativo em um sistema de comunicação que utilize a constelação L-PSK [13], por exemplo.

Mais precisamente, para o conjunto de coeficientes  $\mathbf{w}(n)$ , a função-custo que representa o valor médio do quadrado da diferença de fase entre o valor desejado,  $d(n)$ , e a saída do filtro adaptativo,  $\mathbf{w}^T(n)\mathbf{u}(n)$ , pode ser escrita como [14]

$$\xi_{LMP}(\mathbf{w}(n)) = \mathbb{E} \left[ \left( \angle \frac{\mathbf{w}^T(n)\mathbf{u}(n)}{d(n)} \right)^2 \right], \quad (2.5)$$

onde  $d(n) \neq 0$ .

Calculando o vetor-gradiente da função  $\xi_{LMP}(\cdot)$  em relação a  $\mathbf{w}(n)$  no ponto  $\xi_{LMP}(\mathbf{w}(n))$  e realizando aproximações estocásticas baseadas em realizações instantâneas, obtemos a implementação adaptativa [14]

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \left( \angle \frac{\mathbf{w}^T(n)\mathbf{u}(n)}{d(n)} \right) \frac{j\mathbf{u}^*(n)}{(\mathbf{w}^T(n)\mathbf{u}(n))^*}, \quad (2.6)$$

que corresponde ao algoritmo adaptativo LMP (*Least Mean Phase*).

## 2.3 Equalização Adaptativa de Mínima Taxa de Erro para a Constelação 2-PAM

Nessa seção, apresentaremos o equalizador adaptativo de mínima taxa de erro para a constelação 2-PAM [11, 7]. A conexão deste algoritmo com o algoritmo LMS motivará o desenvolvimento do algoritmo adaptativo a ser proposto nesta dissertação, que corresponde ao equalizador adaptativo de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK.

Primeiro, para a constelação 2-PAM [13], consideramos que os símbolos transmitidos sejam  $\pm 1$ , e que há um erro de transmissão, no instante  $n$ , quando o sinal do símbolo transmitido,  $d(n)$ , é diferente do sinal da saída do equalizador,  $\mathbf{w}^T(n)\mathbf{u}(n)$ . Mais precisamente, definimos a função indicadora de erro como

$$I_{PAM}(d(n), \mathbf{w}^T(n)\mathbf{u}(n)) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se } \text{sign}(d(n)) \neq \text{sign}(\mathbf{w}^T(n)\mathbf{u}(n)) \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.7)$$

onde a função  $\text{sign}(\cdot)$  retorna o valor do sinal de seu argumento. A função indicadora de erro,  $I_{PAM}(d(n), \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n))$ , é igual a 1 quando há um erro de transmissão e igual a 0 quando a transmissão é realizada com sucesso.

Nesse cenário, os trabalhos [11, 7] propuseram o equalizador de mínima taxa de erro para a constelação 2-PAM para o caso de elevada razão sinal-ruído (SNR). Este algoritmo pode ser descrito pela seguinte recursão [11, 7]

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu I_{PAM}(d(n), \mathbf{w}^T(n)\mathbf{u}(n))d(n)\mathbf{u}(k). \quad (2.8)$$

Neste ponto, convém ressaltar duas importantes características deste algoritmo, que servirão para motivar o desenvolvimento do algoritmo a ser proposto nesta dissertação:

- o equalizador de mínima taxa de erro para a constelação 2-PAM só atualiza seus coeficientes quando há um erro de transmissão. Ou seja, este algoritmo é seletivo em relação às suas atualizações;
- devido a semelhança do equalizador de mínima taxa de erro para a constelação 2-PAM com o algoritmo LMS, podemos interpretá-lo como uma versão do algoritmo LMS que incorpora a atualização seletiva dos seus coeficientes.

Então, combinando os resultados apresentados nesta seção com a descrição do algoritmo LMP, realizada na seção anterior, somos levados a conjecturar que, ao realizarmos a atualização seletiva dos coeficientes do algoritmo LMP, poderemos obter o equalizador de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK [13]. No Capítulo 4 desta dissertação forneceremos a resposta a esta conjectura.

## Capítulo 3

# Filtragem MIMO de Mínima Taxa de Erro

Nesse capítulo, primeiro, apresentamos o sistema de comunicação MIMO utilizado e, em seguida, calculamos a expressão de sua taxa de erro de símbolos (SER). Depois disso, com objetivo de utilizar o algoritmo da descida mais íngreme para otimizar os filtros MIMO de transmissão e de recepção, calcularemos os gradientes da SER em relação aos coeficientes dos filtros de transmissão e de recepção, respectivamente. Por último, iremos comparar o desempenho do equalizador de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK com os desempenhos do algoritmo LMP [14] e do filtro Wiener [2]. Dessa forma, através de alguns exemplos, poderemos avaliar qualitativamente o ganho de desempenho obtido ao adotar-se a abordagem apresentada neste capítulo.

Esse capítulo apresentará alguns dos resultados descritos no trabalho [16], como, por exemplo, o Teorema 1 e os Lemas 1 e 3. Como contribuição desta dissertação apresentaremos as Proposições 2, 3 e 4 e os Corolários 1 e 2.

Os resultados apresentados neste capítulo serão instrumentais no desenvolvimento do algoritmo adaptativo a ser apresentado no próximo capítulo.

### 3.1 Descrição do Sistema

O sistema de comunicação MIMO utilizado nesse capítulo é ilustrado na Figura 3.1. O canal é representado pelo filtro FIR MIMO  $\tilde{\mathbf{C}}(z)$  e os filtros FIR MIMO



de transmissão e de recepção correspondem às matrizes  $\tilde{\mathbf{E}}(z)$  e  $\tilde{\mathbf{R}}(z)$ , respectivamente. Os filtros  $\tilde{\mathbf{C}}(z)$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}(z)$  e  $\tilde{\mathbf{R}}(z)$  são definidos como

$$\tilde{\mathbf{C}}(z) \triangleq \sum_{i=0}^q \mathbf{c}(i)z^{-i}, \quad (3.1)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(z) \triangleq \sum_{i=0}^m \mathbf{e}(i)z^{-i}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}(z) \triangleq \sum_{i=0}^l \mathbf{r}(i)z^{-i}, \quad (3.3)$$

onde  $\mathbf{c}(i) \in \mathbb{C}^{P \times N}$ ,  $\mathbf{e}(i) \in \mathbb{C}^{N \times M}$  e  $\mathbf{r}(i) \in \mathbb{C}^{M \times P}$ . Também será útil definirmos a matriz da convolução do receptor,  $\tilde{\mathbf{R}}(z)$ , com o canal,  $\tilde{\mathbf{C}}(z)$ , como  $\tilde{\mathbf{H}}(z) \triangleq \tilde{\mathbf{R}}(z)\tilde{\mathbf{C}}(z)$ , de forma que tenhamos

$$\tilde{\mathbf{H}}(z) = \sum_{i=0}^{q+l} \mathbf{h}(i)z^{-i}, \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{h}(i) \in \mathbb{C}^{M \times N}$ .

Nesse cenário, nosso objetivo final consiste em otimizar os coeficientes dos filtros  $\tilde{\mathbf{E}}(z)$  e  $\tilde{\mathbf{R}}(z)$  de forma a minimizar a taxa de erro de símbolos (SER) para a constelação L-PSK. A seguir, para facilitar a referência, definimos a constelação L-PSK.

**Definição 1.** *A constelação L-PSK é definida pelo seguinte conjunto [13]*

$$\mathcal{L} \triangleq \left\{ a \in \mathbb{C} \mid a = \exp\left(\frac{j2\pi k}{L}\right), \text{ para } k = 0, 1, \dots, (L-1) \right\}. \quad (3.5)$$

O sinal de entrada, de saída e o ruído aditivo do sistema de comunicação ilustrado na Figura 3.1 são definidos no domínio do tempo, respectivamente, como  $\mathbf{x}_M(n) \in \mathcal{L}^M$ ,  $\hat{\mathbf{x}}(n) \in \mathbb{C}^M$  e  $\mathbf{v}_P(n) \in \mathbb{C}^P$ . Assume-se que as  $M$  componentes do vetor,  $\mathbf{x}_M(n)$ , sejam descorrelacionadas entre si e também que os símbolos de cada componente sejam independentes entre si e distribuídos de maneira uniforme no conjunto  $\mathcal{L}$ . O ruído  $\mathbf{v}_P(n)$  é aditivo Gaussiano circularmente simétrico (AGCS) [17] e independente do sinal de entrada  $\mathbf{x}_M(n)$ . Além disso, o ruído,  $\mathbf{v}_P(n)$ , é estacionário no sentido amplo, possui média zero e matriz de covariância conhecida.

Neste cenário, combinando os efeitos do ruído aditivo, do canal e dos filtros de transmissão e recepção, podemos escrever a expressão para a saída do sistema no domínio do tempo como [16]

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \mathbf{RCF}\mathbf{x}(n) + \mathbf{R}\mathbf{v}(n), \quad (3.6)$$

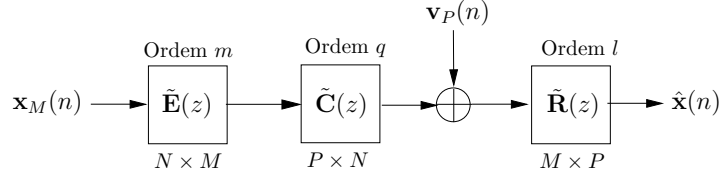


Figura 3.1: Sistema MIMO.

onde as matrizes  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{P(l+1) \times N(l+q+1)}$  e  $\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{N(l+q+1) \times M(m+q+l+1)}$  são definidas pelas matrizes Sylvester [18], em blocos, abaixo

$$\mathbf{C} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{c}(0) & \mathbf{c}(1) & \mathbf{c}(2) & \cdots & \mathbf{c}(q) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}(0) & \mathbf{c}(1) & \cdots & \mathbf{c}(q-1) & \mathbf{c}(q) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{c}(0) & \mathbf{c}(1) & \cdots & \mathbf{c}(q-1) & \mathbf{c}(q) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{F} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{e}(0) & \mathbf{e}(1) & \mathbf{e}(2) & \cdots & \mathbf{e}(m) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}(0) & \mathbf{e}(1) & \cdots & \mathbf{e}(m-1) & \mathbf{e}(m) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{e}(0) & \mathbf{e}(1) & \cdots & \mathbf{e}(m-1) & \mathbf{e}(m) \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

e os sinais  $\mathbf{x}(n) \in \mathcal{L}^{M(m+q+l+1)}$  e  $\mathbf{v}(n) \in \mathbb{C}^{P(l+1)}$  são definidos como

$$\mathbf{x}(n) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_M(n) \\ \mathbf{x}_M(n-1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M(n-m-q-l) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}(n) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{v}_P(n) \\ \mathbf{v}_P(n-1) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_P(n-l) \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

E, define-se a matriz  $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{M \times P(l+1)}$  da seguinte forma

$$\mathbf{R} \triangleq [\mathbf{r}(0) \ \mathbf{r}(1) \ \cdots \ \mathbf{r}(l)]. \quad (3.10)$$

Por último, também será útil definirmos a matriz  $\mathbf{H}$  da seguinte forma

$$\mathbf{H} \triangleq [\mathbf{h}^T(q+l) \ \mathbf{h}^T(q+l-1) \ \cdots \ \mathbf{h}^T(0)]^T. \quad (3.11)$$

Além de ser importante caracterizarmos a saída do sistema MIMO,  $\hat{\mathbf{x}}(n)$ , também é conveniente escrevermos a expressão da sua  $i$ -ésima componente, que também corresponde a  $i$ -ésima saída do receptor MIMO. Com esse objetivo, primeiro, escrevemos o vetor  $\hat{\mathbf{x}}(n)$  em função das suas  $M$  componentes

$$\hat{\mathbf{x}}(n) \triangleq [\hat{x}_1(n), \hat{x}_2(n), \dots, \hat{x}_M(n)]^T. \quad (3.12)$$

Podemos descrever  $\hat{x}_i(n)$  como

$$\hat{x}_i(n) = \mathbf{w}_i^T \mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{x}(n) + \mathbf{w}_i^T \mathbf{v}(n), \quad \text{para } i = 1, \dots, M, \quad (3.13)$$

onde  $\mathbf{w}_i \in \mathbb{C}^{P(l+1) \times 1}$  corresponde a  $i$ -ésima linha da matriz  $\mathbf{R}$ , transposta, de forma que é possível escrever

$$\mathbf{R} = [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \cdots \ \mathbf{w}_M]^T. \quad (3.14)$$

Após caracterizarmos a  $i$ -ésima saída do receptor MIMO, descreveremos as propriedades de sua componente ruidosa, que é criada pela filtragem do ruído  $\mathbf{v}(n)$  pelo vetor  $\mathbf{w}_i$ . Primeiro, definindo a matriz de covariância, do ruído  $\mathbf{v}(n)$ , como

$$\Phi_{\mathbf{v}} \triangleq \mathbb{E} [\mathbf{v}(n) \mathbf{v}^H(n)] \quad (3.15)$$

segue que a variância do ruído na  $i$ -ésima saída pode ser escrita como

$$\sigma_i^2 = \mathbf{w}_i^T \Phi_{\mathbf{v}} \mathbf{w}_i^*, \quad \text{para } i = 1, \dots, M. \quad (3.16)$$

Em [17, 16] propõe-se o seguinte resultado, que assegura que o ruído na saída de  $\mathbf{w}_i$  é AGCS.

**Proposição 1.** *A propriedade de simetria circular de um processo Gaussiano é preservada quando o ruído Gaussiano circularmente simétrico é filtrado por um filtro linear.*

A seguir, definimos a regra de detecção que será aplicada à  $i$ -ésima saída do receptor MIMO,  $\hat{x}_i(n)$ , para  $i = 1, \dots, M$ .

**Definição 2.** *Primeiro, definimos as  $L$  hipóteses do problema de detecção*

$$H_i : \exp \left( j \frac{2\pi i}{L} \right), \quad \text{para } i = 0, \dots, (L-1). \quad (3.17)$$

*Para uma dada observação  $\hat{x} \in \mathbb{C}$ , a função de detecção,  $\mathcal{D}: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}$ , decidirá a favor da hipótese  $H_i$  quando*

$$\left| \angle \frac{\hat{x}}{\exp \left( j \frac{2\pi i}{L} \right)} \right| < \frac{\pi}{L}, \quad (3.18)$$

*para  $i = 0, \dots, (L-1)$ .*

Dessa forma, o sinal detectado na  $i$ -ésima saída do receptor MIMO será definido da seguinte forma

$$\check{x}_i(n) = \mathcal{D}(\hat{x}_i(n)), \quad (3.19)$$

para  $i = 1, \dots, M$ . Agrupando as  $M$  saídas,  $\check{x}_i(n)$ , em um único vetor obtemos

$$\check{\mathbf{x}}(n) = [\check{x}_1(n), \check{x}_2(n), \dots, \check{x}_M(n)]^T. \quad (3.20)$$

O vetor desejado, ou ainda o vetor transmitido, associado ao vetor detectado,  $\check{\mathbf{x}}(n)$ , corresponde a

$$\mathbf{d}(n) \triangleq \mathbf{x}_M(n - \delta), \quad (3.21)$$

onde  $\delta \in \mathbb{N}$  corresponde ao atraso imposto ao sistema pelo canal e pelos filtros de transmissão e recepção. O vetor  $\mathbf{d}(n)$  pode ser escrito em função das suas  $M$  componentes como

$$\mathbf{d}(n) = [d_1(n), d_2(n), \dots, d_M(n)]^T. \quad (3.22)$$

Neste capítulo, nos referimos a  $d_i(n)$  como o sinal desejado, ou transmitido, na  $i$ -ésima entrada.

Com efeito, quando  $\check{x}_i(n) \neq d_i(n)$ , para  $i = 1, \dots, M$ , fica caracterizado um erro de transmissão. Caso contrário, a transmissão foi realizada com sucesso. Neste contexto, na próxima seção, calcularemos a taxa de erro de símbolos(SER) para o sistema MIMO descrito nessa seção.

## 3.2 Cálculo da Expressão Exata para a SER

Com objetivo de calcular a SER para o sistema descrito na Seção 3.1 procederemos da seguinte maneira: primeiro, definiremos a notação dos  $K \triangleq L^{M(m+q+l+1)}$  possíveis valores do vetor de entrada  $\mathbf{x}(n) \in \mathcal{L}^{M(m+q+l+1)}$ ; depois disto, para cada possível valor de  $\mathbf{x}(n)$ , calcularemos a probabilidade de erro associada a transmissão do sinal  $d_i(n)$ , para  $i = 1, \dots, M$ . Então, considerando todos os  $K$  valores do vetor de entrada  $\mathbf{x}(n)$ , calcularemos a SER através da média dos valores da probabilidade de erro associada a transmissão dos sinais  $d_i(n)$ , para  $i = 1, \dots, M$ .

A seguir, definimos os  $K$  possíveis valores do vetor entrada  $\mathbf{x}(n) \in \mathcal{L}^{M(m+q+l+1)}$  e suas respectivas saídas, não-ruídoas, do canal e do  $i$ -ésimo filtro de recepção,  $\mathbf{w}_i$ , para  $i = 1, \dots, M$ .

**Definição 3.** Denota-se os  $K$  elementos do conjunto  $\mathcal{L}^{M(m+q+l+1)}$  como

$$\mathbf{x}_k, \quad \text{para } k = 1, \dots, K. \quad (3.23)$$

Suas respectivas saídas, não-ruídas, do canal e do  $i$ -ésimo filtro de recepção,  $\mathbf{w}_i$ , são definidas como

$$\mathbf{y}_k \triangleq \mathbf{C}\mathbf{F}\mathbf{x}_k, \quad (3.24)$$

$$s_{ik} \triangleq \mathbf{w}_i^T \mathbf{C}\mathbf{F}\mathbf{x}_k, \quad (3.25)$$

para  $k = 1, \dots, K$  e  $i = 1, \dots, M$ .

Por último, associa-se a cada sinal  $s_{ik}$  recebido e filtrado, o sinal transmitido, ou ainda o sinal desejado  $d_{ik}$ . Para facilitar a notação denotaremos a diferença de fase entre  $s_{ik}$  e  $d_{ik}$  como

$$\Delta_{ik} = \angle \frac{s_{ik}}{d_{ik}}, \quad (3.26)$$

onde  $\Delta_{ik} \in (-\pi, \pi]$ .

A probabilidade de erro associada a transmissão do sinal  $d_{ik}$ , para  $i = 1, \dots, M$  e  $k = 1, \dots, K$ , é definida como

$$P_e(d_{ik}) \triangleq \mathbb{E}_v [I_{ik}(v_i)], \quad (3.27)$$

onde o valor esperado é calculado em relação a variável aleatória  $v_i$ , que é Gaussiana circularmente simétrica, de média zero e de variância  $\sigma_i^2$ . A função indicadora de erro,  $I_{ik}(v_i)$ , é definida da seguinte forma

$$I_{ik}(v_i) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se } \left| \angle \frac{s_{ik} + v_i}{d_{ik}} \right| > \frac{\pi}{L} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.28)$$

A variável aleatória  $v_i$ , para  $i = 1, \dots, M$ , representa o ruído aditivo na saída do  $i$ -ésimo receptor,  $\mathbf{w}_i$ . Com efeito, para uma dada realização da variável aleatória  $v_i$ , a função  $I_{ik}(v_i)$  indica se houve, ou não, erro na transmissão do sinal  $d_{ik}$ . A probabilidade de erro na transmissão do símbolo  $d_{ik}$  é calculada através do valor esperado da função  $I_{ik}(v_i)$ .

O entendimento mais detalhado da função indicadora de erro,  $I_{ik}(v_i)$ , não só é fundamental para o cálculo da SER mas também será instrumental no desenvolvimento do algoritmo adaptativo a ser apresentado no próximo capítulo. Com esse objetivo, distinguiremos três casos a serem estudados separadamente: a)  $|\Delta_{ik}| \in [0, \frac{\pi}{L}]$ ,

b)  $|\Delta_{ik}| \in (\frac{\pi}{L}, \pi - \frac{\pi}{L}]$  e c)  $|\Delta_{ik}| \in (\pi - \frac{\pi}{L}, \pi]$ , que são ilustrados nas Figuras 3.2, 3.3 e 3.4, respectivamente. Deste modo, obtém-se o seguinte resultado:

**Proposição 2.** *Através da análise das Figuras 3.2, 3.3 e 3.4, pode-se reescrever a função  $I_{ik}(v_i)$  como*

$$I_{ik}(v_i) = \begin{cases} I_{ik}^{(\alpha)}(v_i) + I_{ik}^{(\beta)}(v_i), & \text{se } |\Delta_{ik}| \in [0, \frac{\pi}{L}] \\ 1 - I_{ik}^{(\gamma)}(v_i) + I_{ik}^{(\beta)}(v_i), & \text{se } |\Delta_{ik}| \in (\frac{\pi}{L}, \pi - \frac{\pi}{L}] \\ 1 - I_{ik}^{(\gamma)}(v_i) - I_{ik}^{(\zeta)}(v_i), & \text{se } |\Delta_{ik}| \in (\pi - \frac{\pi}{L}, \pi], \end{cases} \quad (3.29)$$

onde

$$I_{ik}^{(\alpha)}(v_i) \triangleq \begin{cases} 1, & \left| \angle \frac{s_{ik} + v_i}{s_{ik}} \right| \in [\frac{\pi}{L} - |\Delta_{ik}|, \pi] \text{ e } \text{sign}(\angle \frac{s_{ik} + v_i}{s_{ik}}) = -\text{sign}(\angle \frac{d_{ik}}{s_{ik}}) \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.30)$$

$$I_{ik}^{(\beta)}(v_i) \triangleq \begin{cases} 1, & \left| \angle \frac{s_{ik} + v_i}{s_{ik}} \right| \in [\frac{\pi}{L} + |\Delta_{ik}|, \pi] \text{ e } \text{sign}(\angle \frac{s_{ik} + v_i}{s_{ik}}) = \text{sign}(\angle \frac{d_{ik}}{s_{ik}}) \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.31)$$

$$I_{ik}^{(\gamma)}(v_i) \triangleq \begin{cases} 1, & \left| \angle \frac{s_{ik} + v_i}{s_{ik}} \right| \in [|\Delta_{ik}| - \frac{\pi}{L}, \pi] \text{ e } \text{sign}(\angle \frac{s_{ik} + v_i}{s_{ik}}) = \text{sign}(\angle \frac{d_{ik}}{s_{ik}}) \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.32)$$

$$I_{ik}^{(\zeta)}(v_i) \triangleq \begin{cases} 1, & \left| \angle \frac{s_{ik} + v_i}{s_{ik}} \right| \in [2\pi - \frac{\pi}{L} - |\Delta_{ik}|, \pi] \text{ e } \text{sign}(\angle \frac{s_{ik} + v_i}{s_{ik}}) = -\text{sign}(\angle \frac{d_{ik}}{s_{ik}}) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.33)$$

A seguir, com objetivo de melhorar o entendimento da Proposição 2, estudaremos, individualmente, cada um dos casos  $|\Delta_{ik}| \in [0, \frac{\pi}{L}]$ ,  $|\Delta_{ik}| \in (\frac{\pi}{L}, \pi - \frac{\pi}{L}]$  e  $|\Delta_{ik}| \in (\pi - \frac{\pi}{L}, \pi]$  através das Figuras 3.2, 3.3 e 3.4:

- para o primeiro caso,  $|\Delta_{ik}| \in [0, \frac{\pi}{L}]$ , considerando a Figura 3.2, a função  $I_{ik}^{(\alpha)}(v_i)$  é igual a 1 quando o sinal  $(s_{ik} + v_i)$  está na região delimitada pelas semi-retas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OC}$ , e a função  $I_{ik}^{(\beta)}(v_i)$  é igual a 1 quando o sinal  $(s_{ik} + v_i)$  está na região delimitada pelas semi-retas  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OC}$ ;
- para o segundo caso,  $|\Delta_{ik}| \in (\frac{\pi}{L}, \pi - \frac{\pi}{L}]$ , considerando a Figura 3.3, a função  $I_{ik}^{(\gamma)}(v_i)$  é igual a 1 quando o sinal  $(s_{ik} + v_i)$  está na região delimitada pelas semi-retas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OC}$ , e a função  $I_{ik}^{(\beta)}(v_i)$  é igual a 1 quando o sinal  $(s_{ik} + v_i)$  está na região delimitada pelas semi-retas  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OC}$ ;

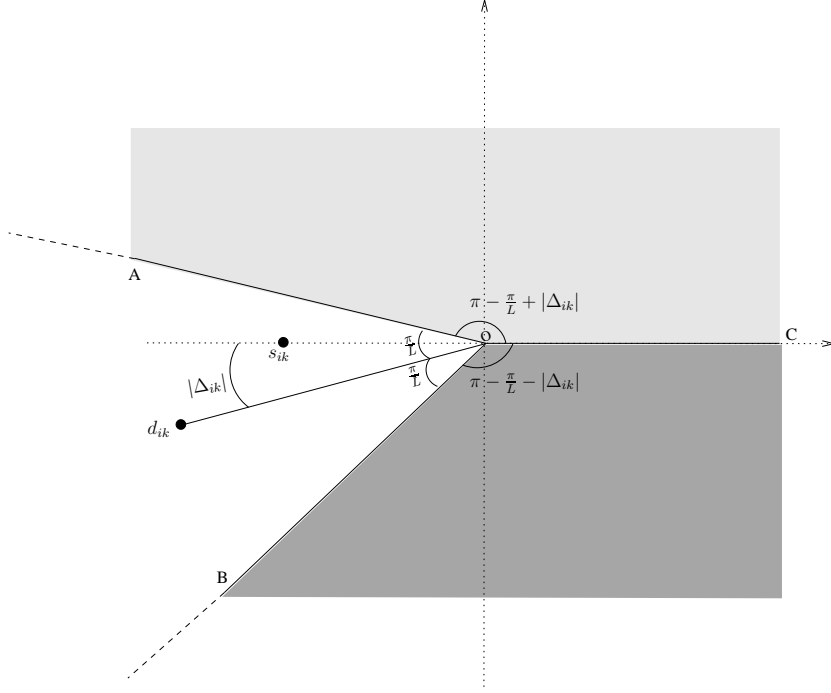


Figura 3.2:  $|\Delta_{ik}| \in [0, \frac{\pi}{L}]$ .

- para o terceiro caso,  $|\Delta_{ik}| \in (\pi - \frac{\pi}{L}, \pi]$ , considerando a Figura 3.4, a função  $I_{ik}^{(\gamma)}(v_i)$  é igual a 1 quando o sinal  $(s_{ik} + v_i)$  está na região delimitada pelas semi-retas  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OD}$ , e a função  $I_{ik}^{(\zeta)}(v_i)$  é igual a 1 quando o sinal  $(s_{ik} + v_i)$  está na região delimitada pelas semi-retas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OD}$ .

Dessa forma, a partir do resultado apresentado na Proposição 2, segue que é possível reescrever a Equação (3.27) como

$$P_e(d_{ik}) = \begin{cases} \mathbb{E}_v [I_{ik}^{(\alpha)}(v_i)] + \mathbb{E}_v [I_{ik}^{(\beta)}(v_i)], & \text{se } |\Delta_{ik}| \in [0, \frac{\pi}{L}] \\ 1 - \mathbb{E}_v [I_{ik}^{(\gamma)}(v_i)] + \mathbb{E}_v [I_{ik}^{(\beta)}(v_i)], & \text{se } |\Delta_{ik}| \in (\frac{\pi}{L}, \pi - \frac{\pi}{L}] \\ 1 - \mathbb{E}_v [I_{ik}^{(\gamma)}(v_i)] - \mathbb{E}_v [I_{ik}^{(\zeta)}(v_i)], & \text{se } |\Delta_{ik}| \in (\pi - \frac{\pi}{L}, \pi] \end{cases} \quad (3.34)$$

Isto significa que através do cálculo do valor esperado das funções  $I_{ik}^{(\alpha)}(v_i)$ ,  $I_{ik}^{(\beta)}(v_i)$ ,  $I_{ik}^{(\gamma)}(v_i)$  e  $I_{ik}^{(\zeta)}(v_i)$ , finalmente, obteremos a expressão para a probabilidade de erro de transmissão do símbolo  $d_{ik}$ ,  $P_e(d_{ik})$ . Este resultado é apresentado a seguir:

**Teorema 1.** *A probabilidade de erro associada a transmissão do símbolo  $d_{ik}$ ,  $P_e(d_{ik})$ ,*

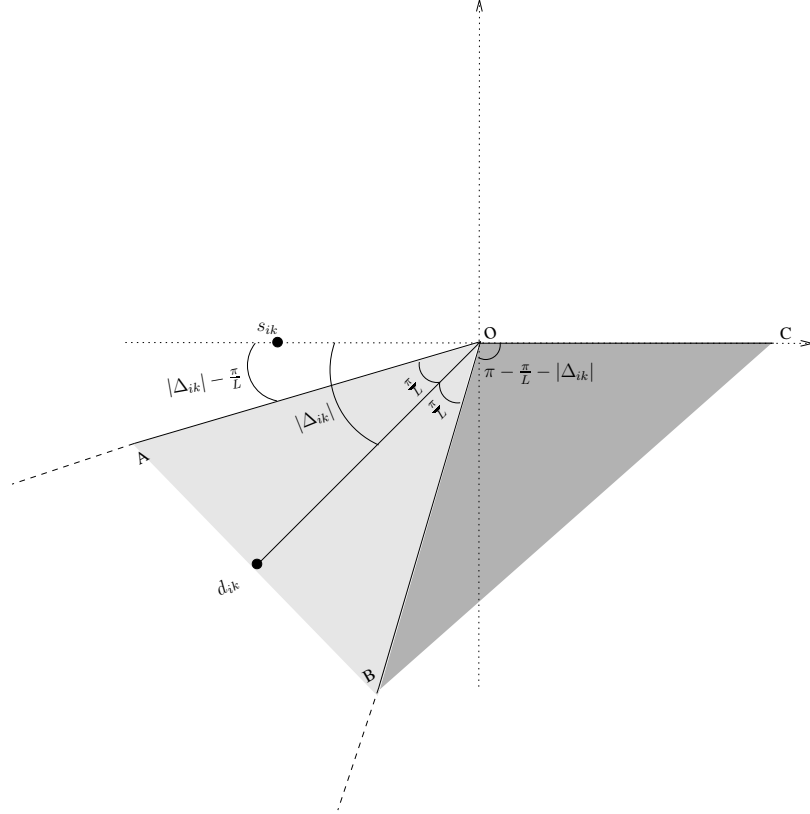


Figura 3.3:  $|\Delta_{ik}| \in (\frac{\pi}{L}, \pi - \frac{\pi}{L}]$ .

para  $i = 1, \dots, M$  e  $k = 1, \dots, K$  pode ser escrita como [16]

$$P_e(d_{ik}) = \begin{cases} h(\alpha_{ik}, s_{ip}, \sigma_i) + h(\beta_{ik}, s_{ik}, \sigma_i), & \text{se } |\Delta_{ik}| \in [0, \frac{\pi}{L}] \\ 1 - h(\gamma_{ik}, s_{ik}, \sigma_i) + h(\beta_{ik}, s_{ik}, \sigma_i), & \text{se } |\Delta_{ik}| \in (\frac{\pi}{L}, \pi - \frac{\pi}{L}] \\ 1 - h(\gamma_{ik}, s_{ik}, \sigma_i) - h(\zeta_{ik}, s_{ik}, \sigma_i), & \text{se } |\Delta_{ik}| \in (\pi - \frac{\pi}{L}, \pi], \end{cases} \quad (3.35)$$

onde

$$h(\lambda, s, \sigma) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{|s|^2 \sin^2(\lambda)}{\sigma^2 \sin^2(\phi)}\right) d\phi, \quad (3.36)$$

$\lambda \in [-\pi, \pi]$  e

$$\alpha_{ik} \triangleq \pi - \frac{\pi}{L} + |\Delta_{ik}|, \quad (3.37)$$

$$\beta_{ik} \triangleq \pi - \frac{\pi}{L} - |\Delta_{ik}|, \quad (3.38)$$

$$\gamma_{ik} \triangleq \pi + \frac{\pi}{L} - |\Delta_{ik}|, \quad (3.39)$$

$$\zeta_{ik} \triangleq -\pi + \frac{\pi}{L} + |\Delta_{ik}|. \quad (3.40)$$

Com objetivo de simplificar a notação, no restante da dissertação, iremos



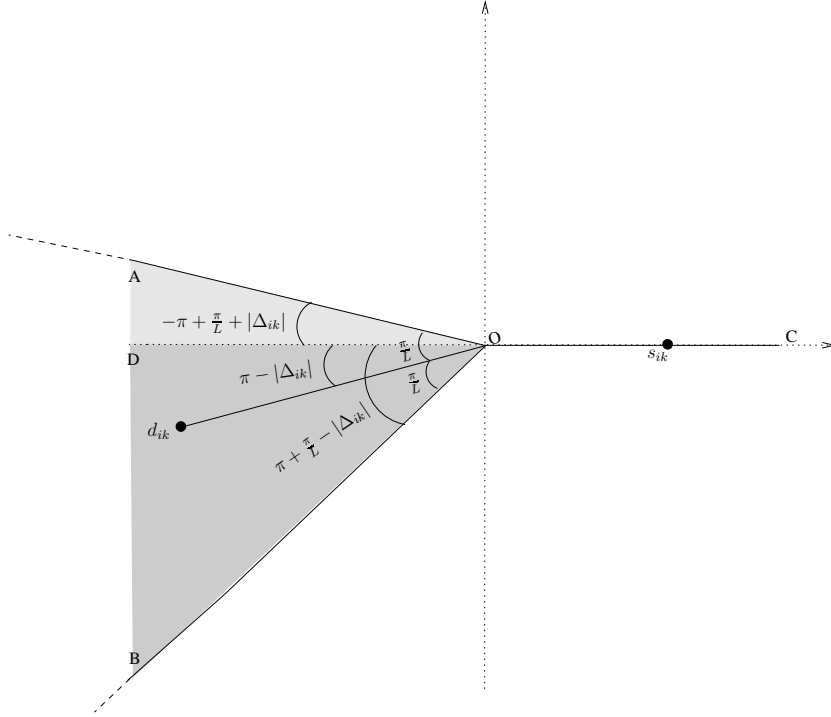


Figura 3.4:  $|\Delta_{ik}| \in (\pi - \frac{\pi}{L}, \pi]$

escrever somente os parâmetros de interesse da função  $h(\lambda, s, \sigma)$ . Dessa forma, na maioria dos casos, somente o limite superior da integral será listado como parâmetro.

A seguir, enunciamos o Lema 1, que será instrumental na prova do Teorema 1.

**Lema 1.** *A probabilidade  $P_\psi$  de que diferença de fase entre um sinal  $s \in \mathbb{C}$  e sua versão corrompida por ruído, de média zero AGCS, esteja no intervalo  $[\psi, \pi]$  corresponde a*

$$P_\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi-\psi} \exp\left(-\frac{|s|^2 \sin^2(\pi-\psi)}{\sigma^2 \sin^2(\phi)}\right) d\phi \quad (3.41)$$

$$= h(\pi - \psi, s, \sigma), \quad (3.42)$$

onde  $\sigma^2$  é a variância do ruído e  $\psi \in [0, \pi]$ .

*Prova:* Ver Apêndice A. □

*Prova do Teorema 1:* Utilizando o Lema 1 é possível escrever que

$$\mathbb{E}_v \left[ I_{ik}^{(\alpha)}(v_i) \right] = h(\alpha_{ik}, s_{ik}, \sigma_i), \quad (3.43)$$

$$\mathbb{E}_v \left[ I_{ik}^{(\beta)}(v_i) \right] = h(\beta_{ik}, s_{ik}, \sigma_i), \quad (3.44)$$

$$\mathbb{E}_v \left[ I_{ik}^{(\gamma)}(v_i) \right] = h(\gamma_{ik}, s_{ik}, \sigma_i), \quad (3.45)$$

$$\mathbb{E}_v \left[ I_{ik}^{(\zeta)}(v_i) \right] = h(\zeta_{ik}, s_{ik}, \sigma_i). \quad (3.46)$$

Substituindo as equações acima na Equação (3.34), obtém-se a equação desejada

$$P_e(d_{ik}) \triangleq \begin{cases} h(\alpha_{ik}, s_{ip}, \sigma_i) + h(\beta_{ik}, s_{ik}, \sigma_i), & \text{se } |\Delta_{ik}| \in [0, \frac{\pi}{L}], \\ 1 - h(\gamma_{ik}, s_{ik}, \sigma_i) + h(\beta_{ik}, s_{ik}, \sigma_i), & \text{se } |\Delta_{ik}| \in (\frac{\pi}{L}, \pi - \frac{\pi}{L}] \\ 1 - h(\zeta_{ik}, s_{ik}, \sigma_i) - h(\gamma_{ik}, s_{ik}, \sigma_i), & \text{se } |\Delta_{ik}| \in (\pi - \frac{\pi}{L}, \pi] \end{cases} \quad (3.47)$$

□

Como contribuição dessa dissertação propomos o corolário a seguir, que assegura que a probabilidade de erro,  $P_e(d_{ik})$ , pode ser escrita utilizando-se somente dois casos,  $|\Delta_{ik}| \in [0, \frac{\pi}{L}]$  e  $|\Delta_{ik}| \in (\frac{\pi}{L}, \pi]$ , ao invés de três. Este resultado simplificará consideravelmente o cálculo do gradiente da probabilidade de erro, que será apresentado na próxima seção.

**Corolário 1.** *É possível reescrever a Equação (3.35) como*

$$P_e(d_{ik}) \triangleq \begin{cases} h(\alpha_{ik}, s_{ip}, \sigma_i) + h(\beta_{ik}, s_{ik}, \sigma_i), & \text{se } |\Delta_{ik}| \in [0, \frac{\pi}{L}] \\ 1 - h(\gamma_{ik}, s_{ik}, \sigma_i) + h(\beta_{ik}, s_{ik}, \sigma_i), & \text{se } |\Delta_{ik}| \in (\frac{\pi}{L}, \pi]. \end{cases} \quad (3.48)$$

*Prova:* Como  $\zeta_{ik} = -\beta_{ik}$ , segue que

$$h(\zeta_{ik}, s_{ip}, \sigma_i) = -h(\beta_{ik}, s_{ip}, \sigma_i). \quad (3.49)$$

Com efeito, para  $|\Delta_{ik}| \in (\pi - \frac{\pi}{L}, \pi]$  é possível escrever que

$$1 - h(\zeta_{ik}, s_{ik}, \sigma_i) - h(\gamma_{ik}, s_{ik}, \sigma_i) = 1 + h(\beta_{ik}, s_{ik}, \sigma_i) - h(\gamma_{ik}, s_{ik}, \sigma_i), \quad (3.50)$$

o que completa a prova. □

Outra contribuição desta dissertação consiste no resultado a seguir, que será fundamental para o desenvolvimento do algoritmo adaptativo a ser apresentado no próximo capítulo.

**Corolário 2.** A probabilidade de erro,  $P_e(d_{ik})$ , e conseqüentemente a SER permanecem inalteradas quando multiplicamos o vetor  $\mathbf{w}_i$  por uma constante real positiva.

*Prova:* Primeiro, definimos,  $\bar{\mathbf{w}}_i = c\mathbf{w}_i$ , para  $c \in \mathbb{R}_*^+$ . Depois disso, escrevemos

$$\bar{s}_{ik} = \bar{\mathbf{w}}_i^T \mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{x}_k = cs_{ik}, \quad (3.51)$$

$$\bar{\sigma}_i^2 = \bar{\mathbf{w}}_i^T \Phi_{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{w}}_i = c^2 \sigma_i^2. \quad (3.52)$$

Dessa forma, é possível escrever que

$$\begin{aligned} h(\lambda, \bar{s}_{ik}, \bar{\sigma}_i) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{|\bar{s}_{ik}|^2 \sin^2(\lambda)}{\bar{\sigma}_i^2 \sin^2(\phi)}\right) d\phi, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{|s_{ik}|^2 \sin^2(\lambda)}{\sigma_i^2 \sin^2(\phi)}\right) d\phi \\ &= h(\lambda, s_{ik}, \sigma_i). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Então, a partir da Equação (3.48) tem-se que

$$P_e(d_{ik}) = \begin{cases} h(\alpha_{ik}, \bar{s}_{ip}, \bar{\sigma}_i) + h(\beta_{ik}, \bar{s}_{ik}, \bar{\sigma}_i), & \text{se } |\Delta_{ik}| \in [0, \frac{\pi}{L}] \\ 1 - h(\gamma_{ik}, \bar{s}_{ip}, \bar{\sigma}_i) + h(\beta_{ik}, \bar{s}_{ip}, \bar{\sigma}_i), & \text{se } |\Delta_{ik}| \in (\frac{\pi}{L}, \pi], \end{cases} \quad (3.54)$$

o que completa a prova.  $\square$

Finalmente, a taxa de erro de símbolos do sistema MIMO descrito nessa seção pode ser escrita como [16, eq. 14]

$$SER = \frac{1}{KM} \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^K P_e(d_{ik}), \quad (3.55)$$

e a taxa de erro de símbolos associada a  $i$ -ésima entrada do sistema MIMO corresponde a [16, eq. 24]

$$SER_i = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K P_e(d_{ik}), \text{ para } i = 1, \dots, M. \quad (3.56)$$

### 3.3 Formulação do Problema de Otimização

Antes de iniciarmos a formulação do problema de otimização propriamente dito, definiremos a potência média de entrada para o sistema MIMO apresentado na

Seção 3.1 e também reescreveremos  $s_{ik}$  de uma maneira conveniente à formulação do problema de otimização. A potência média de entrada é definida como [16]

$$P_{\text{in}} \triangleq \frac{1}{M} \text{Tr} \{ \mathbf{E} \mathbf{E}^H \} = \frac{1}{M} \|\text{vec}(\mathbf{E})\|^2, \quad (3.57)$$

onde

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}(0) \ \mathbf{e}(1) \ \cdots \ \mathbf{e}(m)], \quad (3.58)$$

e o operador  $\text{vec}(\cdot)$  empilha as colunas da matriz que a ele é aplicado em um longo vetor coluna; alocando a primeira coluna no topo, depois a segunda coluna e assim por diante [19].

Também será útil escrevermos  $s_{ik}$  para  $i = 1, \dots, M$  e  $k = 1, \dots, K$ , alternativamente como

$$s_{ik} = \text{vec}^T(\mathbf{E}) \mathbf{t}_{ik}, \quad (3.59)$$

onde [16]

$$\mathbf{t}_{ik} = \text{vec} \left( \left( (\mathbf{H})_{i:M:(q+l)M+i,:} \right)^H \mathcal{X}_k^* \right)^*, \quad (3.60)$$

onde a notação  $(\mathbf{H})_{k_0:M:k_1,:}$  denota a sub-matriz de  $\mathbf{H}$  formada pelas linhas cujos índices estejam no conjunto  $\{k_0, k_0 + M, \dots, k_1\}$  e a matriz  $\mathcal{X}_k$  é definida como

$$\mathcal{X}_k \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k(q+l) & \mathbf{x}_k(q+l+1) & \cdots & \mathbf{x}_k(m+q+l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{x}_k(1) & \mathbf{x}_k(2) & \cdots & \mathbf{x}_k(m+1) \\ \mathbf{x}_k(0) & \mathbf{x}_k(1) & \cdots & \mathbf{x}_k(m) \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

onde  $\mathbf{x}_k(\nu)$ , para  $\nu = 0, \dots, (m+q+l)$ , corresponde ao  $\nu$ -ésimo elemento do vetor  $\mathbf{x}_k$ .

Nesse trabalho, para uma dada potência média de entrada, desejamos otimizar os coeficientes dos filtros de transmissão,  $\tilde{\mathbf{E}}(z)$ , e de recepção,  $\tilde{\mathbf{R}}(z)$ , com objetivo de minimizar a taxa de erro de símbolos para a constelação L-PSK. Mais precisamente, desejamos resolver o seguinte problema de otimização [16]

$$\min_{\{\tilde{\mathbf{E}}(z), \tilde{\mathbf{R}}(z)\}} SER \quad \text{sujeito a} \quad P_{\text{in}} = \text{constante}. \quad (3.62)$$

Com o auxílio do multiplicador de Lagrange,  $\lambda > 0$ , o problema de otimização pode ser reescrito como uma minimização sem restrições da seguinte forma [16]

$$\xi = SER + \lambda P_{\text{in}}. \quad (3.63)$$

Dessa forma, com objetivo de encontrar os filtros de transmissão e de recepção que minimizam a função-custo descrita pela Equação (3.63), utilizaremos o método da descida mais íngreme, separadamente, para o transmissor e para o receptor. Ou seja, para um dado valor do filtro de recepção, utiliza-se o método da descida mais íngreme para otimizar o transmissor, e depois disto otimiza-se o receptor com base no valor do filtro de transmissão encontrado anteriormente. Este procedimento é repetido até que a convergência ocorra. Se o filtro de transmissão não garante a potência média desejada, outro valor de  $\lambda$  deve ser utilizado e todo o procedimento de otimização deve ser realizado novamente.

Neste cenário, para um dado valor do receptor, o filtro de transmissão será atualizado através da seguinte recursão [16]

$$\text{vec}(\bar{\mathbf{E}}) = \text{vec}(\mathbf{E}) - \mu \frac{\partial \xi}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)}, \quad (3.64)$$

e para um dado transmissor,  $\mathbf{w}_i$ , o filtro de recepção será atualizado através da seguinte recursão [16]

$$\bar{\mathbf{w}}_i = \mathbf{w}_i - \mu \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{w}_i^*}, \quad (3.65)$$

para  $i = 1, \dots, M$ , e onde  $\mu$  representa o passo do algoritmo de busca. Dessa forma, depois de realizarmos as recursões indicadas pelas Equações (3.64) e (3.65),  $\text{vec}(\bar{\mathbf{E}})$  e  $\bar{\mathbf{w}}_i$  corresponderão aos novos valores dos filtros de transmissão e de recepção, respectivamente. Com objetivo de calcular as iterações subseqüentes, considera-se que  $\text{vec}(\bar{\mathbf{E}})$  e  $\bar{\mathbf{w}}_i$  correspondem aos novos valores das variáveis  $\text{vec}(\mathbf{E})$  e  $\mathbf{w}_i$ , respectivamente [16]. Este procedimento é repetido até que a convergência ocorra [16].

Com base nas Equações (3.55)-(3.57) é possível escrever os gradientes da função-custo,  $\xi$ , em relação a  $\text{vec}(\mathbf{E})$  e  $\mathbf{w}_i$  da seguinte forma

$$\frac{\partial \xi}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} = \frac{1}{KM} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^M \frac{\partial P_e(d_{ik})}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} + \frac{\lambda}{M} \text{vec}(\mathbf{E}), \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{w}_i^*} = \frac{\partial SER_i}{\partial \mathbf{w}_i^*} = \frac{1}{KM} \sum_{k=1}^K \frac{\partial P_e(d_{ik})}{\partial \mathbf{w}_i^*}. \quad (3.67)$$

Com objetivo de encontrarmos as expressões para os gradientes da função-custo,  $\xi$ , em relação a  $\mathbf{w}_i$  e  $\text{vec}(\mathbf{E})$  ainda nos resta obter os gradientes de  $P_e(d_{ik})$  em relação a  $\mathbf{w}_i$  e  $\text{vec}(\mathbf{E})$ . Esse resultado é apresentado a seguir.

**Proposição 3.** Os gradientes de  $P_e(d_{ik})$  em relação a  $\mathbf{w}_i$  e  $\text{vec}(\mathbf{E})$  são dados por, para  $k = 1, \dots, K$  e  $i = 1, \dots, M$ ,

$$\frac{\partial P_e(d_{ik})}{\partial \mathbf{w}_i^*} = \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} p_{ik} + \frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}_i}{\sigma_i^2} c_{ik}, \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial P_e(d_{ik})}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} = \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} p_{ik}, \quad (3.69)$$

onde

$$p_{ik} = \begin{cases} -\frac{\mathcal{H}(\alpha_{ik}, s_{ik}, \sigma_i)}{\sin(\alpha_{ik})} e^{-j\text{sign}(\Delta_{ik})\alpha_{ik}} + \frac{\mathcal{H}(\beta_{ik}, s_{ik}, \sigma_i)}{\sin(\beta_{ik})} e^{+j\text{sign}(\Delta_{ik})\beta_{ik}}, & \text{se } |\Delta_{ik}| \in [0, \frac{\pi}{L}] \\ -\frac{\mathcal{H}(\gamma_{ik}, s_{ik}, \sigma_i)}{\sin(\gamma_{ik})} e^{+j\text{sign}(\Delta_{ik})\gamma_{ik}} + \frac{\mathcal{H}(\beta_{ik}, s_{ik}, \sigma_i)}{\sin(\beta_{ik})} e^{+j\text{sign}(\Delta_{ik})\beta_{ik}}, & \text{se } |\Delta_{ik}| \in (\frac{\pi}{L}, \pi], \end{cases} \quad (3.70)$$

$$c_k = \begin{cases} +\mathcal{H}(\alpha_{ik}, s_{ik}, \sigma_i) + \mathcal{H}(\beta_{ik}, s_{ik}, \sigma_i), & \text{se } |\Delta_{ik}| \in [0, \frac{\pi}{L}] \\ -\mathcal{H}(\gamma_{ik}, s_{ik}, \sigma_i) + \mathcal{H}(\beta_{ik}, s_{ik}, \sigma_i), & \text{se } |\Delta_{ik}| \in (\frac{\pi}{L}, \pi], \end{cases} \quad (3.71)$$

e

$$\mathcal{H}(\lambda, s, \sigma) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{|s|^2 \sin^2(\lambda)}{\sigma^2 \sin^2(\phi)}\right) \frac{|s|^2 \sin^2(\lambda)}{\sigma^2 \sin^2(\phi)} d\phi. \quad (3.72)$$

Com objetivo de simplificar a notação, no restante da dissertação, iremos escrever somente os parâmetros de interesse da função  $\mathcal{H}(\lambda, s, \sigma)$ . Dessa forma, na maioria dos casos, somente o limite superior da integral será listado como parâmetro.

*Prova:* Ver Apêndice B. □

Então, através deste resultado podemos reescrever as Equações (3.64) e (3.65) como

$$\text{vec}(\bar{\mathbf{E}}) = \text{vec}(\mathbf{E}) - \frac{\mu}{KM} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^M \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} p_{ik} - \frac{\mu\lambda}{M} \text{vec}(\mathbf{E}), \quad (3.73)$$

$$\bar{\mathbf{w}}_i = \mathbf{w}_i - \frac{\mu}{KM} \sum_{k=1}^K \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} p_{ik} - \frac{\mu}{KM} \sum_{k=1}^K \frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}_i}{\sigma_i^2} c_{ik}, \quad (3.74)$$

para  $i = 1, \dots, M$ .

Outra contribuição desta dissertação consiste no algoritmo a seguir, que será fundamental para o desenvolvimento do algoritmo adaptativo a ser apresentado no próximo capítulo. Para facilitar a referência iremos denotar esse algoritmo através do acrônimo EMSERE (*Exact Minimum Symbol Error Rate Equalizer*).

**Proposição 4.** (*Algoritmo EMSERE*) Considerando que  $M = 1$ ,  $\|\mathbf{w}_1\|^2 = 1$ , e que o ruído AGCS, na saída do canal, seja branco é possível reescrever a Equação (3.74) como

$$\bar{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{w}_1 - \mu \sum_{k=1}^K \text{sign}(\Delta_{1k}) \frac{j\mathbf{Y}_k^* p_{1k}}{s_{1k}^* K}, \quad (3.75)$$

para  $0 < \mu < 1$ .

*Prova:* Ver Apêndice D. □

Como o algoritmo EMSERE será instrumental para o desenvolvimento do algoritmo adaptativo a ser apresentado no próximo capítulo, na próxima seção, compararemos o seu desempenho com o desempenho do filtro de Wiener [2] e do algoritmo LMP (*Least Mean Phase*) [14].

### 3.4 Comparação de Desempenho

Nessa seção, através de alguns exemplos, iremos comparar os desempenhos, em regime permanente, dos algoritmos EMSERE, LMP (*Least Mean Phase*) [14] e do filtro de Wiener [2] ao variarmos a razão sinal-ruído(SNR) de 0dB até 35dB.

Utilizamos o algoritmo LMP [14] e o filtro de Wiener [2] com objetivo de avaliarmos a redução na SER obtida através da adoção de uma abordagem baseada na minimização da SER ao invés de adotarmos uma abordagem baseada na minimização do erro quadrático, ou na minimização do quadrado da diferença de fase entre o valor desejado e a saída do filtro.

Nessa seção, utilizaremos o canal  $C(z) = (-0.4892 + j0.6067) + (0.8867 - j1.1269)z^{-1}$  para a constelação 8-PSK, e empregaremos um equalizador de 3 coeficientes com atraso idêntico a 2. Como a função-custo da SER para a constelação L-PSK não é convexa [15], se inicializarmos o algoritmo EMSERE de maneira aleatória, este algoritmo poderá convergir para um mínimo local, que pode estar bem longe do mínimo global, tornando-se, dessa forma, ineficaz compararmos o algoritmo EMSERE com o filtro de Wiener, por exemplo. Nesse contexto, com objetivo de garantir a comparação efetiva entre os algoritmos EMSERE e LMP e o filtro de Wiener, iremos inicializar os algoritmos EMSERE e LMP com os coeficientes do filtro de Wiener.

Na Figura 3.5, considerando valores da razão sinal-ruído entre 0dB e 35dB, apresentamos a SER para os algoritmos EMSERE, LMP e para o Filtro de Wiener. Primeiro, observa-se que, para a SNR baixa ou moderada, os algoritmos EMSERE, LMP e o filtro de Wiener possuem um desempenho parecido, e para elevada SNR, o algoritmo EMSERE proporciona uma redução significativa na SER.

Dessa forma, a melhoria de desempenho apresentada pelo algoritmo EMSERE nos motiva a buscar, no próximo capítulo, uma alternativa adaptativa para a implementação do algoritmo EMSERE.

### **3.5 Conclusão**

Neste capítulo, apresentamos os resultados que foram propostos no trabalho [16], assim como alguns novos resultados que serão instrumentais no desenvolvimento do algoritmo adaptativo a ser proposto no próximo capítulo. Mais precisamente, o resultados apresentados nas Proposições 2, 3 e 4 e os Corolários 1 e 2 são contribuições desta dissertação.

Por último, ao compararmos o desempenho do algoritmo EMSERE com o algoritmo LMP e com o filtro de Wiener observamos uma redução significativa na SER, para o caso de elevada razão sinal-ruído. Este fato, nos motiva a investigar a implementação adaptativa do algoritmo EMSERE, que será realizada no próximo capítulo.



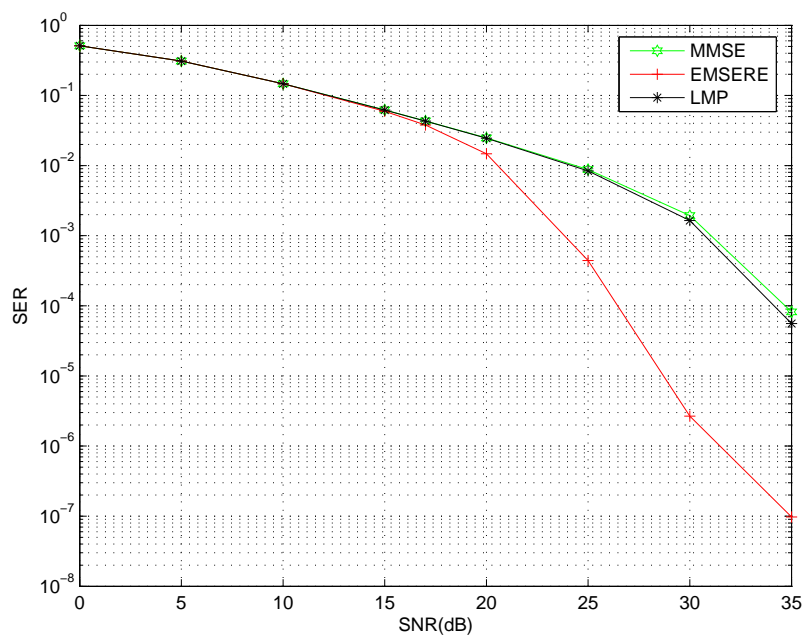


Figura 3.5: Comparação entre os algoritmos EMSERE, LMP e o filtro de Wiener para valores da SNR entre 0dB e 35dB.

# Capítulo 4

## Equalização Adaptativa de Mínima Taxa de Erro

### 4.1 Introdução

Nesse capítulo, apresentaremos a principal contribuição desta tese, que corresponde à derivação do equalizador adaptativo de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK. Com esse objetivo, utilizaremos o sistema de comunicações descrito no capítulo anterior para o caso particular em que há somente uma entrada e uma saída,  $M = 1$ , e em que o filtro de transmissão corresponda à identidade.

A Seção 4.2 apresenta a derivação do equalizador adaptativo de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK. Na Seção 4.3 avaliaremos o desempenho do algoritmo adaptativo apresentado neste capítulo. Por último, na Seção 4.4 concluímos o capítulo.

### 4.2 Derivação do Equalizador Adaptativo

Nessa seção, utilizaremos alguns dos resultados apresentados no capítulo anterior, como, por exemplo as Proposições 2 e 4, que necessitam da notação introduzida na Definição 3 do capítulo anterior. Neste cenário, como  $M = 1$ , com objetivo de simplificar a notação consideramos,  $s_{1k} = s_k$ ,  $d_{1k} = d_k$ ,  $\Delta_{1k} = \Delta_k$ ,  $\alpha_{1k} = \alpha_k$ ,  $\beta_{1k} = \beta_k$ ,  $\gamma_{1k} = \gamma_k$ ,  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}$ ,  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $v_1 = v$ ,  $p_{1k} = p_k$  e  $I_{1k} = I_k$ .

Dessa forma, enquanto que para descrever os resultados apresentados no

capítulo anterior utilizamos a notação introduzida na Definição 3, que não indexa no tempo as variáveis envolvidas, nesse capítulo, devido a característica adaptativa do algoritmo a ser apresentado, é mandatório indexarmos o equalizador, no tempo, através do índice  $n \in \mathbb{N}$ , como  $\mathbf{w}(n)$ . Dessa forma,  $\mathbf{w}(n)$  corresponderá aos coeficientes do equalizador na  $n$ -ésima iteração do algoritmo adaptativo. Nesse contexto, também é importante definirmos suas entradas e suas saídas, no instante  $n$ .

Lembrando que na Seção 3.1 caracterizamos  $\mathbf{x}(n)$  como o vetor de entrada e  $\mathbf{v}(n)$  como o vetor do ruído, no instante  $n$ , podemos definir as entradas e saídas, ruidosas e não ruidosas, do equalizador  $\mathbf{w}(n)$  como

$$\mathbf{u}(n) \triangleq \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{v}(n), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}(n) \triangleq \mathbf{C}\mathbf{x}(n), \quad (4.2)$$

$$\hat{x}(n) \triangleq \mathbf{w}^T(n)\mathbf{u}(n), \quad (4.3)$$

$$s(n) \triangleq \mathbf{w}^T(n)\mathbf{y}(n), \quad (4.4)$$

onde, os vetores  $\mathbf{u}(n)$  e  $\mathbf{y}(n)$  correspondem às entradas ruidosas e não-ruidosas do equalizador  $\mathbf{w}(n)$ . E,  $\hat{x}(n)$  e  $s(n)$  correspondem às saídas ruidosas e não-ruidosas, respectivamente, do equalizador  $\mathbf{w}(n)$ . Nesse contexto, o sinal desejado associado a entrada  $\mathbf{x}(n)$  corresponde a  $d(n)$ .

Então, através desta notação, apresentamos o equalizador adaptativo de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK. Para facilitar a referência iremos denotar esse algoritmo através do acrônimo AMSERE (*Adaptive Minimum Symbol Error Rate Equalizer*).

**Teorema 2.** (*Algoritmo AMSERE*) *No regime de elevada razão sinal-ruído e para um valor suficientemente elevado do número de símbolos da constelação L-PSK, o equalizador adaptativo de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK pode ser escrito como*

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu\Gamma(n) \frac{|\hat{x}(n)|^2}{\sigma^2} \frac{j\mathbf{u}^*(n)}{\hat{x}^*(n)} \exp\left(-j\angle \frac{\hat{x}(n)}{d(n)}\right), \quad (4.5)$$

onde

$$\Gamma(n) \triangleq \begin{cases} +\text{sign}\left(\angle \frac{\hat{x}(n)}{s(n)}\right), & \text{se } \left|\angle \frac{s(n)}{d(n)}\right| \in [0, \frac{\pi}{L}] \text{ e } \left|\angle \frac{\hat{x}(n)}{d(n)}\right| \in (\frac{\pi}{L}, \pi] \\ -\text{sign}\left(\angle \frac{\hat{x}(n)}{s(n)}\right), & \text{se } \left|\angle \frac{s(n)}{d(n)}\right| \in (\frac{\pi}{L}, \pi] \text{ e } \left|\angle \frac{\hat{x}(n)}{d(n)}\right| \in [0, \frac{\pi}{L}] \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.6)$$

para  $0 < \mu < 1$  e  $\|\mathbf{w}(n)\| = 1$ . Também assume-se que o ruído interferidor na saída do canal seja aditivo, branco e circularmente simétrico.

A função  $\Gamma(n)$  é não-nula quando o símbolo  $s(n)$  pertence a região de detecção do símbolo  $d(n)$  e o símbolo  $\hat{x}(n)$  não pertence, e também quando o símbolo  $s(n)$  não pertence a região de detecção do símbolo  $d(n)$  e o símbolo  $\hat{x}(n)$  pertence.

A variável  $p_k$ , definida na Equação (3.70), é utilizada na definição do algoritmo EMSERE, que é apresentado na Proposição 4. Para derivarmos o algoritmo AMSERE a partir do algoritmo EMSERE, será instrumental realizarmos a seguinte aproximação para a variável  $p_k$ .

**Lema 2.** *Para o regime de elevada razão sinal-ruído e para um valor suficientemente elevado do número de símbolos da constelação L-PSK é possível realizar a seguinte aproximação*

$$p_k \approx \frac{|s_k|^2}{\sigma^2} \text{sign}(\Delta_k) \exp(-j\Delta_k) \mathbb{E}_v[\Gamma_k(v)], \quad (4.7)$$

onde

$$\Gamma_k(v) \triangleq \begin{cases} +\text{sign}\left(\angle \frac{s_k+v}{s_k}\right), & \text{se } |\Delta_k| \in [0, \frac{\pi}{L}] \text{ e } I_k(v) = 1 \\ -\text{sign}\left(\angle \frac{s_k+v}{s_k}\right), & \text{se } |\Delta_k| \in (\frac{\pi}{L}, \pi] \text{ e } I_k(v) = 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.8)$$

para  $k = 1, \dots, K$ . A função  $\Gamma_k(v)$  é não-nula quando o símbolo  $s_k$  pertence a região de detecção do símbolo  $d_k$  e o símbolo  $(s_k + v)$  não pertence, e também quando o símbolo  $s_k$  não pertence a região de detecção do símbolo  $d_k$  e o símbolo  $(s_k + v)$  pertence.

*Prova:* Ver Apêndice E. □

*Prova do Teorema 2:* Com objetivo de provar o Teorema 2, utilizamos o algoritmo EMSERE, que é apresentado na Proposição 4, e que necessita da notação introduzida na Definição 3. Por exemplo, para enunciar o resultado proposto na Proposição 4, faz-se necessário distinguir cada um dos símbolos  $s_k$  e os sinais desejados associados,  $d_k$ , para  $k = 1, \dots, K$ . Dessa forma, iniciaremos a prova do Teorema 2 adotando a notação usada na Proposição 4 e introduzida na Definição 3 do capítulo anterior. Depois, concluiremos a prova utilizando a notação apresentada no início dessa seção,

que indexa no tempo o equalizador assim como as demais variáveis envolvidas. Ou seja, no final, sem perda de clareza, abandonaremos o índice  $k$  e indexaremos os sinais envolvidos, assim como os coeficientes do equalizador, no tempo, através do índice  $n \in \mathbb{N}$ .

Neste cenário, substituindo o resultado do Lema 2 na Equação (3.75) obtém-se

$$\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \frac{\mu}{K} \sum_{k=1}^K \text{sign}(\Delta_k) \frac{j\mathbf{Y}_k^*}{s_k^*} p_k \quad (4.9)$$

$$\approx \mathbf{w} - \frac{\mu}{K} \sum_{k=1}^K \frac{|s_k|^2}{\sigma^2} \frac{j\mathbf{Y}_k^*}{s_k^*} \exp(-j\Delta_k) \mathbb{E}_v[\Gamma_k(v)] \quad (4.10)$$

$$= \mathbf{w} - \frac{\mu}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{E}_v \left[ \frac{|s_k|^2}{\sigma^2} \frac{j\mathbf{Y}_k^*}{s_k^*} \exp(-j\Delta_k) \Gamma_k(v) \right], \quad (4.11)$$

para  $0 < \mu < 1$ . Dessa forma, utilizando aproximações instantâneas, obtemos a implementação adaptativa

$$\bar{\mathbf{w}} \approx \mathbf{w} - \mu \Gamma_k(v) \frac{|s_k|^2}{\sigma^2} \frac{j\mathbf{Y}_k^*}{s_k^*} \exp(-j\Delta_k), \quad (4.12)$$

para  $0 < \mu < 1$  e  $k = 1, \dots, K$ . Dessa forma, cada atualização dos coeficientes do equalizador,  $\mathbf{w}$ , depende de um único valor de  $k$  e também de uma única realização do ruído  $v$ . Então, com objetivo de evidenciar a característica adaptativa do algoritmo e de usar uma notação familiar mais familiar à área de filtragem adaptativa [10, 4, 9] sem perda de clareza, abandonaremos o índice  $k$  e indexaremos os sinais envolvidos, no tempo, através da notação apresentada no início desta seção

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \Gamma(n) \frac{|s(n)|^2}{\sigma^2} \frac{j\mathbf{y}^*(n)}{s^*(n)} \exp\left(-j\angle \frac{s(n)}{d(n)}\right). \quad (4.13)$$

Ainda é útil realizarmos uma outra aproximação; para o caso de elevada razão sinal-ruído pode-se escrever que

$$s(n) \approx \hat{x}(n), \quad (4.14)$$

$$\mathbf{y}(n) \approx \mathbf{u}(n). \quad (4.15)$$

Devido a utilização do Lema 2, a recursão (4.13) só é válida para o caso de elevada razão sinal-ruído. Com efeito, pode-se reescrever, de forma aproximada, a recursão (4.13) como

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \Gamma(n) \frac{|\hat{x}(n)|^2}{\sigma^2} \frac{j\mathbf{u}^*(n)}{\hat{x}^*(n)} \exp\left(-j\angle \frac{\hat{x}(n)}{d(n)}\right). \quad (4.16)$$

Isto completa a prova. □

A função  $\Gamma(n)$ , definida pela Equação (4.6), é responsável por decidir, com base no valor da diferença de fase entre as variáveis  $s(n)$  e  $\hat{x}(n)$ , se haverá, ou não, atualização dos coeficientes do filtro adaptativo AMSERE, no instante  $n$ . Isso significa que  $\Gamma(n)$  depende do conhecimento da saída não-ruídosa do equalizador,  $s(n)$ , e também que não podemos simplesmente realizar a aproximação, para o caso de elevada razão sinal-ruído, indicada na Equação (4.14). Neste trabalho, contornaremos a dependência do algoritmo AMSERE em relação a saída não-ruídosa do equalizador,  $s(n)$ , através da identificação prévia do canal de comunicações por um algoritmo de filtragem adaptativa [4, 9]. Dessa forma, através da estimativa obtida para o canal e do conjunto atual de coeficientes do equalizador,  $\mathbf{w}(n)$ , iremos estimar o valor de  $s(n)$ . Essa estimativa será utilizada na implementação do cálculo da função  $\Gamma(n)$ . Na seção, a seguir, utilizaremos este procedimento ao simularmos o algoritmo AMSERE.

Neste ponto, convém ressaltar duas importantes características do algoritmo AMSERE:

- devido a semelhança do equalizador AMSERE com o algoritmo LMP, podemos interpretá-lo como uma versão do algoritmo LMP que incorpora a atualização seletiva dos seus coeficientes assim como uma correção na direção de atualização dada por  $\exp\left(-j\angle\frac{\hat{x}(n)}{d(n)}\right)$ ;
- assim como o equalizador adaptativo para a constelação 2-PAM, o algoritmo AMSERE é seletivo em relação às suas atualizações; o algoritmo AMSERE somente atualiza seus coeficientes quando o símbolo  $s(n)$  pertence a região de detecção do símbolo  $d(n)$  e o símbolo  $\hat{x}(n)$  não pertence, e também quando o símbolo  $s(n)$  não pertence a região de detecção do símbolo  $d(n)$  e o símbolo  $\hat{x}(n)$  pertence.

### 4.3 Comparação de Desempenho

Nessa seção, através de alguns exemplos, iremos comparar os desempenhos em regime permanente e em regime transiente dos algoritmos AMSERE, EMSERE, LMP (*Least Mean Phase*) [14] e do filtro de Wiener [2].

Conforme vimos na seção anterior, o algoritmo AMSERE é obtido a partir do algoritmo EMSERE quando realizamos aproximações válidas para o caso de elevada razão sinal-ruído, para uma constelação L-PSK suficientemente grande e também quando realizamos aproximações estocásticas baseadas em realizações instantâneas. Dessa forma, ao compararmos o desempenho do algoritmo AMSERE com o algoritmo EMSER estaremos, na verdade, avaliando o efeito das aproximações mencionadas acima.

Também utilizamos o algoritmo LMP [14] e o filtro de Wiener [2] com objetivo de avaliarmos a redução na SER obtida através da adoção de uma abordagem baseada na minimização da SER ao invés de adotarmos uma abordagem baseada na minimização do erro quadrático, ou na minimização do quadrado da diferença de fase entre o valor desejado e a saída do filtro.

Dessa forma, primeiro, na Subseção 4.3.2 comparamos o transiente dos algoritmos AMSERE, EMSERE e LMP. Depois disso, na Subseção 4.3.3 avaliaremos a SER obtida após a convergência para os algoritmos AMSERE, EMSERE e LMP.

### 4.3.1 Ambiente de Simulações

Nessa seção, utilizaremos o canal  $C(z) = (-0.4892 + j0.6067) + (0.8867 - j1.1269)z^{-1}$  para a constelação 8-PSK, e empregaremos um equalizador de 3 coeficientes com atraso idêntico a 2. Utilizaremos  $5 \times 10^4$  *ensembles* para os algoritmos adaptativos AMSERE e LMP. Antes de simularmos o algoritmo AMSERE, utilizaremos o algoritmo LMS por 100 iterações e 100 *ensembles* com objetivo de estimar o canal do sistema [4, 9].

Como a função-custo da SER para a constelação L-PSK não é convexa [15], se inicializarmos os algoritmos AMSERE e EMSERE de maneira aleatória, estes algoritmos poderão convergir para um mínimo local, que pode estar bem longe do mínimo global, tornando-se, dessa forma, ineficaz compararmos os algoritmos AMSERE e EMSERE com o filtro de Wiener, por exemplo. Nesse contexto, com objetivo de garantir a comparação efetiva entre os algoritmos AMSERE, EMSERE e LMP e o filtro de Wiener, iremos inicializar os algoritmos AMSERE, EMSERE e LMP com os coeficientes do filtro de Wiener.

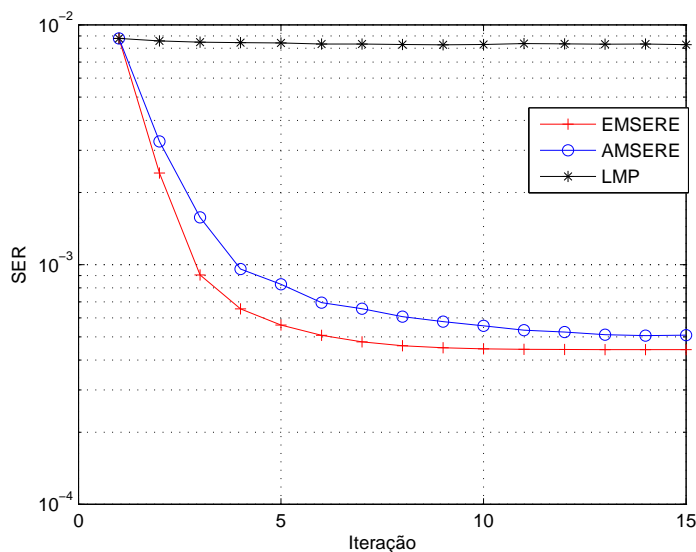


Figura 4.1: Comparação entre os algoritmos AMSERE, EMSERE e LMP para a SNR de 25dB.

### 4.3.2 Desempenho em Regime Transiente

Nessa subseção, calcularemos a SER para cada uma das iterações dos algoritmos AMSERE, EMSERE e LMP. Dessa forma, poderemos comparar o desempenho, em regime transiente, dos algoritmos propostos nesta tese com o filtro de Wiener e com o algoritmo LMP.

Na Figura 4.1, considerando uma razão sinal-ruído de 25dB, calculamos a SER para cada uma das iterações dos algoritmos: AMSERE, EMSERE e LMP. Primeiro, observamos que os transientes dos algoritmos AMSERE e EMSERE possuem um comportamento similar, mas devido às aproximações realizadas, o algoritmo AMSERE apresenta uma SER sistematicamente maior do que a SER obtida pelo algoritmo EMSERE. Entretanto, pode-se afirmar que o algoritmo AMSERE representa uma aproximação válida para o algoritmo EMSERE, porque ao compararmos os desempenhos dos algoritmos AMSERE e LMP, observamos que o algoritmo AMSERE proporciona uma redução significativa na SER. Além disso, como os algoritmos AMSERE e EMSERE foram inicializados com os coeficientes do filtro de Wiener, através da análise da Figura 4.1, observamos que em poucas iterações os algoritmos AMSERE e EMSERE foram capazes de proporcionar uma SER significativamente inferior àquela apresentada pelo filtro de Wiener.



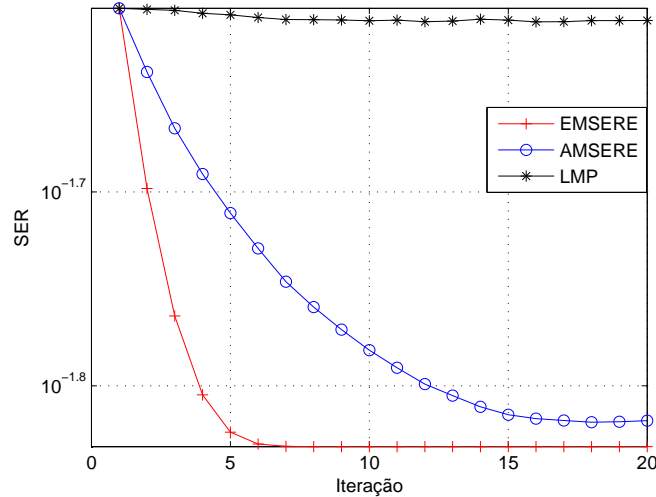


Figura 4.2: Comparação entre os algoritmos AMSERE, EMSERE e LMP para a SNR de 20dB.

Nas Figuras 4.2 e 4.3 considerando as razões sinal-ruído de 20dB e 30dB, respectivamente, calculamos a SER para cada uma das iterações dos algoritmos: AMSERE, EMSERE e LMP. Primeiro, na Figura 4.2, para a SNR de 20dB, observamos que, embora os algoritmos AMSERE e EMSERE proporcionem uma redução na SER, essa melhora do desempenho é quase que insignificante. Por outro lado, na Figura 4.3, para a SNR de 30dB, vemos que os algoritmos AMSERE e EMSERE proporcionam uma redução drástica na SER. Esta é uma tendência que será confirmada na próxima seção; enquanto que os algoritmos AMSERE, EMSERE, LMP e o filtro de Wiener possuem um desempenho semelhante para a SNR baixa ou moderada, os algoritmos AMSERE e EMSERE proporcionam uma redução significativa na SER para o regime de elevada SNR.

A seguir, na Tabela 4.1 listamos a SER média para o regime transiente dos algoritmos AMSERE e EMSERE e LMP para 3 diferentes valores da SNR, 20dB, 25dB e 30dB. Para facilitar a comparação, também incluímos as SER associadas ao filtro de Wiener. Primeiro, ao compararmos os desempenhos dos algoritmos AMSERE e EMSERE com o algoritmo LMP e com o filtro de Wiener, observamos que os algoritmos AMSERE e EMSERE proporcionam uma redução significativa na SER. Segundo, para esse exemplo, através da comparação do desempenho dos algoritmos AMSERE e EMSERE, podemos afirmar que o algoritmo AMSERE corresponde a

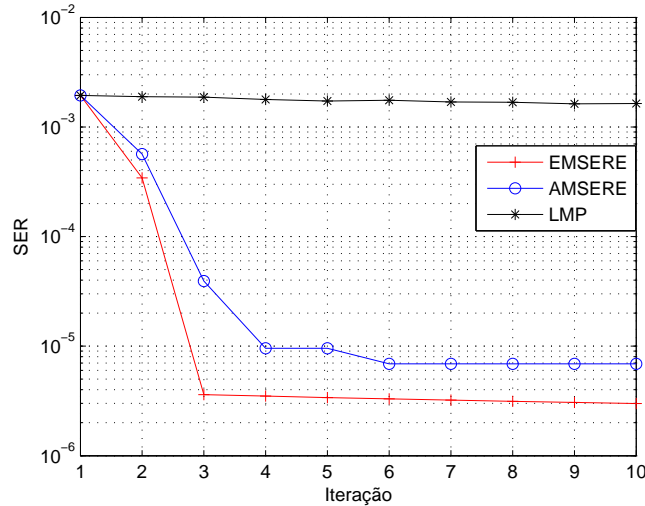


Figura 4.3: Comparação entre os algoritmos AMSERE, EMSERE e LMP para a SNR de 30dB.

uma boa aproximação ao algoritmo EMSERE.

SNR	EMSERE	AMSERE	LMP	Filtro de Wiener
20	$1.52 \times 10^{-2}$	$1.72 \times 10^{-2}$	$2.45 \times 10^{-2}$	$2.48 \times 10^{-2}$
25	$6.4 \times 10^{-4}$	$8.7 \times 10^{-4}$	$8.4 \times 10^{-3}$	$8.8 \times 10^{-3}$
30	$4.0 \times 10^{-5}$	$7.3 \times 10^{-5}$	$1.7 \times 10^{-3}$	$1.9 \times 10^{-3}$

Tabela 4.1: Comparação da SER para os diferentes algoritmos.

Na próxima subseção, iremos comparar o desempenho dos algoritmos AMSERE, EMSERE e LMP, em regime permanente, para diferentes valores da razão sinal-ruído.

### 4.3.3 Desempenho em Regime Permanente

Nessa subseção, calcularemos a SER, em regime permanente, para os algoritmos AMSERE, EMSERE, LMP e para o Filtro de Wiener ao variarmos a razão sinal-ruído de 0dB até 35dB.

Dessa forma, na Figura 4.4, considerando valores da razão sinal-ruído entre 0dB e 35dB, apresentamos a SER para os algoritmos AMSERE, EMSERE, LMP e para o Filtro de Wiener. Primeiro, observa-se que, para a SNR baixa ou mode-

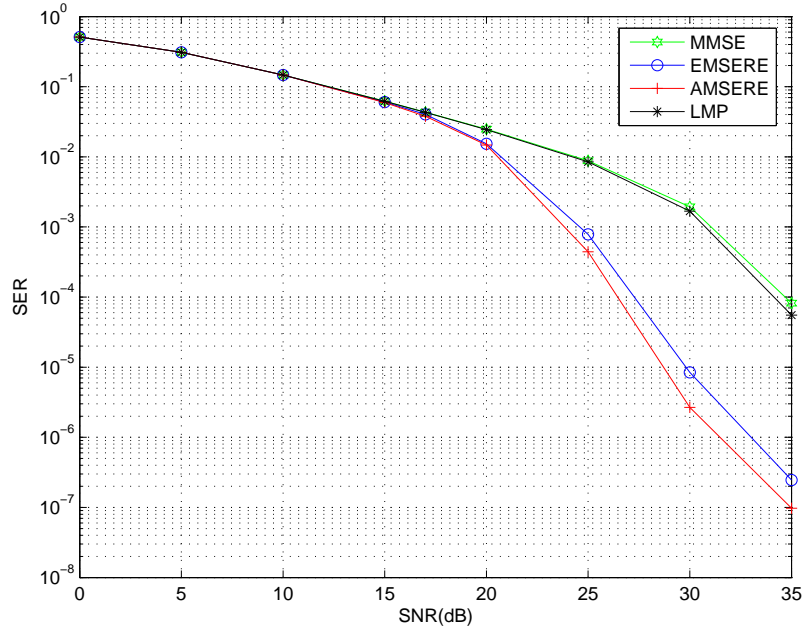


Figura 4.4: Comparação entre os algoritmos AMSERE, EMSERE, LMP e o filtro de Wiener para valores da SNR entre 0dB e 35dB.

rada, os algoritmos AMSERE, EMSERE, LMP e o filtro de Wiener possuem um desempenho parecido, e para elevada SNR, os algoritmos AMSERE e EMSERE proporcionam uma redução significativa na SER. Segundo, para esse exemplo, ao compararmos o desempenho dos algoritmos AMSERE e EMSERE, podemos afirmar que o algoritmo AMSERE corresponde a uma boa aproximação ao algoritmo EMSERE.

#### 4.3.4 Considerações Finais

Nessa seção, discutiremos algumas peculiaridades no comportamento dos algoritmos AMSERE e EMSERE. Mais precisamente, observaremos que, dependendo do canal utilizado, os algoritmos AMSERE e EMSERE podem apresentar um desempenho significativamente superior, ou um desempenho similar ao desempenho obtido pelo filtro de Wiener. Este comportamento deve-se ao fato de que, enquanto que para alguns canais, o filtro de Wiener encontra-se próximo do equalizador de mínima taxa de erro, para outros canais, o filtro de Wiener encontra-se distante do equalizador de mínima taxa de erro. Dessa forma, somente no segundo caso os

-1.077488 - 0.0877112i	1.815615 + 0.889844i
0.412478 - 0.5198641i	0.997496- 0.743163i
0.213752 - 0.4242528i	-0.178654 + 0.866669i
-0.146909 + 0.613366i	-1.166679+ 0.395632i
0.329199 - 0.012862i	-0.365272- 0.505268i
0.523168 - 0.146337i	0.810596+ 0.698584i
0.331490 + 0.983455i	1.944949 + 0.298615i
-0.183811 + 1.607587i	-0.437211+ 0.191829i
-0.235529 + 0.523122i	0.500874- 0.930581i
-0.425262 + 0.154785i	0.095583+ 0.905762i

Tabela 4.2: Canais Escolhidos

algoritmos AMSERE e EMSERE são capazes de proporcionar um desempenho significativamente superior ao desempenho obtido pelo filtro de Wiener. Nesta seção, consideramos que os canais foram perfeitamente identificados.

Primeiro, com objetivo de evidenciar que os algoritmos AMSERE e EMSERE podem proporcionar um desempenho significativamente superior ao desempenho obtido pelo filtro de Wiener, iremos comparar o desempenho dos algoritmos AMSERE e EMSERE com o desempenho do filtro de Wiener para os 10 canais listados na Tabela 4.2, para valores da razão sinal-ruído entre 0dB e 35dB. Para estes canais, o filtro de Wiener situa-se distante do equalizador que minimiza a SER, o que nos permite utilizar os algoritmos AMSERE e EMSERE para obter um desempenho significativamente superior. Além disso, utilizamos o filtro de Wiener para inicializar os algoritmos AMSERE e EMSERE. Para cada valor da razão sinal-ruído, a SER é calculada através da média das taxas de erro de símbolos que são obtidas para cada um dos 10 canais listados na Tabela 4.2. Na Figura 4.5 apresentamos os resultados para os algoritmos AMSERE e EMSERE e para o filtro de Wiener. Dessa forma, podemos observar que os algoritmos AMSERE e EMSERE apresentaram um desempenho significativamente superior ao desempenho obtido pelo filtro de Wiener. Mais precisamente, para a razão sinal-ruído de 25dB o algoritmos AMSERE e EMSERE apresentam uma SER aproximadamente dez vezes inferior a SER apresentada pelo filtro de Wiener.

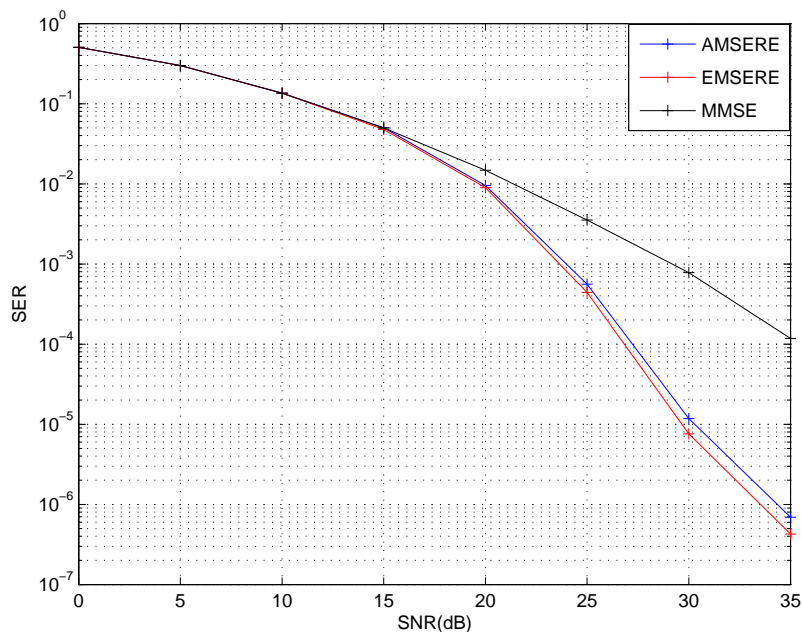


Figura 4.5: Comparação entre os algoritmos AMSERE, EMSERE, e o filtro de Wiener para os 10 canais escolhidos.

Depois disso, comparamos o desempenho dos algoritmos AMSERE e EMSERE com o desempenho do filtro de Wiener para um conjunto de 20 canais, que são obtidos de forma aleatória. Além disso, inicializamos os algoritmos AMSERE e EMSERE com os coeficientes do filtro de Wiener corrompidos por ruído aditivo. Com isso, desejamos comparar a SER dos algoritmos AMSERE e EMSERE com a SER do filtro de Wiener e também com a SER obtida para os coeficientes iniciais dos algoritmos AMSERE e EMSERE. Dessa forma, também seremos capazes de avaliar a convergência dos algoritmos AMSERE e EMSERE para um *ensemble* de 20 canais. Para cada valor da razão sinal-ruído, a SER é calculada através da média das taxas de erro de símbolos que são obtidas para cada um dos 20 canais. Na Figura 4.6 e na Tabela 4.3, apresentamos esses resultados para os algoritmos AMSERE e EMSERE, para o filtro de Wiener e para os coeficientes iniciais dos algoritmos AMSERE e EMSERE. Primeiro, observamos que para esse conjunto de 20 canais, os algoritmos AMSERE e EMSERE apresentaram um desempenho bastante próximo ao desempenho apresentado pelo filtro de Wiener. Podemos explicar esse comportamento, através da justificativa de que, para esse conjunto de canais, o filtro

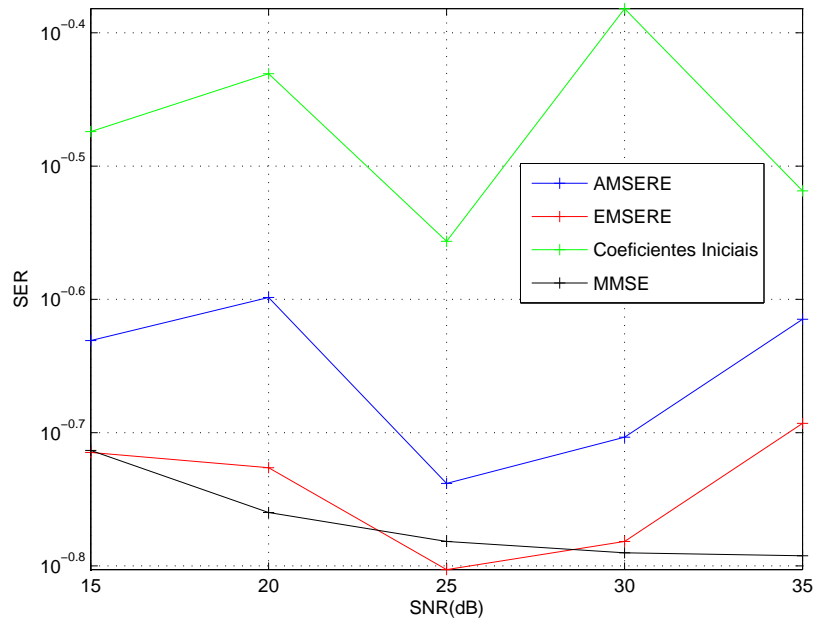


Figura 4.6: Comparação entre os algoritmos AMSERE, EMSERE, e o filtro de Wiener e os coeficientes iniciais dos algoritmos AMSERE e EMSERE para os 20 canais aleatórios.

de Wiener minimiza a SER, o que, de fato, impossibilita os algoritmos AMSERE e EMSERE de apresentarem um desempenho superior. Também observamos que, os algoritmos AMSERE e EMSERE apresentam valores da SER sistematicamente inferiores aos valores da SER apresentados por seus conjuntos de coeficientes iniciais, o que é uma evidência do funcionamento correto dos algoritmos AMSERE e EMSERE. Por último, observa-se que os coeficientes iniciais dos algoritmos AMSERE e EMSERE apresentam uma SER maior para as SNRs de 30dB e 35dB do que para a SNR de 25dB. Isso acontece porque os coeficientes iniciais dos algoritmos AMSERE e EMSERE são gerados a partir dos coeficientes do filtro de Wiener corrompidos por ruído aditivo.

Nessa seção, primeiro, vimos que para os canais em que o filtro de Wiener situa-se distante do equalizador de mínima SER, os algoritmos AMSERE e EMSERE proporcionam um desempenho significativamente superior ao desempenho obtido pelo filtro de Wiener, o que é uma evidência da importância dos algoritmos AMSERE e EMSERE. Por outro lado, observamos que, para os canais em que o

	15dB	20dB	25dB	30dB	35dB
MMSE	0.193	0.173	0.165	0.162	0.161
EMSERE	0.192	0.187	0.157	0.165	0.202
AMSERE	0.233	0.252	0.182	0.197	0.242
Coeficientes Iniciais	0.335	0.371	0.277	0.415	0.303

Tabela 4.3: Valores da SER para os diferentes cenários.

filtro de Wiener situa-se próximo ao equalizador de mínima SER, os desempenhos dos algoritmos AMSERE, EMSERE e do filtro de Wiener são similares. Por último, também observamos que para o *ensemble* de canais aleatórios, os algoritmos AMSERE e EMSERE convergiram para um valor da SER inferior ao valor da SER obtida para os seus coeficientes iniciais, o que é uma evidência do funcionamento correto dos algoritmos AMSERE e EMSERE.

## 4.4 Conclusão

Nesse capítulo, para o caso de elevada razão sinal-ruído e para um valor suficientemente elevado do número de símbolos da constelação L-PSK, apresentamos o equalizador adaptativo de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK (AMSERE ou *Adaptive Minimum Symbol Error Rate Equalizer*).

Através de simulações, observamos que, ao mesmo tempo que o algoritmo AMSERE apresenta um desempenho comparável ao desempenho apresentado pelo algoritmo EMSERE (*Exact Minimum Symbol Error Rate Equalizer*), para canais onde o filtro de Wiener encontra-se distante do equalizador de mínima taxa de erro, e para o caso de elevada razão sinal-ruído, o algoritmo AMSERE apresenta um desempenho significativamente superior ao desempenho apresentado pelo filtro de Wiener.

# Capítulo 5

## Conclusão

Neste trabalho, primeiro, propomos o equalizador exato de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK (algoritmo EMSERE). Depois disso, a partir do algoritmo EMSERE, obtemos o equalizador adaptativo de mínima taxa de erro para a constelação L-PSK (algoritmo AMSERE), para o caso de elevada razão sinal-ruído e para um valor suficientemente elevado do número de símbolos da constelação L-PSK. Estas contribuições são enunciadas na Proposição 4 e no Teorema 2, respectivamente.

Então, no capítulo 4 comparamos os desempenhos dos algoritmos AMSERE, EMSERE, LMP [14] e do filtro de Wiener [2] com objetivo de avaliarmos a redução na SER que pode ser obtida através da adoção de uma abordagem baseada na minimização da SER ao invés de adotarmos uma abordagem baseada na minimização do erro quadrático, ou na minimização do quadrado da diferença de fase entre o valor desejado e a saída do filtro. Dessa forma, observamos que, para a SNR baixa ou moderada, os algoritmos AMSERE, EMSERE, LMP e o filtro de Wiener possuem um desempenho parecido, e para elevada SNR, os algoritmos AMSERE e EMSERE proporcionam uma redução significativa na SER. Além disso, também observamos que, o algoritmo AMSERE apresenta um desempenho comparável ao desempenho apresentado pelo algoritmo EMSERE, o que de certa forma valida as aproximações realizadas.

Além disso, o resultado apresentado na Proposição 3 também corresponde a uma contribuição desta dissertação. Nesta proposição, calculamos a expressão para os gradientes da probabilidade de erro de símbolo em relação aos filtros MIMO de transmissão e de recepção.



## 5.1 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, podemos investigar uma maneira de eliminar a dependência do algoritmo AMSERE em relação a potência do ruído ou simplesmente podemos utilizar uma estimativa da potência do ruído [9]. Além disso, devido a característica seletiva quanto às atualizações do algoritmo AMSERE podemos investigar a sua possível conexão com os algoritmos adaptativos *Set-Membership* [20, 21].

# Referências Bibliográficas

- [1] KAILATH, T., “A View of Three Decades of Linear Filtering Theory”, *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 20, pp. 146–181, 1974.
- [2] KAILATH, T., SAYED, A. H., HASSIBI, B., *Linear Estimation*. New Jersey, Prentice-Hall, 1999.
- [3] WIDROW, B., “Thinking about thinking: the discovery of the LMS algorithm”, *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 100–106, January 2005.
- [4] DINIZ, P. S. R., *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation*. 2 ed. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [5] QURESHI, S. U. H., “Adaptive Equalization”, *Proceedings of the IEEE*, v. 73, n. 9, pp. 1349–1387, September 1985.
- [6] WERNER, S., *Reduced Complexity Adaptive Filtering Algorithms with Applications to Communications Systems*. Tese de D.Sc., Helsinki University of Technology, November 2002.
- [7] YEH, C.-C., *Minimum-Error-Probability Equalization and Multiuser Detection*. Ph.D. dissertation, Georgia Institute of Technology, 1998.
- [8] CHEN, S., HANZO, L., MULGREW, B., “Adaptive Minimum Symbol-Error-Rate Decision Feedback Equalization for Multilevel Pulse-Amplitude Modulation”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 52, n. 7, pp. 2092–2101, July 2004.
- [9] SAYED, A. H., *Fundamentals of Adaptive Filtering*. New Jersey, John Wiley & Sons, 2003.

- [10] HAYKIN, S., *Adaptive Filter Theory*. 4 ed. New Jersey, Prentice-Hall, 2002.
- [11] YEH, C.-C., BARRY, J. R., “Adaptive Minimum Bit-Error Rate Equalization for Binary Signaling”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 48, n. 7, pp. 1226–1235, 2000.
- [12] YEH, C.-C., BARRY, J. R., “Adaptive Minimum Symbol-Error Rate Equalization for Quadrature-Amplitude Modulation”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 51, n. 12, pp. 3263–3269, 2003.
- [13] PROAKIS, J. G., *Digital Communications*. 4 ed. New York, McGraw-Hill, 2001.
- [14] TARIGHAT, A., SAYED, A. H., “Least Mean-Phase Adaptive Filters with Application to Communications Systems”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 11, n. 2, pp. 220–223, 2004.
- [15] BOYD, S., VANDENBERGHE, L., *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [16] HJØRUNGNES, A., “Minimum Symbol Error Rate Transmitter and Receiver FIR MIMO Filters for Multilevel PSK Signaling”, *Proc. International Symposium on Wireless Communication Systems*, pp. 27–31, 2005.
- [17] BARRY, J. R., LEE, E. A., MESSERSCHMITT, D. G., *Digital Communication*. 3 ed. Boston, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [18] LUTKEPOHL, H., *Handbook of Matrices*. NJ, Wiley, 1996.
- [19] HORN, R. A., JOHNSON, R. C., *Topics in Matrix Analysis*. New York, Cambridge University Press, 1991.
- [20] GOLLAMUDI, S., NAGARAJ, S., KAPOOR, S., *et al.*, “Set-Membership Filtering and a Set-Membership Normalized LMS Algorithm with an Adaptive Step Size”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 5, pp. 111–114, May 1998.
- [21] WERNER, S., DINIZ, P. S. R., “Set-Membership Affine Projection Algorithm”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 8, n. 8, Aug. 2001.

- [22] CRAIG, J. W., “A new, simple and exact result for calculating the probability of error for two-dimensional signal constellations”, *Proc. IEEE Military Communications Conference*, v. 2, pp. 571–575, November 1991.
- [23] HJØRUNGNES, A., GESBERT, D., “Complex-Valued Matrix Differentiation: Techniques and Key Results”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 55, n. 6, pp. 2740–2746, 2007.

# Apêndice A

## Prova do Lema 1

Nesse apêndice, mostraremos que a probabilidade  $P_\psi$  de que diferença de fase entre o sinal  $s \in \mathbb{C}$  e sua versão corrompida por ruído AGCS de média zero esteja no intervalo  $[\psi, \pi]$  corresponde a

$$P_\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi-\psi} \exp\left(-\frac{|s|^2 \sin^2(\pi-\psi)}{\sigma^2 \sin^2(\phi)}\right) d\phi \quad (\text{A.1})$$

$$= h(\pi - \psi), \quad (\text{A.2})$$

onde  $\sigma^2$  é a variância do ruído e  $\psi \in [0, \pi]$ . A p.d.f., em coordenadas polares, do ruído AGCS é dada por [22]

$$p(r) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right). \quad (\text{A.3})$$

onde  $r$  corresponde à distância do ponto à origem. Neste ponto, convém notificar que o material apresentado nesse apêndice foi-me apresentado pelo Professor Are Hjørungnes.

*Prova:* A Figura A.1 ilustra o problema corrente. Nesse cenário, a probabilidade  $P_\psi$  corresponde a integral da p.d.f. do ruído, centrada em  $s$ , sobre a região delimitada pelas semi-retas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OD}$ .

Dessa forma, podemos inferir que a probabilidade  $P_\psi$  pode ser expressa como

$$P_\psi = \int_0^{\pi-\psi} \int_{R(\theta)}^{\infty} p(r)r dr d\theta \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{1}{\pi\sigma^2} \int_0^{\pi-\psi} \int_{R(\theta)}^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) r dr d\theta. \quad (\text{A.5})$$

Depois de realizar a seguinte mudança de variáveis

$$u = r^2 \rightarrow du = 2rdr \quad (\text{A.6})$$

tem-se que

$$P_\psi = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{\pi-\psi} \int_{R^2(\theta)}^\infty \exp\left(-\frac{u}{\sigma^2}\right) dud\theta. \quad (\text{A.7})$$

Então, aplicando a lei dos senos a Figura A.1

$$\frac{R(\theta)}{\sin(\psi)} = \frac{|s|}{\sin(\pi - (\theta + \psi))} = \frac{|s|}{\sin(\theta + \psi)}, \quad (\text{A.8})$$

e integrando na variável  $u$ , obtemos

$$P_\psi = \frac{\sigma^2}{2\pi\sigma^2} \int_0^{\pi-\psi} \exp\left(-\frac{|s|^2 \sin^2(\psi)}{\sigma^2 \sin^2(\theta + \psi)}\right) d\theta. \quad (\text{A.9})$$

Novamente, realizando a seguinte mudança de variáveis

$$\phi = \pi - (\theta + \psi) \rightarrow d\phi = -d\theta, \quad (\text{A.10})$$

podemos reescrever a expressão para a probabilidade  $P_\psi$  como

$$P_\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi-\psi} \exp\left(-\frac{|s|^2 \sin^2(\pi - \psi)}{\sigma^2 \sin^2(\phi)}\right) d\phi \quad (\text{A.11})$$

$$= h(\pi - \psi). \quad (\text{A.12})$$

□

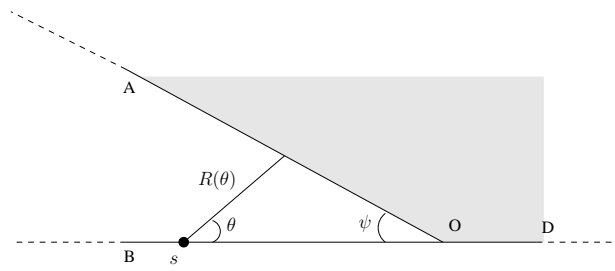


Figura A.1: Ilustração do resultado apresentado pelo Lema 1.

# Apêndice B

## Prova da Proposição 3

Com objetivo de provar a Proposição 3, primeiro, enunciamos o Lema 3, que será instrumental na prova a ser desenvolvida neste apêndice.

**Lema 3.** *Os gradientes das funções  $h(\alpha_{ik})$ ,  $h(\beta_{ik})$  e  $h(\gamma_{ik})$ , para  $i = 1, \dots, M$  e  $k = 1, \dots, K$ , em relação a  $\mathbf{w}_i$  e  $\text{vec}(\mathbf{E})$  podem ser escritos como*

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\alpha_{ik})}{\partial \mathbf{w}_i^*} &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{|s_{ik}|^2}{\sigma_i^2}\right) \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} \\ &+ \mathcal{H}(\alpha_{ik}) \left[ \frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}_i}{\sigma_i^2} - \frac{\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} - j \cot(\alpha_{ik}) \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\beta_{ik})}{\partial \mathbf{w}_i^*} &= -\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{|s_{ik}|^2}{\sigma_i^2}\right) \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} \\ &+ \mathcal{H}(\beta_{ik}) \left[ \frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}_i}{\sigma_i^2} - \frac{\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} + j \cot(\beta_{ik}) \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\gamma_{ik})}{\partial \mathbf{w}_i^*} &= -\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{|s_{ik}|^2}{\sigma_i^2}\right) \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} \\ &+ \mathcal{H}(\gamma_{ik}) \left[ \frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}_i}{\sigma_i^2} - \frac{\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} + j \cot(\gamma_{ik}) \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\alpha_{ik})}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{|s_{ik}|^2}{\sigma_i^2}\right) \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} \\ &+ \mathcal{H}(\alpha_{ik}) \left[ -\frac{\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} - j \cot(\alpha_{ik}) \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\beta_{ik})}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} &= -\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{|s_{ik}|^2}{\sigma_i^2}\right) \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} \\ &+ \mathcal{H}(\beta_{ik}) \left[ -\frac{\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} + j \cot(\beta_{ik}) \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\gamma_{ik})}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} &= -\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{|s_{ik}|^2}{\sigma_i^2}\right) \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} \\ &+ \mathcal{H}(\gamma_{ik}) \left[ -\frac{\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} + j \cot(\gamma_{ik}) \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

*Prova:* Ver Apêndice C. □

*Prova da Proposição 3:* Primeiro, distinguimos dois casos, a)  $|\Delta_{ik}| \in [0, \frac{\pi}{L}]$  e b)  $|\Delta_{ik}| \in (\frac{\pi}{L}, \pi]$ :

a)  $|\Delta_{ik}| \in [0, \frac{\pi}{L}]$ .

A partir das Equações (B.1) e (B.2) tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\alpha_{ik})}{\partial \mathbf{w}_i^*} + \frac{\partial h(\beta_{ik})}{\partial \mathbf{w}_i^*} &= \mathcal{H}(\alpha_{ik}) \left[ \frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}_i}{\sigma_i^2} - \frac{\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} - \cot(\alpha_{ik}) \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} \right] \\ &+ \mathcal{H}(\beta_{ik}) \left[ \frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}_i}{\sigma_i^2} - \frac{\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} + \cot(\beta_{ik}) \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} \right] \\ &= -\text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} \frac{\mathcal{H}(\alpha_{ik})}{\sin(\alpha_{ik})} \exp(-j\text{sign}(\Delta_{ik})\alpha_{ik}) \\ &+ \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} \frac{\mathcal{H}(\beta_{ik})}{\sin(\beta_{ik})} \exp(+j\text{sign}(\Delta_{ik})\beta_{ik}) \\ &+ \frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}_i}{\sigma_i^2} [\mathcal{H}(\alpha_{ik}) + \mathcal{H}(\beta_{ik})] \\ &= \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} p_{ik} + \frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}_i}{\sigma_i^2} c_{ik}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

De forma equivalente, a partir das Equações (B.2) e (B.3) tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\alpha_{ik})}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} + \frac{\partial h(\beta_{ik})}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} &= \mathcal{H}(\alpha_{ik}) \left[ -\frac{\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} - \cot(\alpha_{ik}) \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} \right] \\ &+ \mathcal{H}(\beta_{ik}) \left[ -\frac{\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} + \cot(\beta_{ik}) \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} \right] \\ &= -\text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} \frac{\mathcal{H}(\alpha_{ik})}{\sin(\alpha_{ik})} \exp(-j\text{sign}(\Delta_{ik})\alpha_{ik}) \\ &+ \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} \frac{\mathcal{H}(\beta_{ik})}{\sin(\beta_{ik})} \exp(+j\text{sign}(\Delta_{ik})\beta_{ik}) \\ &= \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} p_{ik}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

b)  $|\Delta_{ik}| \in (\frac{\pi}{L}, \pi]$ .

A partir das Equações (B.4) e (B.5) tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{-\partial h(\gamma_{ik})}{\partial \mathbf{w}_i^*} + \frac{\partial h(\beta_{ik})}{\partial \mathbf{w}_i^*} &= \mathcal{H}(\gamma_{ik}) \left[ -\frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}_i}{\sigma_i^2} + \frac{\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} - \cot(\gamma_{ik}) \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} \right] \\
&\quad + \mathcal{H}(\beta_{ik}) \left[ +\frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}_i}{\sigma_i^2} - \frac{\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} + \cot(\beta_{ik}) \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} \right] \\
&= +\text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} \frac{\mathcal{H}(\beta_{ik})}{\sin(\beta_{ik})} \exp(j\text{sign}(\Delta_{ik})\beta_{ik}) \\
&\quad - \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} \frac{\mathcal{H}(\gamma_{ik})}{\sin(\gamma_{ik})} \exp(j\text{sign}(\Delta_{ik})\gamma_{ik}) \\
&\quad + \frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}_i}{\sigma_i^2} [-\mathcal{H}(\gamma_{ik}) + \mathcal{H}(\beta_{ik})] \\
&= \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{y}_k^*}{s_{ik}^*} p_{ik} + \frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}_i}{\sigma_i^2} c_{ik}.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

De forma equivalente, a partir das Equações (B.5) e (B.6) tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{-\partial h(\gamma_{ik})}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} + \frac{\partial h(\beta_{ik})}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} &= \mathcal{H}(\gamma_{ik}) \left[ +\frac{\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} - \cot(\gamma_{ik}) \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} \right] \\
&\quad + \mathcal{H}(\beta) \left[ -\frac{\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} + \cot(\beta_{ik}) \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} \right] \\
&= +\text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} \frac{\mathcal{H}(\beta_{ik})}{\sin(\beta_{ik})} \exp(j\text{sign}(\Delta_{ik})\beta_{ik}) \tag{B.10} \\
&\quad - \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} \frac{\mathcal{H}(\gamma_{ik})}{\sin(\gamma_{ik})} \exp(j\text{sign}(\Delta_{ik})\gamma_{ik}) \\
&= \text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{j\mathbf{t}_{ik}^*}{s_{ik}^*} p_{ik}.
\end{aligned}$$

Isto completa a Prova da Proposição 3. □

# Apêndice C

## Prova do Lema 3

*Prova:* Primeiro, com objetivo de simplificar a notação consideramos,  $s_{ik} = s$ ,  $d_{ik} = d$ ,  $\Delta_{ik} = \Delta$ ,  $\alpha_{ik} = \alpha$ ,  $\beta_{ik} = \beta$ ,  $\gamma_{ik} = \gamma$ ,  $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{t}_{ik} = \mathbf{t}$ ,  $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}$ ,  $\sigma_i^2 = \sigma^2$  e  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ . Neste ponto, convém notificar que o material apresentado nesse apêndice foi desenvolvido pelo Professor Are Hjörungnes.

Para facilitar a referência, escrevemos novamente a função  $h(\lambda)$ ,

$$h(\lambda) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{|s|^2 \sin^2(\lambda)}{\sigma^2 \sin^2(\phi)}\right) d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda f(\phi) d\phi \quad (\text{C.1})$$

onde

$$f(\phi) \triangleq \exp\left(-\frac{|s|^2 \sin^2(\lambda)}{\sigma^2 \sin^2(\phi)}\right). \quad (\text{C.2})$$

Então, considerando a regra de Leibniz para a diferenciação de integrais definidas,

$$\frac{\partial h(\lambda)}{\partial \mathbf{w}^*} = \frac{1}{2\pi} \left[ f(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{w}^*} + \int_0^\lambda \frac{\partial f(\phi)}{\partial \mathbf{w}^*} d\phi \right]. \quad (\text{C.3})$$

Pode-se, escrever que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\lambda)}{\partial \mathbf{w}^*} &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{|s|^2}{\sigma^2}\right) \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{w}^*} \\ &+ \mathcal{H}(\lambda) \left[ \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \mathbf{w}^*} - \frac{1}{|s|^2} \frac{\partial |s|^2}{\partial \mathbf{w}^*} - 2 \cot(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{w}^*} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

onde definimos

$$\mathcal{H}(\lambda) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{|s|^2 \sin^2(\lambda)}{\sigma^2 \sin^2(\phi)}\right) \frac{|s|^2 \sin^2(\lambda)}{\sigma^2 \sin^2(\phi)} d\phi. \quad (\text{C.5})$$

De forma análoga, pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\lambda)}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{|s|^2}{\sigma^2}\right) \frac{\partial \lambda}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} \\ &+ \mathcal{H}(\lambda) \left[ \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} - \frac{1}{|s|^2} \frac{\partial |s|^2}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} - 2 \cot(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Dessa forma, antes de calcularmos os gradientes das funções  $h(\alpha)$ ,  $h(\beta)$  e  $h(\gamma)$ , necessitaremos dos resultados abaixo, que serão apresentados e provados, a seguir, nos Lemas 4, 5 e 6.

$$\frac{\partial |s|^2}{\partial \mathbf{w}^*} = s \mathbf{y}^*, \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\partial |s|^2}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} = s \mathbf{t}^*, \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{\partial |\Delta|}{\partial \mathbf{w}^*} = \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta) \frac{s \mathbf{y}^*}{|s|^2}, \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{\partial |\Delta|}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} = \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta) \frac{s \mathbf{t}^*}{|s|^2}, \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \mathbf{w}^*} = \Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}, \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} = \mathbf{0}. \quad (\text{C.12})$$

Então, substituindo os resultados das Equações (C.7)-(C.12) nas Equações (C.4) e (C.6), obtém-se as derivadas parciais das funções  $h(\alpha)$ ,  $h(\beta)$  e  $h(\gamma)$  em relação a  $\text{vec}(\mathbf{E}^*)$  e em relação a  $\mathbf{w}^*$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\alpha)}{\partial \mathbf{w}^*} &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{|s|^2}{\sigma^2}\right) \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta) \frac{\mathbf{y}^*}{s^*} \\ &+ \mathcal{H}(\alpha) \left[ \frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}}{\sigma^2} - \frac{\mathbf{y}^*}{s^*} - j \cot(\alpha) \text{sign}(\Delta) \frac{\mathbf{y}^*}{s^*} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\beta)}{\partial \mathbf{w}^*} &= -\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{|s|^2}{\sigma^2}\right) \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta) \frac{\mathbf{y}^*}{s^*} \\ &+ \mathcal{H}(\beta) \left[ \frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}}{\sigma^2} - \frac{\mathbf{y}^*}{s^*} + j \cot(\beta) \text{sign}(\Delta) \frac{\mathbf{y}^*}{s^*} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\gamma)}{\partial \mathbf{w}^*} &= -\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{|s|^2}{\sigma^2}\right) \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta) \frac{\mathbf{y}^*}{s^*} \\ &+ \mathcal{H}(\gamma) \left[ \frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}}{\sigma^2} - \frac{\mathbf{y}^*}{s^*} + j \cot(\gamma) \text{sign}(\Delta) \frac{\mathbf{y}^*}{s^*} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\alpha)}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{|s|^2}{\sigma^2}\right) \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta) \frac{\mathbf{t}^*}{s^*} \\ &+ \mathcal{H}(\alpha) \left[ -\frac{\mathbf{t}^*}{s^*} - j \cot(\alpha) \text{sign}(\Delta) \frac{\mathbf{t}^*}{s^*} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\beta)}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} &= -\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{|s|^2}{\sigma^2}\right) \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta) \frac{\mathbf{t}^*}{s^*} \\ &+ \mathcal{H}(\beta) \left[ -\frac{\mathbf{t}^*}{s^*} + j \cot(\beta) \text{sign}(\Delta) \frac{\mathbf{t}^*}{s^*} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(\gamma)}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} &= -\frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{|s|^2}{\sigma^2}\right) \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta) \frac{\mathbf{t}^*}{s^*} \\ &+ \mathcal{H}(\gamma) \left[ -\frac{\mathbf{t}^*}{s^*} + j \cot(\gamma) \text{sign}(\Delta) \frac{\mathbf{t}^*}{s^*} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

□

A seguir, propomos os Lemas 4, 5 e 6, que apresentam os resultados das Equações (C.7)-(C.12), que foram necessárias para a realização da prova do Lema 3.

**Lema 4.** *É possível escrever que*

$$\frac{\partial |s|^2}{\partial \mathbf{w}^*} = s \mathbf{y}^*, \quad (\text{C.19})$$

$$\frac{\partial |s|^2}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} = s \mathbf{t}^*. \quad (\text{C.20})$$

*Prova:* Primeiro escrevemos,

$$|s|^2 = s s^* = \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{x} (\mathbf{x}^H \mathbf{F}^H \mathbf{C}^H \mathbf{w}^*). \quad (\text{C.21})$$

Então, derivando  $|s|^2$  em relação a  $\mathbf{w}^*$  obtemos a Equação (C.19),

$$\begin{aligned} \frac{\partial |s|^2}{\partial \mathbf{w}^*} &= \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{x} (\mathbf{C} \mathbf{F} \mathbf{x})^* \\ &= s \mathbf{y}^*. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Agora, com objetivo de obter a Equação (C.20), reescrevemos  $|s|^2$  como

$$|s|^2 = s s^* = \text{vec}^T(\mathbf{E}) \mathbf{t} \mathbf{t}^H \text{vec}(\mathbf{E}^*). \quad (\text{C.23})$$

Então, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial |s|^2}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} &= \text{vec}^T(\mathbf{E}) \mathbf{t} \mathbf{t}^* \\ &= s \mathbf{t}^*. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

□

**Lema 5.** *É possível escrever que*

$$\frac{\partial |\Delta|}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} = \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta) \frac{s\mathbf{t}^*}{|s|^2}, \quad (\text{C.25})$$

$$\frac{\partial |\Delta|}{\partial \mathbf{w}^*} = \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta) \frac{s\mathbf{y}^*}{|s|^2}. \quad (\text{C.26})$$

*Prova:* Antes de calcularmos as Equações (C.25) e (C.26), derivaremos, nos itens a seguir, como passos intermediários, as derivadas, (a)  $\frac{\partial |z|}{\partial z}$  e  $\frac{\partial |z|}{\partial z^*}$ , (b)  $\frac{\partial \angle z}{\partial z^*}$  e (c)  $\frac{\partial \angle z}{\partial z^*}$ , onde  $z = x + jy$  e  $j = \sqrt{-1}$ . Então, por último, no item (d), calcularemos as Equações (C.25) e (C.26).

a)  $\frac{\partial |z|}{\partial z^*}$  e  $\frac{\partial |z|}{\partial z}$

Com objetivo de calcular a derivada de  $|z|$  em relação a  $z^*$ , escrevemos  $|z|$  em função de sua parte real e imaginária,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (\text{C.27})$$

Primeiro, calcula-se as derivadas parciais de  $|z|$  em relação a  $x$  e  $y$ ,

$$\frac{\partial |z|}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{|z|}, \quad (\text{C.28})$$

$$\frac{\partial |z|}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{|z|}. \quad (\text{C.29})$$

Então, pode-se escrever que

$$\frac{\partial |z|}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{|z|} + j \frac{y}{|z|} \right) = \frac{1}{2} \frac{z}{|z|}. \quad (\text{C.30})$$

De forma análoga, pode-se mostrar que

$$\frac{\partial |z|}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{z^*}{|z|}. \quad (\text{C.31})$$

b)  $\frac{\partial \angle z}{\partial z^*}$

Com objetivo de calcular a derivada de  $\angle z$  em relação a  $z^*$ , escrevemos  $\angle z$  em função de sua parte real e imaginária,

$$\angle z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{C.32})$$

Primeiro, calcula-se as derivadas parciais de  $\angle z$  em relação a  $x$  e  $y$ ,

$$\frac{\partial \angle z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)} \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad (\text{C.33})$$

$$\frac{\partial \angle z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)} \frac{x}{x^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (\text{C.34})$$

Então, pode-se escrever que

$$\frac{\partial \angle z}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{|z|^2} + j \frac{y}{|z|^2} \right) = \frac{jz}{2|z|^2}. \quad (\text{C.35})$$

c)  $\frac{\partial |\angle z|}{\partial z^*}$

Com objetivo de calcular a derivada de  $|\angle z|$  em relação a  $z^*$ , escrevemos

$$f(g(z, z^*), g^*(z, z^*)) = |\angle z| \quad (\text{C.36})$$

onde

$$f(z, z^*) = |z|, \quad (\text{C.37})$$

$$g(z, z^*) = \angle z. \quad (\text{C.38})$$

Então, utilizando a regra da cadeia [23, eq. (9)], obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\angle z|}{\partial z^*} &= \frac{\partial f(g(z, z^*), g^*(z, z^*))}{\partial g(z, z^*)} \frac{\partial g(z, z^*)}{\partial z^*} + \frac{\partial f(g(z, z^*), g^*(z, z^*))}{\partial g^*(z, z^*)} \frac{\partial g^*(z, z^*)}{\partial z^*} \\ &= \frac{g^*(z, z^*)}{2|g(z, z^*)|} \frac{jz}{2|z|^2} + \frac{g(z, z^*)}{2|g(z, z^*)|} \frac{jz}{2|z|^2} \\ &= \frac{j}{2} \text{sign}(\angle z) \frac{z}{|z|^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

d)  $\frac{\partial |\Delta|}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)}$  e  $\frac{\partial |\Delta|}{\partial \mathbf{w}^*}$

Finalmente, com objetivo de calcular as Equações (C.25) e (C.26), escrevemos

$$p(q(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*), q^*(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*)) = |\Delta|, \quad (\text{C.40})$$

onde

$$p(z, z^*) = |\angle z| \quad (\text{C.41})$$

$$q(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) = \frac{\mathbf{z}^T \mathbf{y}}{d}. \quad (\text{C.42})$$

Então, utilizando a regra da cadeia [23, eq. (9)], obtemos a Equação (C.25),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial |\Delta|}{\partial \mathbf{w}^*} &= \frac{\partial p(q(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*), q^*(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*))}{\partial q(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*)} \frac{\partial q(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*)}{\partial \mathbf{w}^*} + \frac{\partial p(q(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*), q^*(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*))}{\partial q^*(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*)} \frac{\partial q^*(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*)}{\partial \mathbf{w}^*} \\
&= j \text{sign}(\angle q(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*)) \frac{q(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*)}{2|q(\mathbf{w}, \mathbf{w}^*)|^2} \frac{\mathbf{y}^*}{d^*} \\
&= \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta) \frac{s\mathbf{y}^*}{|s|^2}.
\end{aligned} \tag{C.43}$$

De forma análoga, pode-se obter a equação (C.26),

$$\frac{\partial |\Delta|}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} = \frac{j}{2} \text{sign}(\Delta) \frac{s\mathbf{t}^*}{|s|^2}. \tag{C.44}$$

□

**Lema 6.** *É possível escrever que*

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \mathbf{w}^*} = \Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}, \tag{C.45}$$

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} = \mathbf{0}. \tag{C.46}$$

*Prova:* A variância do ruído  $\sigma^2$  pode ser escrita como

$$\sigma^2 = \mathbf{w}^T \Phi_{\mathbf{v}} \mathbf{w}^*. \tag{C.47}$$

Então, derivando  $\sigma^2$  em relação a  $\mathbf{w}^*$  obtemos a Equação (C.45),

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \mathbf{w}^*} = \Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}. \tag{C.48}$$

De forma análoga, obtém-se a Equação (C.46),

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial \text{vec}(\mathbf{E}^*)} = \mathbf{0}. \tag{C.49}$$

□



# Apêndice D

## Prova da Proposição 4

A seguir, enunciamos o Lema 7, que será instrumental na prova a ser apresentada nesse apêndice

**Lema 7.** *É possível escrever que*

$$\mathcal{H}(\lambda, s, \sigma) < \frac{1}{2}, \quad (\text{D.1})$$

para  $\lambda \in (0, \pi)$ .

*Prova:* A partir da Equação (3.72) tem-se que

$$\mathcal{H}(\lambda, s, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{|s|^2 \sin^2(\lambda)}{\sigma^2 \sin^2(\phi)}\right) \frac{|s|^2 \sin^2(\lambda)}{\sigma^2 \sin^2(\phi)} d\phi \quad (\text{D.2})$$

$$< \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{|s|^2 \sin^2(\lambda)}{\sigma^2 \sin^2(\phi)}\right) \exp\left(+\frac{|s|^2 \sin^2(\lambda)}{\sigma^2 \sin^2(\phi)}\right) d\phi \quad (\text{D.3})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda d\phi = \frac{\lambda}{2\pi} \quad (\text{D.4})$$

Como  $\lambda \in (0, \pi)$ , segue que

$$\mathcal{H}(\lambda, s, \sigma) < \frac{1}{2}. \quad (\text{D.5})$$

□

*Prova da Proposição 4:* Primeiro, assumindo que o ruído AGCS, na saída do canal, seja branco e de variância  $\sigma_v^2$  pode-se escrever que

$$\frac{\Phi_{\mathbf{v}}^T \mathbf{w}_1}{\sigma_1^2} = \frac{\mathbf{w}_1 \sigma_v^2}{\|\mathbf{w}_1\|^2 \sigma_v^2} = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2}. \quad (\text{D.6})$$

Dessa forma, através da Equação (3.74) podemos escrever que

$$\bar{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{w}_1 - \mu \sum_{k=1}^K \text{sign}(\Delta_{1k}) \frac{j\mathbf{y}_k^* p_{1k}}{s_{1k}^* K} - \mu \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \sum_{k=1}^K \frac{c_{1k}}{K}. \quad (\text{D.7})$$

Reorganizando os termos obtemos

$$\bar{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{w}_1 \left( 1 - \frac{\mu}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \sum_{k=1}^K \frac{c_{1k}}{K} \right) - \mu \sum_{k=1}^K \text{sign}(\Delta_{1k}) \frac{j\mathbf{y}_k^* p_{1k}}{s_{1k}^* K}. \quad (\text{D.8})$$

Utilizando o Lema 7 garantimos que  $|c_{1k}| < 1$  e através do Corolário 2 pode-se assumir que  $\|\mathbf{w}_1\|^2 = 1$ , sem perda de generalidade. Dessa forma, para  $0 < \mu < 1$  podemos escrever que

$$\left( 1 - \frac{\mu}{\|\mathbf{w}_1\|^2} \sum_{k=1}^K \frac{c_{1k}}{K} \right) > 0. \quad (\text{D.9})$$

Com efeito, utilizando novamente o resultado do Corolário 2 tem-se que

$$\tilde{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{w}_1 - \frac{\mu}{\left( 1 - \mu \sum_{k=1}^K \frac{c_{1k}}{K} \right)} \sum_{k=1}^K \text{sign}(\Delta_{1k}) \frac{j\mathbf{y}_k^* p_{1k}}{s_{1k}^* K}, \quad (\text{D.10})$$

onde  $\tilde{\mathbf{w}}_1$  difere de  $\bar{\mathbf{w}}_1$  por uma constante multiplicativa positiva, o que pelo Corolário 2 não altera a SER resultante.

Finalmente, pode-se escrever que

$$\tilde{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{w}_1 - \bar{\mu} \sum_{k=1}^K \text{sign}(\Delta_{1k}) \frac{j\mathbf{y}_k^* p_{1k}}{s_{1k}^* K}, \quad (\text{D.11})$$

para  $0 < \bar{\mu} < 1$ . □

# Apêndice E

## Prova do Lema 2

A seguir, enunciamos o Lema 8, que será instrumental na prova a ser apresentada nesse apêndice

**Lema 8.** *A seguinte aproximação é válida para o regime de elevada razão sinal-ruído,  $\frac{|s|^2}{\sigma^2}$ ,*

$$\frac{|s|^2}{\sigma^2} h(\lambda, s, \sigma) \approx \frac{\mathcal{H}(\lambda, s, \sigma)}{\sin(\lambda)}, \quad (\text{E.1})$$

para  $0 < \lambda < \pi$ .

*Prova:* Ver Apêndice F. □

*Prova do Lema 2:* Com o objetivo de provarmos o Lema 2, distinguiremos três casos,

a)  $|\Delta_k| \in [0, \frac{\pi}{L}]$ , b)  $|\Delta_k| \in (\frac{\pi}{L}, \pi - \frac{\pi}{L}]$  e c)  $|\Delta_k| \in (\pi - \frac{\pi}{L}, \pi]$ :

a)  $|\Delta_k| \in [0, \frac{\pi}{L}]$

Primeiro, utilizando o resultado do Lema 8 e as definições das variáveis  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  é possível aproximar  $p_k$ , para o regime de elevada razão sinal-ruído,  $\frac{|s_k|^2}{\sigma^2}$ , como

$$p_k \approx + \frac{|s_k|^2}{\sigma^2} \exp(-j\Delta_k) \left[ h(\alpha_k) \exp\left(+j \text{sign}(\Delta_k) \frac{\pi}{L}\right) - h(\beta_k) \exp\left(-j \text{sign}(\Delta_k) \frac{\pi}{L}\right) \right]. \quad (\text{E.2})$$

Ainda será necessário realizar uma outra aproximação; para um valor suficientemente elevado do número de símbolos da constelação L-PSK é possível escrever que

$$\exp\left(\pm j \frac{\pi}{L}\right) \approx 1. \quad (\text{E.3})$$

Dessa forma, pode-se reescrever a Equação (E.2) como

$$p_k \approx +\frac{|s_k|^2}{\sigma^2} \exp(-j\Delta_k) [h(\alpha_k) - h(\beta_k)]. \quad (\text{E.4})$$

E, conforme foi visto na Prova do Teorema 1, através do Lema 1 pode-se mostrar mostrar que

$$h(\alpha_k) = \mathbb{E}_v \left[ I_k^{(\alpha)}(v) \right], \quad (\text{E.5})$$

$$h(\beta_k) = \mathbb{E}_v \left[ I_k^{(\beta)}(v) \right], \quad (\text{E.6})$$

e através da Proposição 2 obtém-se que

$$h(\alpha_k) = +\text{sign}(\Delta_k) \mathbb{E}_v \left[ \text{sign} \left( \angle \frac{s_k + v}{s_k} \right) I_k^{(\alpha)}(v) \right], \quad (\text{E.7})$$

$$h(\beta_k) = -\text{sign}(\Delta_k) \mathbb{E}_v \left[ \text{sign} \left( \angle \frac{s_k + v}{s_k} \right) I_k^{(\beta)}(v) \right]. \quad (\text{E.8})$$

Com efeito, é possível escrever que

$$p_k \approx \frac{|s_k|^2}{\sigma^2} \exp(-j\Delta_k) \text{sign}(\Delta_k) \mathbb{E}_v \left[ \text{sign} \left( \angle \frac{s_k + v}{s_k} \right) \left( I_k^{(\alpha)}(v) + I_k^{(\beta)}(v) \right) \right]. \quad (\text{E.9})$$

Novamente, utilizando o resultado da Proposição 2 obtém-se que

$$p_k \approx \frac{|s_k|^2}{\sigma^2} \exp(-j\Delta_k) \text{sign}(\Delta_k) \mathbb{E}_v [\Gamma_k(v)], \quad (\text{E.10})$$

para  $|\Delta_k| \in [0, \frac{\pi}{L}]$ .

b)  $|\Delta_k| \in (\frac{\pi}{L}, \pi - \frac{\pi}{L}]$

Utilizando o resultado do Lema 8 e as definições das variáveis  $\gamma_k$  e  $\beta_k$  é possível aproximar  $p_k$ , para o regime de elevada razão sinal-ruído,  $\frac{|s_k|^2}{\sigma^2}$ , como

$$p_k \approx +\frac{|s|^2}{\sigma^2} \exp(-j\Delta_k) \left[ +h(\gamma_k) \exp\left(+j\text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{\pi}{L}\right) - h(\beta_k) \exp\left(-j\text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{\pi}{L}\right) \right]. \quad (\text{E.11})$$

Novamente, para um valor suficientemente elevado do número de símbolos da constelação L-PSK realizaremos a seguinte aproximação

$$\exp\left(\pm j\frac{\pi}{L}\right) \approx 1. \quad (\text{E.12})$$

Dessa forma, é possível reescrever a Equação (E.11) como

$$p_k \approx +\frac{|s|^2}{\sigma^2} \exp(-j\Delta_k) [h(\gamma_k) - h(\beta_k)]. \quad (\text{E.13})$$

E, conforme foi visto na Prova do Teorema 1, através do Lema 1 pode-se mostrar mostrar que

$$h(\gamma_k) = \mathbb{E}_v \left[ I_k^{(\gamma)}(v) \right], \quad (\text{E.14})$$

$$h(\beta_k) = \mathbb{E}_v \left[ I_k^{(\beta)}(v) \right], \quad (\text{E.15})$$

e através da Proposição 2 obtém-se que

$$h(\gamma_k) = -\text{sign}(\Delta_k) \mathbb{E}_v \left[ \text{sign} \left( \angle \frac{s_k + v}{s_k} \right) I_k^{(\gamma)}(v) \right], \quad (\text{E.16})$$

$$h(\beta_k) = -\text{sign}(\Delta_k) \mathbb{E}_v \left[ \text{sign} \left( \angle \frac{s_k + v}{s_k} \right) I_k^{(\beta)}(v) \right]. \quad (\text{E.17})$$

Com efeito, é possível escrever que

$$p_k \approx \frac{|s_k|^2}{\sigma^2} \exp(-j\Delta_k) \text{sign}(\Delta_k) \mathbb{E}_v \left[ \text{sign} \left( \angle \frac{s_k + v}{s_k} \right) \left( -I_k^{(\gamma)}(v) + I_k^{(\beta)}(v) \right) \right]. \quad (\text{E.18})$$

Novamente, utilizando o resultado da Proposição 2 obtém-se que

$$p_k \approx \frac{|s_k|^2}{\sigma^2} \exp(-j\Delta_k) \text{sign}(\Delta_k) \mathbb{E}_v [\Gamma_k(v)], \quad (\text{E.19})$$

para  $|\Delta_k| \in (\frac{\pi}{L}, \pi - \frac{\pi}{L}]$ .

c)  $|\Delta_k| \in (\pi - \frac{\pi}{L}, \pi]$

Utilizando o resultado do Lema 8 e as definições das variáveis  $\gamma_k$ ,  $\beta_k$  e  $\zeta_k$  é possível aproximar  $p_k$ , para o regime de elevada razão sinal-ruído,  $\frac{|s_k|^2}{\sigma^2}$ , como

$$p_k \approx +\frac{|s|^2}{\sigma^2} \exp(-j\Delta_k) \left[ h(\gamma_k) \exp\left(+j\text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{\pi}{L}\right) - h(\zeta_k) \exp\left(-j\text{sign}(\Delta_{ik}) \frac{\pi}{L}\right) \right]. \quad (\text{E.20})$$

Novamente, para um valor suficientemente elevado do número de símbolos da constelação L-PSK realizaremos a seguinte aproximação

$$\exp\left(\pm j\frac{\pi}{L}\right) \approx 1. \quad (\text{E.21})$$

Dessa forma, é possível reescrever a Equação (E.20) como

$$p_k \approx +\frac{|s|^2}{\sigma^2} \exp(-j\Delta_k) [h(\gamma_k) - h(\zeta_k)]. \quad (\text{E.22})$$

E, conforme foi visto na Prova do Teorema 1, através do Lema 1 pode-se mostrar mostrar que

$$h(\gamma_k) = \mathbb{E}_v \left[ I_k^{(\gamma)}(v) \right], \quad (\text{E.23})$$

$$h(\zeta_k) = \mathbb{E}_v \left[ I_k^{(\zeta)}(v) \right], \quad (\text{E.24})$$

e através da Proposição 2 obtém-se que

$$h(\gamma_k) = -\text{sign}(\Delta_k) \mathbb{E}_v \left[ \text{sign} \left( \angle \frac{s_k + v}{s_k} \right) I_k^{(\gamma)}(v) \right], \quad (\text{E.25})$$

$$h(\zeta_k) = +\text{sign}(\Delta_k) \mathbb{E}_v \left[ \text{sign} \left( \angle \frac{s_k + v}{s_k} \right) I_k^{(\zeta)}(v) \right]. \quad (\text{E.26})$$

Com efeito, é possível escrever que

$$p_k \approx \frac{|s_k|^2}{\sigma^2} \exp(-j\Delta_k) \text{sign}(\Delta_k) \mathbb{E}_v \left[ \text{sign} \left( \angle \frac{s_k + v}{s_k} \right) \left( -I_k^{(\gamma)}(v) - I_k^{(\beta)}(v) \right) \right]. \quad (\text{E.27})$$

Novamente, utilizando o resultado da Proposição 2 obtém-se que

$$p_k \approx \frac{|s_k|^2}{\sigma^2} \exp(-j\Delta_k) \text{sign}(\Delta_k) \mathbb{E}_v [\Gamma_k(v)], \quad (\text{E.28})$$

para  $|\Delta_k| \in (\pi - \frac{\pi}{L}, \pi]$ .

□

# Apêndice F

## Prova do Lema 8

Nesse apêndice, demonstraremos que a seguinte aproximação é válida para o regime de elevada razão sinal-ruído,  $\text{snr} \triangleq \frac{|s|^2}{\sigma_s^2}$ ,

$$\text{snr}h(\lambda, s, \sigma) \approx \frac{\mathcal{H}(\lambda, s, \sigma)}{\sin(\lambda)}, \quad (\text{F.1})$$

onde

$$\mathcal{H}(\lambda, s, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \exp\left(-\text{snr} \frac{\sin^2(\lambda)}{\sin^2(\phi)}\right) \text{snr} \frac{\sin^2(\lambda)}{\sin^2(\phi)} d\phi, \quad (\text{F.2})$$

$$h(\lambda, s, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \exp\left(-\text{snr} \frac{\sin^2(\lambda)}{\sin^2(\phi)}\right) d\phi, \quad (\text{F.3})$$

para  $0 < \lambda < \pi$ .

*Prova:* Primeiro, escrevemos

$$\frac{\mathcal{H}(\lambda, s, \sigma)}{\sin(\lambda)} \frac{1}{\text{snr}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \exp\left(-\text{snr} \frac{\sin^2(\lambda)}{\sin^2(\phi)}\right) \frac{\sin(\lambda)}{\sin^2(\phi)} d\phi \quad (\text{F.4})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \exp\left(-\text{snr} \frac{\sin^2(\lambda)}{\sin^2(\phi)} + \ln\left(\frac{\sin(\lambda)}{\sin^2(\phi)}\right)\right) d\phi. \quad (\text{F.5})$$

Então, se é verdade que

$$\text{snr} \frac{\sin^2(\lambda)}{\sin^2(\phi)} \gg \left| \ln\left(\frac{\sin(\lambda)}{\sin^2(\phi)}\right) \right|, \quad (\text{F.6})$$

obtém-se (F.1) a partir da Equação (F.5). Portanto, resta-nos provar que a Desigualdade (F.6) é válida para o caso de elevada razão sinal-ruído.

Dessa forma, com o objetivo de mostrarmos que (F.6) é satisfeita para um valor suficientemente alto da razão sinal-ruído, distinguimos dois casos, a)  $\ln\left(\frac{\sin(\lambda)}{\sin^2(\phi)}\right) \geq 0$  e b)  $\ln\left(\frac{\sin(\lambda)}{\sin^2(\phi)}\right) < 0$ :

a)  $\ln\left(\frac{\sin(\lambda)}{\sin^2(\phi)}\right) \geq 0$ . Nesse caso, reescrevemos (F.6) da seguinte forma

$$\text{snr} \frac{\sin^2(\lambda)}{\sin^2(\phi)} \gg \ln\left(\frac{\sin(\lambda)}{\sin^2(\phi)}\right). \quad (\text{F.7})$$

Como  $x \geq e \ln(x)$ , para  $x > 0$ , tem-se

$$\text{snr} \gg \frac{1}{e \sin(\lambda)}. \quad (\text{F.8})$$

b)  $\ln\left(\frac{\sin(\lambda)}{\sin^2(\phi)}\right) < 0$ . Nesse caso, reescrevemos (F.6) da seguinte forma

$$\text{snr} \frac{\sin^2(\lambda)}{\sin^2(\phi)} \gg -\ln\left(\frac{\sin(\lambda)}{\sin^2(\phi)}\right). \quad (\text{F.9})$$

Como  $\sin^2(\phi) \leq 1$  e  $x \geq e \ln(x)$ , para  $x > 0$ , tem-se

$$\text{snr} \gg \frac{1}{e \sin^3(\lambda)}. \quad (\text{F.10})$$

□

Então, para um dado valor da razão sinal-ruído,  $\text{snr}$ , podemos utilizar (F.8) e (F.10) com objetivo de determinar os valores de  $\lambda$  para os quais a aproximação (F.1) é válida. Exemplificando, na Tabela F.1 apresentamos os valores de  $\lambda$  que satisfazem (F.8) e (F.10) para dois valores diferentes da razão sinal-ruído,  $\text{snr}$ .

snr	$\lambda$
10	[21°, 134°]
50	[4°, 155°]

Tabela F.1: Valores de  $\lambda$  que satisfazem (F.8) e (F.10) para  $\text{snr} = 10$  e  $\text{snr} = 50$ .

Finalmente, nas Figuras F.1 e F.2 avaliamos qualitativamente a aproximação descrita pela Equação (F.1). Em particular, observamos que quando  $\text{snr} = 50$  as duas curvas apresentam um comportamento aproximadamente idêntico.



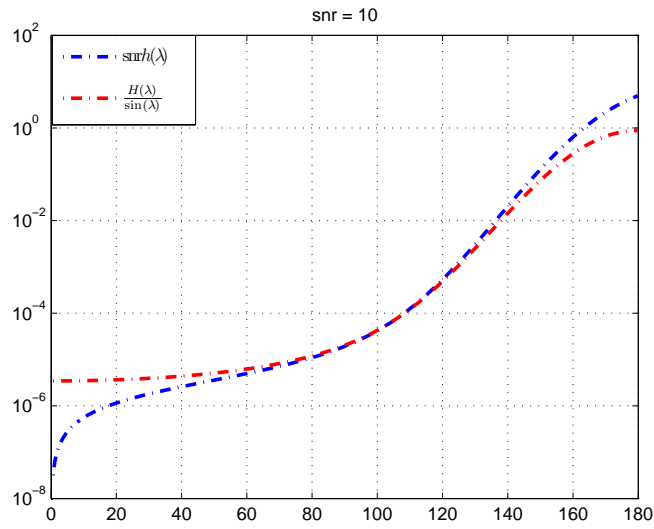


Figura F.1: Comparação entre  $\text{snrh}(\lambda, s, \sigma)$  e  $\frac{\mathcal{H}(\lambda, s, \sigma)}{\sin(\lambda)}$  para  $\text{snr} = 10$ .

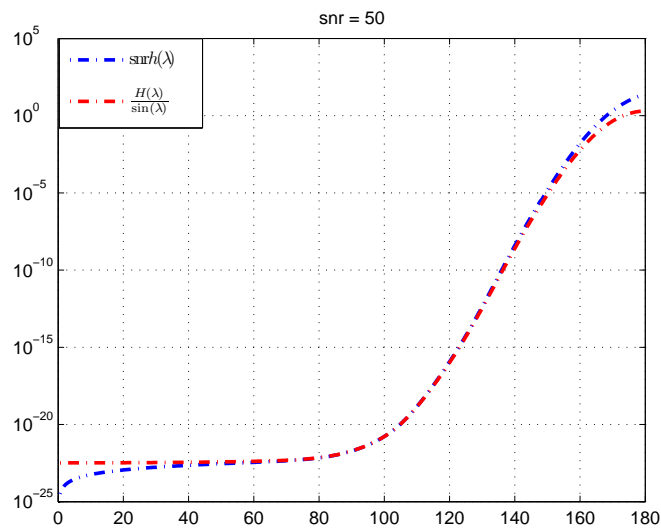


Figura F.2: Comparação entre  $\text{snrh}(\lambda, s, \sigma)$  e  $\frac{\mathcal{H}(\lambda, s, \sigma)}{\sin(\lambda)}$  para  $\text{snr} = 50$ .