

CONTROLE ÓTIMO DESCENTRALIZADO A DOIS PARÂMETROS PARA
MANCAIS-MOTORES MAGNÉTICOS

Leonardo Sodré Rodrigues

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

Prof. Afonso Celso Del Nero Gomes, D.Sc.

Prof. Domingos de Farias Brito David, D.Sc.

Prof. Paulo Lúcio Silva de Aquino, D.Sc.

Prof. Fernando Cesar Lizarralde, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 2005

SODRÉ RODRIGUES, LEONARDO

Controle Ótimo Descentralizado a
Dois Parâmetros para Mancais-Motores
Magnéticos [Rio de Janeiro] 2005

X, 133p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Elétrica, 2005)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Controle Descentralizado
2. Regulador Linear com Restrições
3. Regulador Linear Quadrático
4. Mancais-Motor Magnético
5. Mancais Magnético

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Dedicatória

Eu dedico esta tese aos meus amados pais, William Rodrigues e Guilhermina Maria Sodré Rodrigues, e acima de tudo, ao Senhor Jesus Cristo, Mestre da Humanidade. ¹

¹“Pedi, e dar-se-vos-á; buscai, e encontrareis; batei, e abrir-se-vos-á. Porque, aquele que pede, recebe; e o que busca, encontra; e, ao que bate, abrir-se-lhe-á.” (Mat. 7:7, 8)

Agradecimentos

Eu agradeço acima de tudo a Deus e ao Cristo, amigo fiel de todas as horas, cujo amor incondicional e ensinamentos plenos de sabedoria e humildade foram a minha fonte de inspiração ao longo da caminhada.

Ao meu pai William Rodrigues, a minha mãe Guilhermina Maria Sodré Rodrigues pelo amor e dedica o, e   minha irmã Giovanna Sodré Rodrigues por suas palavras de perseverança e determina o.

Aos meus professores de gradua o do CEFET/RJ pela confiança e apoio e, em especial, ao professor Paulo Lúcio Silva de Aquino, exemplo de profissional e de ser humano, e que sem d vida foi um dos percussores do meu interesse pela pesquisa científica.

Aos meus professores de mestrado da COPPE/UFRJ, em especial, ao meu orientador professor Afonso Celso Del Nero Gomes pelo apoio, interesse e profissionalismo dedicados   orienta o desta tese.

Ao professor Domingos de Farias Brito David por sua tese de doutorado, que atuou como uma das fontes de pesquisa utilizadas para o desenvolvimento desta tese de mestrado.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CONTROLE ÓTIMO DESCENTRALIZADO A DOIS PARÂMETROS PARA MANCAIS-MOTORES MAGNÉTICOS

Leonardo Sodré Rodrigues

Abril/2005

Orientador: Afonso Celso Del Nero Gomes

Programa: Engenharia Elétrica

Uma nova abordagem ao controle de posição de um rotor acionado por mancais-motores é descrita. Inicialmente, são apresentados o controle ótimo baseado no regulador linear quadrático (LQR), que favorece uma estrutura de controle centralizado, e um controle sub-ótimo onde é imposta uma restrição ao controlador que favorece uma estrutura de controle descentralizado. Estas abordagens visam minimizar um índice de desempenho ao gerar uma lei de controle onde a matriz de ganhos do controlador é empregada na realimentação dos estados do sistema. Posteriormente é apresentado o novo método de controle que consiste em se impor uma restrição adicional à restrição anterior, propor uma função custo independente dos estados iniciais do sistema e desenvolver um algoritmo gerador dos ganhos de realimentação, baseado nas condições necessárias de otimalidade do problema associado. O Sistema a ser controlado é composto por dois mancais-motores magnéticos (responsáveis pela geração simultânea de forças radiais e torque), sensores (responsáveis pela aferição de deslocamentos do rotor em relação à posição de equilíbrio) e por um mancal axial responsável pela levitação do rotor. As propriedades dos mancais são empregadas na análise dinâmica do sistema responsável pela geração do modelo a ser controlado.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

TWO PARAMETERS DECENTRALIZED OPTIMAL CONTROL FOR MAGNETIC MOTOR BEARINGS

Leonardo Sodré Rodrigues

April/2005

Advisor: Afonso Celso Del Nero Gomes

Department: Electrical Engineering

A new method for position control of a vertical rotor driven by motor-bearings is described. Classical solutions based on the linear quadratic regulator (LQR), which present a centralized control structure, and sub optimal laws with a decentralized control structure are presented. Both methods aim at the minimization of a performance index by the generation of a control law where the controller gain matrix is used on the system state feedback. Subsequently a new control method is introduced. It consists in a particularization of the classical decentralized law. The plant to be controlled is composed by two magnetic motor-bearings (responsible by simultaneous generation of radial forces and torque), sensors (responsible by rotor displacement measurement related to an equilibrium position) and by an axial bearing responsible by rotor levitation which is reached thanks to an diamagnetic repulsive force between superconductive blocks and magnets placed on the rotor extremity. The bearings properties are used on the system dynamic analysis responsible by generation of the model to be controlled.

Sumário

Dedicatória	iii
Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
1.1 Mancais Magnéticos	1
1.2 Mancais-Motores Magnéticos	7
1.3 Estrutura do Trabalho.	9
2 O Mancal Magnético	12
2.1 Introdução	12
2.2 Funcionamento de um Mancal Magnético.	13
2.3 Geração da Força de Relutância.	13
2.4 Operação em Modo Diferencial.	15
3 Modelagem do Mancal-Motor	19
3.1 Introdução	19
3.2 O Motor de Indução	19
3.3 Apresentação do Mancal-Motor	23
3.4 Correntes de Magnetização no Núcleo	26
3.5 Geração dos Fluxos Magnéticos	28
3.6 Geração das Forças de Relutância	30
4 Análise Dinâmica do Rotor	35
4.1 Introdução	35
4.2 O Mancal Axial	36
4.3 Dinâmica do Rotor	36
5 Controle do Rotor	43
5.1 Introdução	43
5.2 Modelo Matemático do Sistema	43

5.3	Controle Centralizado	45
5.3.1	Exemplos	47
5.4	Controle Descentralizado	50
5.4.1	Algoritmo para o Caso Descentralizado	55
5.4.2	Exemplos	56
6	Controle Descentralizado a Dois Parâmetros	60
6.1	Introdução	60
6.2	Estabilização por Lei PD_{2p}	61
6.2.1	Exemplos	62
6.3	Regulador Linear Quadrático	65
6.3.1	Regulador Linear com Restrições no Controle	66
6.4	Controle Ótimo PD_{2p} - Caso I	68
6.4.1	Aspectos Matemáticos Preliminares	69
6.4.2	Cálculo do Gradiente Matricial	70
6.4.3	Condições Necessárias de Otimalidade	74
6.4.4	Busca da Solução	78
6.4.5	Conclusões	83
6.5	Controle Ótimo PD_{2p} - Caso II	83
6.5.1	Cálculo das Derivadas Parciais	87
6.5.2	Condições Necessárias de Otimalidade	91
6.5.3	Resultados sobre a convergência do algoritmo	94
6.5.4	Exemplos	95
7	Simulações	101
7.1	Introdução	101
7.2	Sistema Acadêmico	101
7.3	Sistema Real	102
7.4	Simulação	103
7.5	Conclusões	108
8	Conclusões do Trabalho e Propostas para Novos Trabalhos	109
	Apêndices	111
A	Programa de Controle Ótimo LQR: Exemplo 5.1	111
B	Programa de Controle Ótimo LQR: Exemplo 5.2	112
C	Programa de Controle Ótimo Descentralizado: Exemplo 5.3	115
D	Programa de Controle Ótimo Descentralizado: Exemplo 5.4	118
E	Programa de Geração de Pontos do Domínio de Estabilidade no Espaço de Parâmetros (p,d): Exemplos 6.1 e 6.2	123
F	Programa de Controle Ótimo PD_{2p} - Caso II: Exemplos 6.3 e 6.4	127
	Referências Bibliográficas	131

Lista de Figuras

2.1	Mancal Magnético Ativo Simples.	13
2.2	Força de Atração em um Eletroímã	14
2.3	Posicionamento Horizontal do Rotor	16
2.4	Posicionamento do Rotor no Plano xy.	18
3.1	Enrolamento de um Estator Trifásico a Dois Pólos.	20
3.2	Correntes Trifásicas Instantâneas.	21
3.3	Vista Seccional de um Motor de Indução Trifásico.	21
3.4	Enrolamentos do Estator na Configuração de Duas Fases e Quatro Pólos.	23
3.5	Esquema Elétrico Simplificado do Mancal-Motor.	24
3.6	Circuito Elétrico por Fase.	26
3.7	Circuito Magnético da Geração de Fluxo Magnético no Pólo Direito.	29
4.1	Foto e Esquema em Corte do Protótipo.	35
4.2	Esquema das Partes Estática e Dinâmica do Mancal Axial.	36
4.3	Representação Esquemática do Rotor	37
4.4	Esquema do Sistema nos Planos xz e yz.	39
5.1	Técnica de Controle LQR Centralizado para Realimentação de Estados.	47
6.1	Região Delimitadora de Matrizes PD_{2p} Estabilizadoras para o Exemplo 6.1	63
6.2	Região Delimitadora de Matrizes PD_{2p} Estabilizadoras para o Exemplo 6.2	64
7.1	Simulação sobre a Aplicação da Lei de Controle LQR - Exemplo Acadêmico.	104
7.2	Simulação sobre a Aplicação da Lei de Controle Descentralizado ótimo - Exemplo Acadêmico.	104
7.3	Simulação sobre a Aplicação da Lei de Controle PD_{2p} ótimo - Exemplo Acadêmico.	105
7.4	Simulação sobre a Comparação das Leis de Controle - Exemplo Acadêmico.	105
7.5	Simulação sobre a Aplicação da Lei de Controle LQR - Exemplo Real.	106
7.6	Simulação sobre a Aplicação da Lei de Controle Descentralizado ótimo - Exemplo Real.	106
7.7	Simulação sobre a Aplicação da Lei de Controle PD_{2p} ótimo - Exemplo Real.	107

Capítulo 1

Introdução

1.1 Mancais Magnéticos

Ao se aplicar torque a um rotor é necessário também aplicar forças de posicionamento para eliminar possíveis movimentos perpendiculares e/ou transversais à direção do seu eixo. Classicamente, o método consiste em se dispor mancais mecânicos, radialmente e transversalmente ao eixo do rotor.

A teoria de conversão eletromecânica de energia, bem como as crescentes necessidades do meio industrial, sugeriu o emprego de dispositivos eletromagnéticos na geração de forças que eliminam os movimentos indesejados de eixos em rotação. Estas forças são obtidas através de injeção de tensões ou correntes em eletroímãs dispostos de forma conveniente ao longo do eixo do rotor e os dispositivos capazes de gerá-las são chamados de mancais magnéticos. As tensões ou correntes injetadas dependem da velocidade e da posição do rotor, medidas por sensores ou estimadas, e isto evidencia a necessidade de um sistema de controle ativo para o funcionamento dos mancais magnéticos.

A pesquisa sobre mancais magnéticos em geral, e sobre o seu controle, tem sido bastante intensa nas duas últimas décadas e isto pode ser percebido pela existência de livros e de edições especiais de revistas sobre o assunto, como por exemplo (Schweitzer, Bleuler & Traxler 1994, Knospe & Collins 1996) e outros.

Os mancais magnéticos convencionais são caracterizados por modelos não-lineares e seu controle pode ser feito por estratégias lineares e não-lineares, desde as clássicas, como por exemplo um simples PID, até as mais modernas. Segue uma breve resenha

comentada da literatura.

Na tese de doutorado de (Bleuler 1984) é descrito um controle descentralizado para mancal magnético. No livro de (Schweitzer et al. 1994) são apresentadas as técnicas de controle centralizado e descentralizado de posição para um mancal magnético tradicional.

Em (Ahrens, Kucera & Larsonneur 1996) se mostra um volante armazenador de energia cinética suspenso magneticamente. Dispositivos deste tipo com mancais magnéticos se revelam menores e com boas aplicações em velocidades elevadas. Os volantes apresentam alto acoplamento giroscópico que, associado à sua natureza não-linear, propicia a instabilidade e queda de desempenho. São apresentadas três abordagens para o controlador: o controle descentralizado por meio de um PD, o controle centralizado por meio de um LQR de ganho fixo e o controle por realimentação cruzada.

No artigo de (Rundell, Drakunov & Decarlo 1996) se estuda um controlador e observador por modo deslizante para a estabilização de um mancal magnético de eixo vertical. O controle fornece estabilização e rastreamento ao sistema e o observador estima perturbações (oriundas do desbalanceamento) e estados deste; a técnica de modo deslizante favorece a robustez na presença de incertezas e distúrbios. Inicialmente é proposto um controlador a estrutura variável e em seguida é fornecida a descrição do modelo. Prossegue-se com o desenvolvimento do controlador por modo deslizante e a apresentação de simulações e da discussão sobre realimentação de estados completa. Por fim, é apresentada a dinâmica do observador a estrutura variável e a simulação da dinâmica do controlador e observador.

O artigo de (Lum, Coppola & Bernstein 1996) descreve o controle autocentralizador adaptativo para um mancal magnético ativo suportando um rotor com desbalanceamento de massa desconhecido. Este método de controle visa compensar a força gerada pelo desbalanceamento rotórico através da identificação on-line das características físicas do desbalanceamento (localização do centro de massa e dos eixos principais de inércia) e utilização destas no ajuste do controlador, mediante uma lei de controle previamente definida que promova a rotação do rotor considerado rígido, sob seu eixo principal de inércia e centro de massa. Esta técnica distoa das tradicionais como a compensação de desbalanceamento adaptativo por feedforward (desbalanceamento considerado como ruído ou perturbação externa a ser cancelado por sinal de

referência síncrono) ao se revelar independente da taxa de giro do rotor. No artigo, inicialmente se modela um mancal magnético e em seguida são apresentados o controle autocentralizador conhecido, bem como o controle autocentralizador adaptativo.

Em (Herzog, Bühler, Gähler & Larssonneur 1996) busca-se a compensação de desbalanceamento através da utilização de filtros Notch na realimentação multivariável de mancais magnéticos. Uma das principais consequências do desbalanceamento do rotor é o aparecimento de vibrações síncronas neste, acarretando a saturação do atuador. A solução apresentada neste artigo se dá pela inserção de um filtro notch generalizado de banda estreita, no loop da realimentação multivariável sem promover alteração de sua estabilidade e mantendo a liberdade de projeto do controlador. O filtro é projetado através de uma matriz de sensibilidade inversa estritamente relacionada à velocidade rotacional, de forma a manter a estabilidade e a resposta a transitórios. Para sistemas com pequeno efeito giroscópico a melhor opção é o filtro descentralizado. No artigo são apresentados filtros notch multivariáveis generalizados, abordando-se a compensação por feedforward, por filtro notch e o emprego de um passo de modulação dupla no filtro. Depois se analisa a estabilidade da malha fechada e os projetos do filtro acoplado e do descentralizado. Por fim são apresentados resultados experimentais.

O artigo de (Charara, DeMiras & Caron 1996) descreve o controle não-linear de um sistema de levitação magnética sem o emprego de pré-magnetização. Ao contrário da tradicional obtenção de um modelo linear por meio da pré-magnetização dos mancais através de uma corrente bias, neste artigo é proposto um modelo altamente não-linear do mancal magnético ativo, bem como uma lei de controle não-linear baseada na linearização entrada-saída para o modelo. Este controle não-linear, comparado ao linear, revelou melhorias significativas no consumo de energia e na resposta ao desbalanceamento (sem estimação de perturbação). Esta lei não-linear implementada por meio de um método de controle por modo deslizante atuou de forma a proporcionar maior robustez ao controlador; a dificuldade é a validação da condição de deslizamento e a alta frequência de amostragem. Inicialmente foram apresentados métodos de desbalanceamento como os métodos baseados em observadores, filtros notch, controle de aprendizado iterativo, mancais magnéticos de auto-sensoriamento, controle por modo deslizante, etc. A seguir apresentou-se o funcionamento não-linear do mancal magnético, o dispositivo experimental empregado e o modelo obtido por Lagrange.

Posteriormente foram apresentadas a lei de controle baseada na linearização de entrada-saída, e a de modo deslizante e por último os resultados experimentais e de simulação.

O trabalho de (Lévine, Lottin & Ponsart 1996) descreve uma abordagem não-linear para o controle de mancais magnéticos. Ao contrário das técnicas clássicas como a linearização tangencial por correntes de pré-magnetização, neste artigo são levados em conta os aspectos não-lineares do modelo. Foi empregada a uniformidade diferencial, que transforma os problemas de integração de equações diferenciais em problemas meramente algébricos por meio da parametrização das curvas a serem seguidas pelo sistema. A síntese da realimentação (realizada por meio de um observador de velocidade) foi proposta tanto para o controle por corrente quanto para o controle por tensão. No caso de controle por tensão, o controlador operou sob um esquema de controle hierárquico que teve como objetivo evitar tensões não limitadas nos comutadores. Inicialmente, promoveu-se a análise e controle de uma esfera disposta entre um par de eletroímãs e depois se fez a generalização para um eixo geral onde foram analisados a modelagem, controle por corrente e hierárquico. Por fim obteve-se a implementação mediante o observador e o controle digital e o fornecimento dos resultados experimentais.

Em (DeQueiroz & Dawson 1996) descreve-se o controle não-linear de mancais magnéticos ativos mediante uma abordagem de backstepping. Para um disco rotórico planar foi obtido um modelo não-linear; o sistema eletromecânico do mancal foi subdividido na dinâmica do subsistema mecânico, na relação de transmissão de força e na dinâmica do subsistema elétrico. Empregou-se um modelo de enlace de fluxo para se computar a força produzida pelas fases elétricas. Em seguida projetou-se uma trajetória de força desejada afim de se rastrear a posição do rotor a uma trajetória desejada e pela relação de transmissão de força desenvolveu-se uma equação estática que assegura que a força desejada seja entregue ao subsistema mecânico. O rastreamento exponencial global do rotor é realizado por meio de uma função de Lyapunov.

O artigo de (Knospe, Fedigan, Hope & Williams 1997) apresenta uma implementação multitarefa via DSP do controle adaptativo de mancal magnético. O controle se dá mediante algoritmos adaptativos de controle de vibração síncrona on-line a serem implementados em um DSP de ponto flutuante e executados em um sistema de operação em tempo real que permite que os algoritmos de controle por realimentação e de controle adaptativo de vibração sejam executados como tarefas diferentes. Inicialmente se

apresenta a estrutura de um mancal magnético típico e o controle adaptativo a malha aberta deste, onde se nota a atenuação da resposta ao desbalanceamento. Prossegue-se apresentando-se algoritmos adaptativos com controle e estimação simultânea (controle equivalente de certeza global com estimação por mínimos quadrados) e o controle convergente (algoritmo do modelo local e algoritmo do modelo local com planejamento de ganho). Por fim é apresentado o controlador digital, o sistema de operação em tempo real multitarefa e os resultados experimentais.

(Zhuravlyov 2000) apresenta em seu artigo o controle linear quadrático (LQ) de mancais magnéticos. Ele apresenta um sistema de mancal magnético de segunda ordem e outro de quarta ordem, bem como soluções em forma fechada para o problema de otimização linear quadrática (LQ). O controlador obtido atua de forma a minimizar as perdas nas bobinas gerando forças otimizadas no mancal. Inicialmente, é apresentado o sistema com um grau de liberdade, depois o sistema de cinco graus de liberdade e a análise pelo método de Van der Pol. Prossegue-se com resultados numéricos e experimentais e finaliza-se com a simplificação do controlador através de sua descentralização que implica na deteriorização do desempenho do sistema.

(Lindlau & Knospe 2002) mostram em seu artigo a linearização da lei de controle de um mancal magnético ativo com controle por tensão. É apresentado um controlador desenvolvido para um dispositivo de teste de mancal magnético de um grau de liberdade, com controle por tensão. Para este fim é desenvolvido um modelo dinâmico não-linear do eletroímã e feita uma comparação do sistema linearizado por realimentação teórico com o experimental, que revelou concordância entre ambos. Isto revela a eficiência do controlador em transformar um sistema não-linear em uma planta linear. Foi então proposto um controlador μ para o sistema linearizado. No artigo, inicialmente é apresentado um dispositivo de teste com um grau de liberdade. Prossegue-se com a modelagem do atuador do eletroímã, com o modelo dinâmico e a derivação do controlador por realimentação de linearização. São analisadas a incorporação da dinâmica da trave do dispositivo na realimentação da planta linearizada, a incerteza da resistência da bobina (erro de baixa frequência) e a validação do modelo dinâmico do eletroímã. Por fim é exposto o projeto de um controlador de alto desempenho para a realimentação da planta linearizada, bem como os resultados experimentais do controle μ .

Em (Chang & Chen 2002) é desenvolvido um controle de rastreamento adaptativo

para sistemas não holonômicos, para uma planta com incertezas e sujeita a perturbações externas, a ser realizado mediante as realimentações dos estados (posição e velocidade do rotor) e da saída (posição do rotor). As leis de controle são projetadas de modo a forçar o sistema a rastrear coordenadas generalizadas e assegurar que estas convergem de forma assintótica a um conjunto desejado de dimensão m (na presença de m restrições não-holonômicas ideais). Isto é feito por controladores com leis de atualização de parâmetro para as realimentações de posição e estados locais. Inicialmente é definido o problema, exposto o projeto dos controladores de rastreamento adaptativo, por realimentação de estado e por realimentação de posição. Por fim são apresentados exemplos de simulação.

No artigo de (Fittro & Knospe 2002) se analisa o controle μ de mancais magnéticos ativos, controlando a posição de rotores flexíveis. A solução apresentada é baseada em síntese μ . É feita uma comparação entre um PD otimizado e o controlador μ donde se conclui um melhor desempenho do último, e a necessidade de um modelo preciso e com representação de incerteza, sendo que no caso do controlador μ tem-se a necessidade de melhoria de ganho. É feito um breve estudo acerca da estrutura de um mancal magnético ativo e da síntese μ aplicada a este. Prossegue-se com a modelagem dos componentes do sistema, a representação de incerteza destes e com o projeto do controlador (o proporcional derivativo e o gerado por síntese μ). Por fim, é realizada uma comparação teórica entre o controlador gerado por síntese μ e o PD e apresentados resultados experimentais.

(Hsu & Chen 2002) descrevem a linearização exata de um mancal magnético ativo de três pólos controlado por tensão. Ao se substituir o mancal magnético de oito pólos tradicionalmente empregado pelo de três pólos, observa-se alta não-linearidade no sistema (efeito do acoplamento do fluxo magnético) e aumento na complexidade deste ao se adicionar a dinâmica do atuador. Nota-se também a redução na perda de potência e no número de amplificadores de potência que cai de quatro (mancal de oito pólos) para dois. Para se reduzir a complexidade, emprega-se um controle por tensão e se modela o sistema através de equações de estado não-lineares quadráticas considerando dentre as variáveis de estado, os fluxos magnéticos. O projeto do controlador é baseado no fato de o sistema ser linearizado por realimentação e se dá pela análise de Lyapunov. No artigo apresenta-se o modelo matemático e a descrição do sistema mediante a análise do

circuito magnético, da dinâmica do atuador e rotor e obtenção das equações de estado. Prosseguiu-se com a linearização por realimentação para o projeto do controlador e concluiu-se com os resultados de simulação.

1.2 Mancais-Motores Magnéticos

Recentemente, há um interesse cada vez maior, pela comunidade acadêmica, (Salazar & Stephan 1993, Chiba, Deido & Rahman 1994, Schob & Bichsel 1994, Santisteban, David, Noronha, Ripper & Stephan 1997, David, Stephan, Ripper, Júnior, Gawalek, Habisreuther & Strasser 1999, Salazar, Chiba & Fukao 2000, Santisteban, David, Stephan, Ripper, Júnior, Pereira & Nicolsky 2000, David, Gomes, Santisteban, Ripper, Júnior & Nicholsky 2000, David 2000), por um dispositivo eletromagnético, denominado mancal-motor, que funciona simultaneamente como motor elétrico e como mancal magnético.

A seguir faremos uma breve descrição sobre alguns dos artigos citados acima.

O artigo de (Salazar & Stephan 1993) apresenta um motor de indução sem mancal que usa enrolamentos padrão. As suposições teóricas são testadas experimentalmente em uma máquina de duas fases e quatro pólos. Desvios radiais menores que 0.5 mm a velocidades de 4000 rpm foram alcançadas durante os testes iniciais de laboratório e mostraram que o sistema opera corretamente.

No artigo de (Chiba et al. 1994) diversos tipos de mancais-motores AC são propostos. Estes mancais-motores possuem enrolamentos de estator a quatro pólos convencionais e enrolamentos a dois pólos adicionais, cujas correntes produzem forças radiais atuando no rotor. Os motores de teste foram acionados com sucesso pelos circuitos de controle, validando a proposta do artigo.

A linha de pesquisa seguida por (Schob & Bichsel 1994) e (Chiba et al. 1994) se concentra na técnica de bobinas separadas para mancais-motores, onde cada uma apresenta finalidades específicas de geração de torque e de posicionamento radial.

O artigo de (David et al. 1999) trata de um mancal axial passivo supercondutor desenvolvido para uma máquina de indução com um rotor vertical e dois mancais-motores radiais, resultando em um sistema de levitação completo. Este protótipo foi projetado com base em um anterior desenvolvido por Salazar e Stephan que era composto por

uma máquina de indução de duas fases e quatro pólos usando os enrolamentos de um motor padrão. Cada mancal-motor radial mede quatro posições do eixo através de sensores de correntes parasitas alocados a cada 90 graus. A levitação foi obtida através de ímãs permanentes NdFeB e de YBCO. O material YBCO foi caracterizado medindo as forças de levitação e mapeando o campo magnético remanescente com sondas Hall. A estabilidade radial é modelada e discutida.

No trabalho de (Salazar et al. 2000) é apresentada uma revisão da técnica de bobinas separadas para mancais-motores e é proposta a opção do emprego do mesmo enrolamento para o torque e posicionamento. (Santisteban et al. 2000) descreve o projeto de um mancal híbrido supercondutor-eletromagnético para máquinas de indução. Este sistema alcançou uma velocidade de giro de 6300 rpm.

Uma possível maneira de se conseguir mancais-motores — utilizada nos protótipos da COPPE/UFRJ — envolve o rearranjo dos enrolamentos de um motor de indução.

Nos protótipos em estudo, motores de indução convencionais, trifásicos, tiveram seus enrolamentos alterados para que passassem a funcionar como motores bifásicos de 04 pólos. Maiores detalhes serão revistos mais adiante.

De modo geral, o trabalho com mancais-motores é bastante complicado, porque envolve o controle de posição e de velocidade angular do rotor. Assim como no caso dos mancais convencionais, os modelos são não-lineares.

A literatura sobre mancais-motores é escassa, e as primeiras tentativas parecem se concentrar em controlar apenas a posição radial do rotor, supondo que ele gira a uma velocidade angular constante obtida por um método qualquer. As tentativas de controlar simultaneamente velocidade angular e posição radial ainda estão em um estágio bastante preliminar (Júnior 2005).

Neste trabalho a palavra controle significará controle apenas de posição radial do rotor. Para facilitar o entendimento pode-se imaginar que o rotor é inicialmente mantido em posição por meio de calços mecânicos. Nesta situação ele é acelerado do repouso até uma velocidade angular de regime, quando os calços são soltos e o controle (de posição) passa a atuar.

Nos mancais magnéticos tradicionais, e também nos mancais-motores, o controle é comumente feito por realimentação de estados. Para o presente trabalho, a aplicação das técnicas LQR tradicionais (Athans & Falb 1966, Anderson & Moore 1971, Zhou,

Doyle & Glover 1995, Gomes 1999) fornece uma matriz de realimentação (4×8), composta de 32 ganhos. Esta abordagem clássica de controle, baseada na técnica de controle centralizado (David 2000), tem como vantagem o fato de gerar uma solução única e ótima e a desvantagem de produzir uma matriz de ganhos cheia (poucos elementos nulos).

A segunda abordagem envolve uma técnica de controle descentralizado, e visa impor a presença de elementos nulos na matriz de realimentação (Bleuler 1984, Schweitzer et al. 1994, David 2000). Ela apresenta a vantagem de diminuir a carga computacional do algoritmo de controle graças à presença de elementos nulos na matriz de realimentação, dando a ela uma estrutura mais esparsa. Algumas desvantagens desta técnica são a geração de uma ou mais soluções sub-ótimas e a perda (aceitável) de eficiência do controle no que se refere à otimalidade. Ela tem características de controle PD, já que cada variável de controle depende somente de uma posição e de sua derivada.

Neste trabalho será apresentada uma nova abordagem de controle descentralizado, de maior facilidade de implementação e que representa uma particularização da técnica descentralizada acima. Esta nova técnica mantém as propriedades da anterior, exceto na nova restrição da matriz de realimentação que é composta por duas sub-matrizes de dimensões iguais (4×4), sendo que uma é responsável pelo ganho do proporcional e a outra pelo ganho do derivativo. A sub-matriz do proporcional é da forma pI , e a sub-matriz do derivativo é da forma dI . Isto gera uma perda de eficiência quando comparado ao controle PD descentralizado com oito coeficientes distintos, e ao centralizado com trinta e dois coeficientes distintos, fato este compensado pelo aumento de simplicidade na implementação.

1.3 Estrutura do Trabalho.

No capítulo dois é apresentado um breve estudo sobre o mancal magnético, que servirá de base para o funcionamento do mancal-motor magnético a ser detalhado posteriormente. De início são apresentados, de maneira sucinta, os diferentes tipos de mancais empregados na eliminação dos movimentos transversais dos eixos, destacando-se os mancais associados às forças de relutância (mancais magnéticos) explicitando-se

suas vantagens e aplicações frente aos mancais de contato (mecânicos). Em seguida é apresentado o esquema básico de funcionamento de um mancal magnético tradicional e descrita a participação de cada componente nele envolvido. Apresenta-se então o princípio de geração da força de relutância em um eletroimã a fim de se obter a expressão da força de atração resultante. Por último descreve-se a operação em modo diferencial, e também a linearização da relação entre força e corrente, inicialmente para o posicionamento horizontal do rotor e em seguida para o posicionamento no plano xy .

O capítulo três descreve os detalhes da modelagem dos mancais-motores utilizados no protótipo em estudo, com o objetivo de se obter as expressões matemáticas relativas às forças radiais de restauração. Inicia-se com uma breve revisão sobre o motor de indução, para se ter uma boa compreensão acerca da construção e funcionamento do mancal-motor. Em seguida é feita a apresentação deste, a sua construção a partir dos enrolamentos do estator de um motor de indução trifásico, e os seus dois modos de funcionamento (motor elétrico e mancal-motor). Por fim, são apresentadas a geração das correntes de magnetização, dos fluxos magnéticos associados e das forças de relutância necessárias à manutenção do rotor na posição central, que se encontram diretamente relacionadas aos dois conceitos anteriores.

No capítulo quatro há uma rápida descrição do mancal axial supercondutor, empregado na sustentação vertical do rotor. Posteriormente promove-se a análise dinâmica do rotor, baseada nos detalhes apresentados no capítulo três e nas propriedades do mancal axial, a fim de se gerar as equações dinâmicas do rotor levitante. Estas armazenam informações acerca das forças de natureza elétrica (mancal-motor), elástica e de amortecimento (mancal axial) e são necessárias para o controle de posição do rotor, analisado posteriormente.

O capítulo cinco expõe e compara as técnicas de controle centralizado (baseado na teoria clássica do regulador linear quadrático) e descentralizado (controle com restrições) empregadas na estabilização do rotor. Apresenta-se o modelo matemático do sistema, escrito a partir da forma canônica da equação dinâmica do rotor levitante vista no capítulo precedente. Em seguida são apresentadas as técnicas de controle centralizado e descentralizado e dois exemplos relacionados a cada uma destas: um acadêmico e outro gerado a partir dos parâmetros físicos e geométricos do protótipo estudado. Estes exemplos visam uma melhor compreensão das técnicas e servem de base

de comparação entre estas. Para o caso descentralizado são apresentadas as condições necessárias de otimalidade e um algoritmo de obtenção dos ganhos de realimentação, baseado nelas.

O capítulo seis tem como objetivo apresentar uma nova técnica de controle descentralizado, a geração de suas condições necessárias de otimalidade e algoritmos para implementá-las. Nesta nova abordagem, impõe-se à matriz de realimentação de estados uma estrutura ainda mais particularizada, onde cada partição depende somente de um parâmetro. O novo problema de controle é apresentado inicialmente para o caso em que a função custo depende dos estados iniciais; as condições necessárias de otimalidade associadas e o algoritmo associado apresentam problemas de implementação. Por fim tem-se a eliminação da dependência dos estados iniciais, gerando assim um novo problema de otimização, novas condições e um novo algoritmo, desta vez operacional.

Simulações para o sistema acadêmico e o sistema real são apresentados no capítulo sete, bem como breves comparações sobre as diversas estratégias de controle usadas.

No capítulo oito seguem as conclusões relativas ao trabalho e sugestões para novos trabalhos.

Capítulo 2

O Mancal Magnético

2.1 Introdução

Eixos girando estão sujeitos a movimentos em direções transversais, que devem ser anulados pelo emprego de mancais. Estes mancais podem ser de contato (mecânicos), ou magnéticos. Neste tipo, eletroímãs são empregados na geração de forças que atuam no sentido de manter o rotor posicionado no seu ponto de operação.

Os dispositivos magnéticos são classificados em dois grandes grupos, associados aos dois tipos básicos de força : a de relutância e a de Lorentz. Estes grupos são denominados mancais eletromagnéticos e mancais eletrodinâmicos, respectivamente, e ambos exercem forças controladas de maneira ativa, ou seja, mediante um sistema de controle. No presente trabalho os mancais estudados serão eletromagnéticos. As referências básicas estão em (Schweitzer et al. 1994).

Os mancais magnéticos, inicialmente empregados em laboratórios de centros de pesquisa, já apresentam boa difusão e aplicação no meio industrial, graças às suas vantagens em relação aos mancais mecânicos. Dentre estas podemos citar:

1. Operação livre de contato e conseqüentemente de atrito.
2. Ausência da necessidade de lubrificação.
3. Possibilidade de operação em altas velocidades.
4. Menor custo de manutenção.
5. Possibilidade de excitar vibrações no rotor, para se identificar suas características.

Dentre as aplicações possíveis estão o controle e amortecimento de vibrações de centrífugas e turbomáquinas, posicionamento de máquinas operatrizes em grandes velocidades, o uso sem contaminação em técnicas de sala limpa ou a vácuo, e várias outras.

Existem inúmeras abordagens possíveis de controle para sistemas de mancal magnético, podendo-se citar: (Schweitzer et al. 1994, Ahrens et al. 1996, Bleuler 1984, Rundell et al. 1996, Lum et al. 1996, Herzog et al. 1996, Charara et al. 1996, Lévine et al. 1996, DeQueiroz & Dawson 1996, Knospe et al. 1997, David 2000, Zhuravlyov 2000, Lindlau & Knospe 2002, Chang & Chen 2002, Fittro & Knospe 2002, Hsu & Chen 2002).

2.2 Funcionamento de um Mancal Magnético.

O funcionamento do mancal magnético tradicional serve de base teórica para a construção de um dispositivo eletromagnético mais poderoso e complexo que exerce simultaneamente aplicação de torque e posicionamento, como se verá no próximo capítulo.

Os componentes envolvidos no funcionamento de um mancal magnético simples são o eletroímã, responsável pela geração das forças de restauração, o rotor a ser posicionado, o sensor empregado na aferição dos deslocamentos, o controlador responsável pela geração do sinal de controle e um amplificador de potência que transforma o sinal de controle em uma corrente, ou tensão, de controle a ser injetada no eletroímã. O esquema segue representado na figura 2.1.

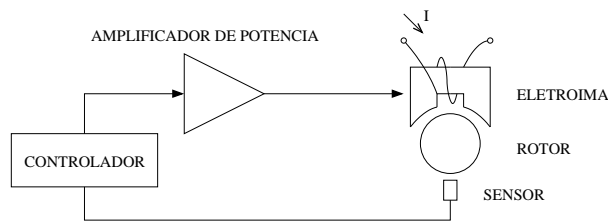


FIGURA 2.1: Mancal Magnético Ativo Simples.

2.3 Geração da Força de Relutância.

A força de relutância, ao contrário da força de Lorentz (forças atuando em condutores presentes em um campo magnético), é uma força de atração gerada entre um ímã

(eletroímã) e um material ou corpo ferromagnético, graças à diferença de permeabilidade existente entre estes (figura 2.2). Basicamente, ela é produzida por uma mudança na energia de campo presente no espaço de ar (entreferro) onde é colocado o corpo ferromagnético (Schweitzer et al. 1994). A mudança na energia de campo pode ocorrer

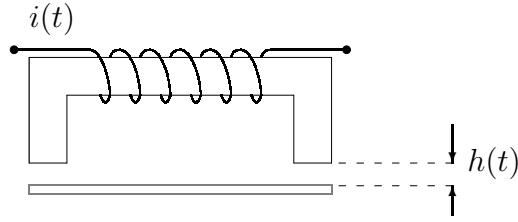


FIGURA 2.2: Força de Atração em um Eletroímã .

tanto pela mudança na posição do corpo quanto pela intensidade da excitação aplicada aos enrolamentos dispostos no eletroímã .

Ao se injetar uma corrente i em uma bobina de n espiras, aparecerá uma força magnetomotiz f_{mm} dada por:

$$f_{mm} = ni$$

Forças magnetomotrizes geram fluxos magnéticos Φ , que dependem da relutância do circuito magnético. A expressão básica é:

$$f_{mm} = R_{eq}\Phi \quad (2.1)$$

Para a figura 2.2 o circuito magnético atravessa os materiais sólidos (o chamado ferro) e o ar (entreferro). As relutâncias para cada trecho destes, bem como a relutância total são dadas por:

$$R_f = \frac{1}{\mu_0\mu_{rf}} \frac{l_f}{S_f} \quad (2.2)$$

$$R_a = \frac{1}{\mu_0\mu_{ra}} \frac{l_a}{S_a} \quad (2.3)$$

$$R_{eq} = R_f + 2R_a \quad (2.4)$$

onde:

μ_0 = permeabilidade do vácuo = 1.

μ_r = permeabilidade relativa do meio onde circula o fluxo magnético.

μ_{rf} = permeabilidade relativa do ferro.

μ_{ra} = permeabilidade relativa do entreferro ≈ 1 .

R_f, R_a, R_{eq} = relutâncias do ferro, entreferro e resultante, respectivamente.

S_f = área da seção transversal do ferro.

S_a = área da seção transversal de cada entreferro = S_f (espraiamento desprezado).

l_a = caminho que o fluxo magnético percorre no espaço = $h(t)$.

l_f = caminho que o fluxo magnético percorre no material ferromagnético.

Como $\mu_{rf} \gg \mu_{ra}$, tem-se que $R_f \ll R_a$ e desta forma de (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4) as expressões para a relutância equivalente e para o fluxo magnético gerado serão, respectivamente :

$$R_{eq} = \frac{2l_a}{\mu_0 S_a}$$
$$\Phi = \frac{f_{mm}}{R_{eq}} = \frac{\mu_0 n i S_a}{2h(t)}$$

A força de atração é dada por (2.5) (Reitz, Milford & Christy 1982, Hayt 1983, David 2000). Pelo desenvolvimento acima, as forças de relutância geradas em cada entre ferro e a força resultante, são dadas, respectivamente, por (2.6) e (2.7):

$$f_{geral}(t) = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 S_a} \quad (2.5)$$

$$f_e(t) = \frac{\mu_0 S_a n^2 i(t)^2}{8 h(t)^2} \quad (2.6)$$

$$f(t) = 2f_e(t) = \frac{\mu_0 S_a n^2 i(t)^2}{4 h(t)^2} \quad (2.7)$$

2.4 Operação em Modo Diferencial.

Considere inicialmente um mancal magnético ativo operado por um par de eletroímãs dispostos como na figura 2.3, onde $i_l(t)$ é a corrente injetada na bobina esquerda, $i_r(t)$ é a corrente injetada na bobina direita, h é a distância nominal do entre ferro e $x(t)$ é o deslocamento horizontal do rotor em relação a sua posição de equilíbrio.

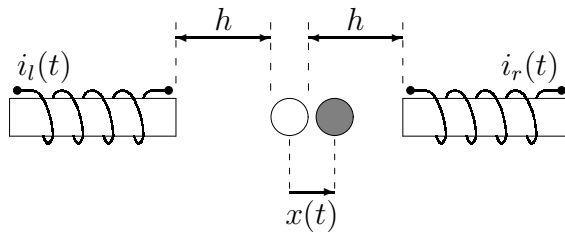


FIGURA 2.3: Posicionamento Horizontal do Rotor

De acordo com (2.7) as forças magnéticas são dadas por:

$$f_l(t) = -\frac{\mu_0 S n^2}{4} \left(\frac{i_l(t)}{h + x(t)} \right)^2 \quad (2.8)$$

$$f_r(t) = \frac{\mu_0 S n^2}{4} \left(\frac{i_r(t)}{h - x(t)} \right)^2 \quad (2.9)$$

onde $f_l(t)$ é a força aplicada na direção horizontal e no sentido negativo do eixo x e $f_r(t)$ é a força aplicada na direção horizontal e no sentido positivo do eixo x . A força resultante no eixo x é dada por:

$$f_x(t) = f_l(t) + f_r(t) = -\frac{\mu_0 S n^2}{4} \left(\frac{i_l(t)}{h + x(t)} \right)^2 + \frac{\mu_0 S n^2}{4} \left(\frac{i_r(t)}{h - x(t)} \right)^2 \quad (2.10)$$

Além de sua natureza não-linear, esta expressão tem outro inconveniente: ela depende de duas variáveis de controle, as intensidades de controle $i_r(t)$ e $i_l(t)$. Para contornar isso usaremos o modo de acionamento diferencial (Schweitzer et al. 1994) e a linearização da relação força e corrente (Schweitzer & Lange 1976, Schweitzer et al. 1994).

O modo diferencial consiste na injeção de uma corrente constante i_b em todas as bobinas, denominada corrente de base, e no incremento ou decremento desta de uma corrente DC denominada corrente diferencial, que passa a ser a única variável de controle.

$$i_l(t) = i_b(t) - i_x(t) \quad (2.11)$$

$$i_r(t) = i_b(t) + i_x(t) \quad (2.12)$$

onde $i_b(t)$ é a corrente de base e $i_x(t)$ é a corrente diferencial. Substituindo (2.11) e

(2.12) em (2.8), (2.9) e (2.10), seguem as expressões das forças:

$$f_l(t) = -\frac{\mu_0 S n^2}{4} \left(\frac{i_b(t) - i_x(t)}{h + x(t)} \right)^2$$

$$f_r(t) = \frac{\mu_0 S n^2}{4} \left(\frac{i_b(t) + i_x(t)}{h - x(t)} \right)^2$$

$$f_x(t) = f_r(t) + f_l(t) = \frac{\mu_0 S n^2}{4} \left(\frac{i_b(t) + i_x(t)}{h - x(t)} \right)^2 - \frac{\mu_0 S n^2}{4} \left(\frac{i_b(t) - i_x(t)}{h + x(t)} \right)^2$$

Deste modo, a força horizontal total depende apenas da corrente diferencial $i_x(t)$.

Como os deslocamentos envolvidos são pequenos, pode-se linearizar em torno do ponto de operação $i_{x_0} = x_0 = 0$.

$$\left. \frac{\partial f_x(t)}{\partial x(t)} \right|_{i_{x_0}=x_0=0} = \frac{\mu_0 S n^2 i_b^2}{h^3} = k_p$$

$$\left. \frac{\partial f_x(t)}{\partial i_x(t)} \right|_{i_{x_0}=x_0=0} = \frac{\mu_0 S n^2 i_b}{h^2} = k_i$$

A força resultante linearizada, ao longo da direção horizontal, é dada por:

$$f_x(t) = k_p x(t) + k_i i_x(t) \quad (2.13)$$

Acrecentando-se um par de eletroímãs ao longo do eixo y (figura 2.4), passa-se a ter também o controle dos movimentos verticais do rotor, onde $i_u(t)$ é a corrente injetada na bobina superior, $i_d(t)$ é a corrente injetada na bobina inferior e $y(t)$ é o deslocamento vertical do rotor em relação a sua posição de equilíbrio.

Seguindo-se um procedimento análogo ao desenvolvido para o controle dos movimentos horizontais, obtemos expressões para as forças geradas pelos eletroímãs inferior e superior:

$$f_d(t) = -\frac{\mu_0 S n^2}{4} \left(\frac{i_b(t) - i_y(t)}{h + y(t)} \right)^2$$

$$f_u(t) = \frac{\mu_0 S n^2}{4} \left(\frac{i_b(t) + i_y(t)}{h - y(t)} \right)^2$$

$$f_y(t) = f_u(t) + f_d(t) = \frac{\mu_0 S n^2}{4} \left(\frac{i_b(t) + i_y(t)}{h - y(t)} \right)^2 - \frac{\mu_0 S n^2}{4} \left(\frac{i_b(t) - i_y(t)}{h + y(t)} \right)^2 \quad (2.14)$$

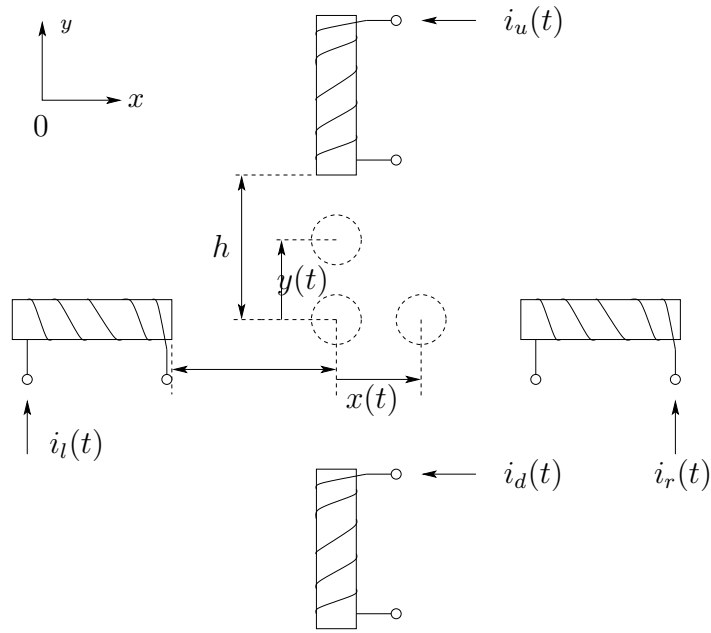


FIGURA 2.4: Posicionamento do Rotor no Plano xy .

Após linearização em torno do ponto de operação $i_{y0} = y_0 = 0$ à (2.14), tem-se:

$$\left. \frac{\partial f_y(t)}{\partial y(t)} \right|_{i_{y0}=y_0=0} = \frac{\mu_0 S n^2 i_b^2}{h^3} = k_p$$

$$\left. \frac{\partial f_y(t)}{\partial i_y(t)} \right|_{i_{y0}=y_0=0} = \frac{\mu_0 S n^2 i_b}{h^2} = k_i$$

A força resultante ao longo da direção vertical é dada por:

$$f_y(t) = k_p y(t) + k_i i_y(t) \quad (2.15)$$

As expressões (2.13) e (2.15) revelam total desacoplamento entre $f_x(t)$ e $f_y(t)$, já que cada uma depende somente da corrente e deslocamento do eixo associado a aplicação da força, fato este oriundo do fato de que o enlace de fluxo gerado por cada eletroímã permanece no seu domínio (David 2000).

Capítulo 3

Modelagem do Mancal-Motor

3.1 Introdução

O mancal-motor, conforme já mencionado, é um dispositivo baseado no princípio da levitação magnética e tem como função mesclar o posicionamento do rotor (mancal magnético) com o seu acionamento (motor elétrico). O protótipo estudado neste trabalho foi obtido alterando a configuração dos enrolamentos do estator de um motor de indução, de forma a possibilitar que este passe a gerar o duplo efeito supra citado.

Este capítulo tem como objetivo apresentar o dispositivo e detalhar os aspectos relativos à sua modelagem, como a geração das forças radiais de restauração.

É apresentada uma revisão sobre motores de indução para que se possa entender melhor a construção e funcionamento do mancal-motor. Posteriormente é feita a análise da sua construção, da geração das correntes de magnetização e dos fluxos magnéticos a elas associadas e responsáveis pela geração das forças radiais.

3.2 O Motor de Indução

O material descrito nesta seção é apresentado em diversos livros que tratam de máquinas elétricas, como por exemplo em (Fitzgerald, JR & Kusko 1975).

Os enrolamentos de fase de um motor de indução trifásico encontram-se 120 graus elétricos defasados entre si ao longo da circunferência do entre-ferro, explicitados na figura 3.1 pelas bobinas A , $-A$, B , $-B$, C , $-C$, onde \bullet e \times indicam as direções de

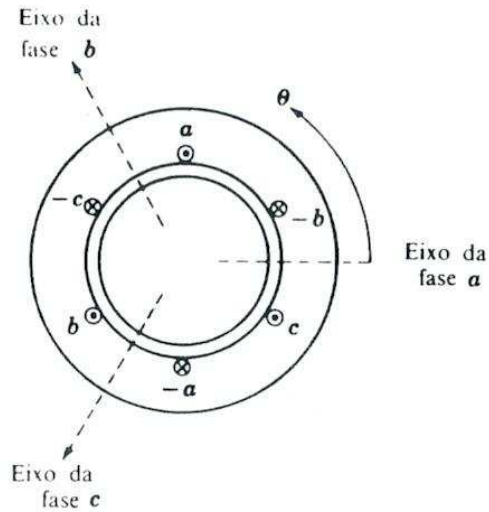


FIGURA 3.1: Enrolamento de um Estator Trifásico a Dois Pólos.

referência para correntes de fase positivas.

Estas bobinas representam enrolamentos distribuídos e produzem ondas senoidais de força magnemotriz (f_{mm}) centradas nos eixos magnéticos das respectivas fases.

A excitação de cada fase é feita mediante a injeção de corrente alternada com variação senoidal no tempo t , de acordo com as equações abaixo:

$$i_A(t) = I_m \cos \omega t$$

$$i_B(t) = I_m \cos(\omega t - 120^\circ)$$

$$i_C(t) = I_m \cos(\omega t - 240^\circ)$$

onde:

$i_A(t)$, $i_B(t)$, $i_C(t)$ = correntes instantâneas nas fases A , B , C .

I_m = valor máximo de corrente.

ω = frequência de excitação.

O gráfico destas correntes segue na figura 3.2.

O instante em que a corrente da fase A atinge seu valor máximo, é tomado como

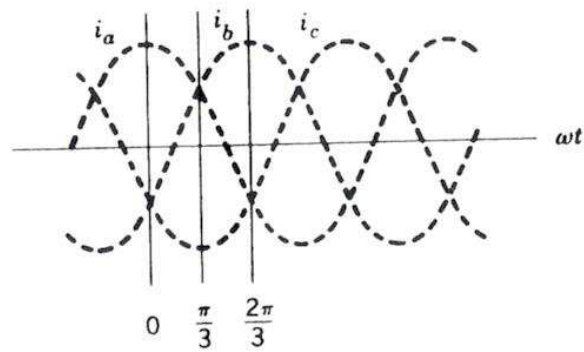


FIGURA 3.2: Correntes Trifásicas Instantâneas.

origem do tempo, sendo que o sequenciamento de fases é A , B e C .

As ondas de f_{mm} são distribuições senoidais estacionárias e pulsantes em torno do entre-ferro, apresentam seus máximos nos eixos magnéticos das respectivas fases e amplitudes proporcionais às correntes de fase instantânea. Com isso, uma onda espacial estacionária é caracterizada por um vetor espacial oscilante ao longo do eixo magnético da fase, de módulo proporcional à corrente de fase instantânea. A resultante das f_{mm} é o somatório das f_{mm} de cada fase.

Basicamente, o funcionamento do motor ocorre mediante a ação de transformador do estator (parte fixa da máquina), ou seja, ao se injetar corrente alternada nos enrolamentos do estator, tem-se o surgimento por indução de corrente alternada no rotor (parte móvel da máquina). Na figura 3.3 segue uma vista em secção de um motor de indução trifásico.

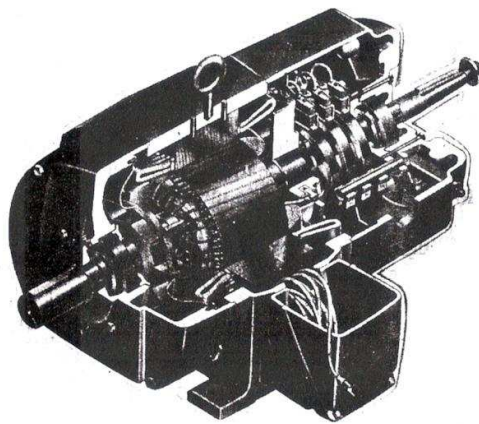


FIGURA 3.3: Vista Seccional de um Motor de Indução Trifásico.

Ao ser excitado por uma fonte polifásica simétrica, o enrolamento do estator gera um campo magnético no entre-ferro dependente do número de pólos do estator e da frequência aplicada a este, que gira à velocidade síncrona.

Considerando-se que o rotor gira com velocidade fixa de n rpm na direção do campo girante do estator, e que a velocidade do campo do estator é de n_1 rpm, diz-se que o rotor gira na velocidade $n_1 - n$ rpm na direção do campo oposta ao do estator; velocidade esta denominada escorregamento que pode ser também definido matematicamente como:

$$\sigma = \frac{n_1 - n}{n_1}$$

onde σ é o escorregamento ¹, n_1 é a velocidade síncrona dada por $n_1 = \omega/2\pi$, n é a velocidade do motor dada por $n = \omega_m/2\pi$, ω é a frequência de excitação elétrica e ω_m é a frequência mecânica do motor.

O movimento relativo entre o fluxo magnético e os condutores do rotor induz tensões de frequência de escorregamento no rotor. Desta forma, a máquina se comporta como um transformador de frequência e pode ser empregada como conversor de frequência.

Ao se curto-circuitar os terminais do rotor a máquina funciona como motor de indução e as tensões induzidas e a impedância do rotor à frequência de escorregamento determinam as correntes no rotor.

Ao se dar partida no motor (rotor imóvel) o escorregamento vale um e as frequências do estator e rotor são iguais, ou seja, o campo produzido pelas correntes do rotor gira na velocidade do campo do estator e resulta um conjugado de partida tendendo a girar o rotor na direção de giro do campo induzido pelo estator. Quando o conjugado vence a oposição da rotação oriunda da carga mecânica, o motor alcança a velocidade de funcionamento normal; que não pode ser igual à síncrona, caso contrário os condutores estariam imóveis em relação ao campo do estator e não ocorreria indução de tensão.

Quando o rotor gira na mesma direção de rotação do campo do estator, tem-se que a frequência das correntes no rotor é dada pela frequência de escorregamento e o campo do rotor gira com σn_1 em relação ao rotor em direção para frente. A rotação

¹Foi empregado este símbolo, ao invés do símbolo clássico S, para não haver confusão com o símbolo do parâmetro da Transformada de Laplace.

mecânica (n rpm) se superpõe ao giro do campo do rotor (σn_1). Com isso, a velocidade do campo do rotor no espaço é a soma destas duas velocidades:

$$\sigma n_1 + n = \sigma n_1 + n_1(1 - \sigma) = n_1$$

Donde se conclui que os campos do estator e rotor estão estacionários um em relação ao outro, e produzem um conjugado estável denominado conjugado assíncrono.

3.3 Apresentação do Mancal-Motor

O material descrito nesta seção e nas próximas pode ser visto com maiores detalhes em (David 2000).

O mancal-motor analisado é um motor de indução trifásico cujos enrolamentos foram alterados para uma configuração de duas fases com quatro pólos. O esquema da nova configuração, bem como os caminhos físicos dos fios em cada bobina segue explicitado na figura 3.4.

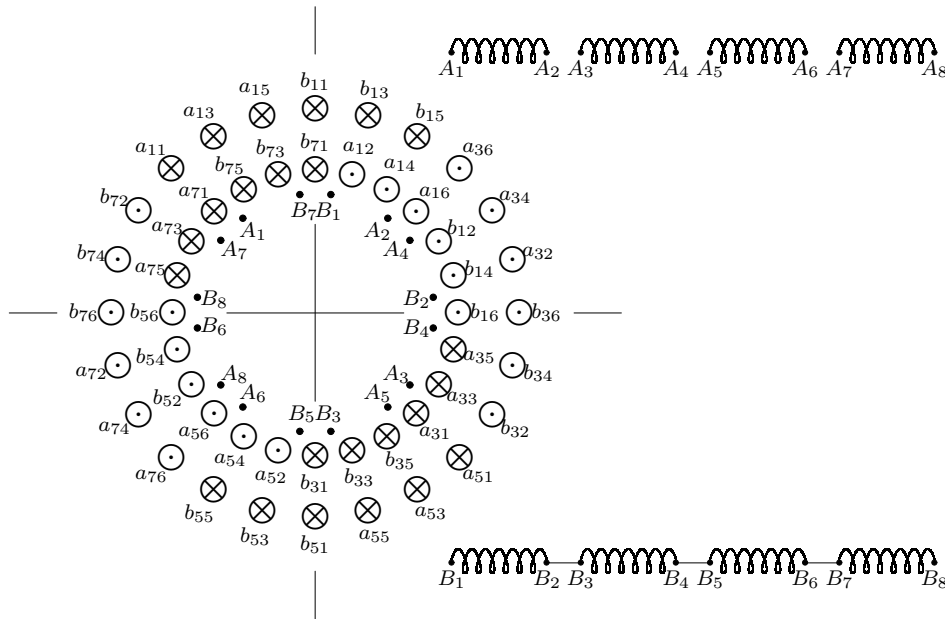


FIGURA 3.4: Enrolamentos do Estator na Configuração de Duas Fases e Quatro Pólos.

Nesta nova configuração a máquina elétrica passa a ter dois modos de funcionamento:

1. A máquina gera apenas torque e funciona como motor elétrico.

2. A máquina gera torque (motor elétrico) e é também capaz de devolver o eixo à sua posição central, caso ocorram deslocamentos radiais, (mancal magnético). Esta capacidade dual é denominada efeito mancal-motor.

Para o funcionamento no primeiro modo é necessário uma ligação série entre as quatro bobinas presentes em cada fase (A_2A_3 , A_4A_5 , A_6A_7 , B_2B_3 , B_4B_5 , B_6B_7) e a injeção de correntes alternadas de mesma amplitude e defasadas de 90 graus elétricos entre si.

Para o funcionamento no segundo modo é efetuada uma ligação série entre as quatro bobinas presentes na fase B e injetadas correntes alternadas em cada um dos pólos da fase A , com amplitudes controladas de forma independente, ângulos elétricos iguais e defasados de 90 graus do ângulo elétrico da corrente alternada injetada na fase B , e de mesma frequência ω de excitação.

Na figura 3.5 segue o esquema simplificado do mancal-motor.

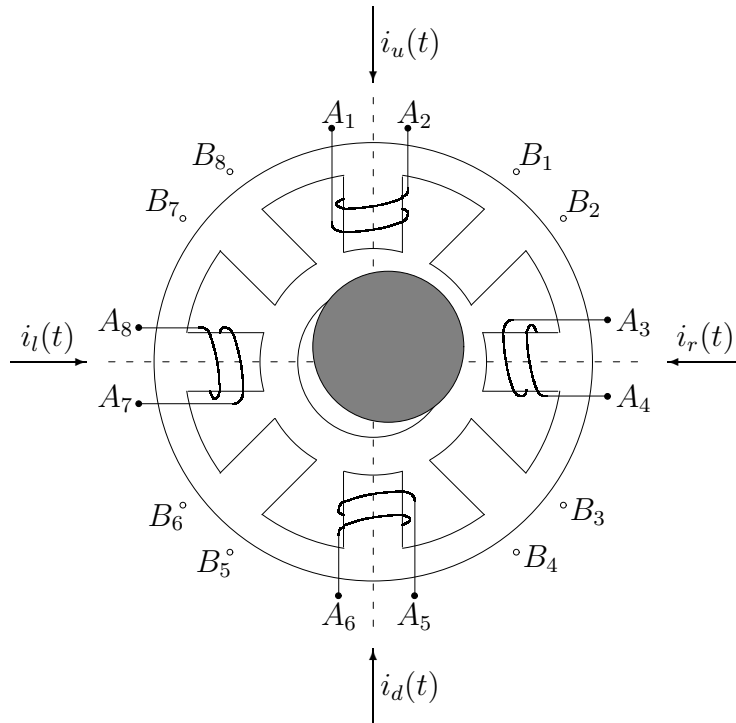


FIGURA 3.5: Esquema Elétrico Simplificado do Mancal-Motor.

O segundo modo de funcionamento, responsável pelo efeito mancal-motor, será analisado e empregado no presente trabalho.

Definindo a corrente na fase B como $i_B(t) = I_B \cos \omega t$ e aplicando o conceito de operação em modo diferencial descrito na seção 2.4, a corrente de base na fase A seria

$i_A(t) = I_A \text{sen } \omega t$ e as correntes diferenciais nas direções x e y seriam $i_x(t) = u_x \text{sen } \omega t$ e $i_y(t) = u_y \text{sen } \omega t$.

Finalmente:

$$i_l(t) = i_A(t) - i_x(t) \quad (3.1)$$

$$i_r(t) = i_A(t) + i_x(t) \quad (3.2)$$

$$i_u(t) = i_A(t) - i_y(t) \quad (3.3)$$

$$i_d(t) = i_A(t) + i_y(t) \quad (3.4)$$

onde:

$i_l(t)$ = corrente injetada na bobina A_7A_8 .

$i_r(t)$ = corrente injetada na bobina A_3A_4 .

$i_u(t)$ = corrente injetada na bobina A_1A_2 .

$i_d(t)$ = corrente injetada na bobina A_5A_6 .

Em todas estas relações ω é a frequência de excitação elétrica. As amplitudes das correntes de base nas fases A e B são usualmente iguais $I_A = I_B = I_0$.

Das expressões relativas à corrente de base na fase A e às correntes diferenciais nas direções x e y, e de (3.1) a (3.4), vem que:

$$i_l(t) = I_A \text{sen } \omega t - u_x \text{sen } \omega t = (I_A - u_x) \text{sen } \omega t$$

$$i_r(t) = I_A \text{sen } \omega t + u_x \text{sen } \omega t = (I_A + u_x) \text{sen } \omega t$$

$$i_u(t) = I_A \text{sen } \omega t - u_y \text{sen } \omega t = (I_A - u_y) \text{sen } \omega t$$

$$i_d(t) = I_A \text{sen } \omega t + u_y \text{sen } \omega t = (I_A + u_y) \text{sen } \omega t$$

O funcionamento do mancal-motor é diretamente dependente de sistema de controle. Este é responsável pela geração das amplitudes das correntes diferenciais u_x, u_y em função da posição do rotor, ou seja, uma lei de controle baseada em realimentação. Ao detectar um deslocamento radial do rotor ao longo do eixo x, por exemplo, o sistema de controle atua no sentido de modificar u_x .

3.4 Correntes de Magnetização no Núcleo

A geração das forças radiais necessárias à manutenção do rotor na posição central está diretamente relacionada aos conceitos de corrente de magnetização e de fluxo magnético no núcleo do mancal-motor.

A modelagem de cada fase é dada pelo circuito equivalente explicitado na figura 3.6 (David 2000).

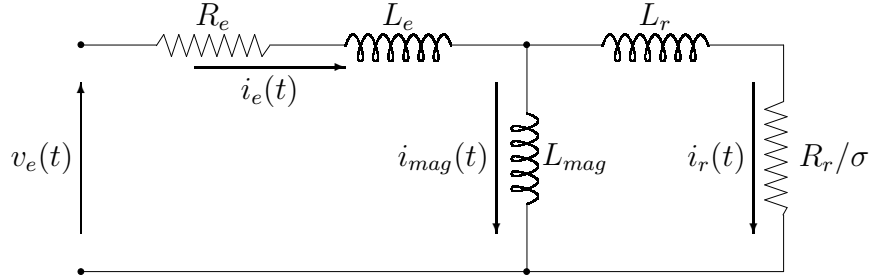


FIGURA 3.6: Circuito Elétrico por Fase.

onde:

R_e, L_e = resistência elétrica e indutância do estator, respectivamente.

R_r, L_r = resistência elétrica e indutância do rotor referidas ao estator, respectivamente.

$i_e(t)$ = corrente de excitação no estator.

$i_r(t)$ = corrente induzida no rotor.

L_{mag} = indutância de magnetização.

$i_{mag}(t)$ = corrente de magnetização.

σ = escorregamento.

Uma análise simples do circuito acima leva à relação entre as correntes de excitação e magnetização:

$$i_{mag}(s) = \left[\left(\frac{L_r}{L_r + L_{mag}} \right) \left(\frac{s + \frac{R_r}{L_r}}{s + \frac{R_r/\sigma}{L_r + L_{mag}}} \right) \right] i_e(s) \quad (3.5)$$

Fazendo $\tau_r = L_r/R_r$ e $\tau_{mag} = L_{mag}/R_r$, e substituindo estes parâmetros em (3.5)

chega-se à expressão:

$$i_{mag}(s) = \left[\frac{1 + \sigma \tau_r s}{1 + \sigma (\tau_r + \tau_{mag}) s} \right] i_e(s) = H(s) i_e(s) \quad (3.6)$$

De (3.6) seguem-se as expressões para módulo e fase de $H(j\omega)$:

$$\alpha(\omega, \sigma) = |H(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \tau_r^2(\sigma\omega)^2}{1 + (\tau_r + \tau_{mag})^2(\sigma\omega)^2}}$$

$$\beta(\omega, \sigma) = \angle H(j\omega) = \arctan \frac{-(\sigma\omega)\tau_{mag}}{1 + (\sigma\omega)^2\tau_r(\tau_r + \tau_{mag})}$$

Daí, a expressão para a corrente de magnetização em estado estacionário, ao se aplicar uma corrente de excitação $i_e(t) = I_e \text{sen } \omega t$, será:

$$i_{mag}(t) = \alpha(\omega, \sigma) I_e \text{sen } (\omega t + \beta(\omega, \sigma)) = I_{mag} \text{sen } (\omega t + \beta) \quad (3.7)$$

Aplicando-se (3.7) às expressões da corrente de base na fase A e das correntes diferenciais, chega-se as expressões das correntes de magnetização de base e diferenciais:

$$i_{Amag}(t) = \alpha(\omega, \sigma) I_0 \text{sen } (\omega t + \beta(\omega, \sigma))$$

$$i_{Bmag}(t) = \alpha(\omega, \sigma) I_0 \cos(\omega t + \beta(\omega, \sigma))$$

$$i_{xmag}(t) = \alpha(\omega, \sigma) u_x \text{sen } (\omega t + \beta(\omega, \sigma))$$

$$i_{ymag}(t) = \alpha(\omega, \sigma) u_y \text{sen } (\omega t + \beta(\omega, \sigma))$$

onde:

$i_{Amag}(t)$ = corrente de magnetização de base da fase A .

$i_{Bmag}(t)$ = corrente de magnetização de base da fase B .

$i_{xmag}(t)$ = corrente de magnetização diferencial ao longo do eixo x .

$i_{ymag}(t)$ = corrente de magnetização diferencial ao longo do eixo y .

3.5 Geração dos Fluxos Magnéticos

Supondo que o núcleo do mancal-motor não atinja a saturação magnética (Schweitzer et al. 1994), o problema de geração de forças radiais na fase *A* pode ser dividido em quatro subproblemas, cada um associado a um determinado pólo desta fase que atua por sua vez como fonte de geração de fluxo magnético.

Subproblema 1

Arbitrando-se como primeiro subproblema o associado ao pólo direito, notar-se-á o aparecimento de uma força magnetomotriz associada à corrente $i_r(t)$ injetada neste pólo, dada por:

$$f_{mmr} = n_{eq} i_{rmag}(t) = n_{eq}(i_{Amag}(t) + i_{xmag}(t))$$

onde: n_{eq} é o número equivalente de voltas na bobina e $i_{rmag}(t)$ é a corrente de magnetização oriunda do pólo direito.

Os quatro entre-ferros apresentam distâncias nominais h ao rotor centralizado. Estas distâncias são alteradas para $h \pm x$ e $h \pm y$, e as relutâncias dos entre-ferros passam a ser dadas por:

$$R_r = \frac{h - x}{\mu_0 S_a} \quad (3.8)$$

$$R_u = \frac{h - y}{\mu_0 S_a} \quad (3.9)$$

$$R_l = \frac{h + x}{\mu_0 S_a} \quad (3.10)$$

$$R_d = \frac{h + y}{\mu_0 S_a} \quad (3.11)$$

onde: R_r é a relutância do entre-ferro direito, R_u é a relutância do entre-ferro superior, R_l é a relutância do entre-ferro esquerdo e R_d é a relutância do entre-ferro inferior.

A geração de fluxo magnético no pólo direito se dá de acordo com o diagrama esquemático da figura 3.7, onde:

Φ_{rr} = fluxo magnético parcial gerado pelo pólo direito.

Φ_{ur} = fluxo magnético parcial gerado pelo pólo superior e que atravessa o pólo direito.

Φ_{lr} = fluxo magnético parcial gerado pelo pólo esquerdo e que atravessa o pólo direito.

Φ_{dr} = fluxo magnético parcial gerado pelo pólo inferior e que atravessa o pólo direito.

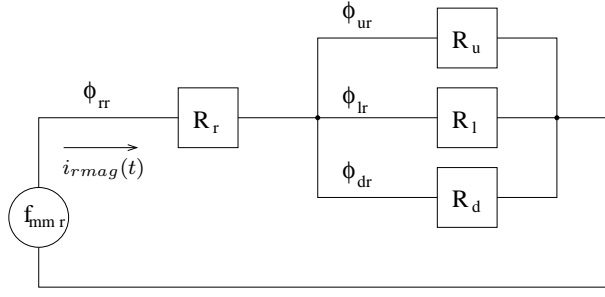


FIGURA 3.7: Circuito Magnético da Geração de Fluxo Magnético no Pólo Direito.

Os circuitos magnéticos dos demais pólos seguem de forma análoga ao do pólo direito.

De (3.8) a (3.11) e da figura 3.7, segue a expressão da relutância equivalente associada ao subproblema 1:

$$R_{eqr} = \frac{R_u R_l R_d + R_r R_l R_d + R_r R_u R_d + R_r R_u R_l}{R_l R_d + R_u R_d + R_u R_l} = \frac{N}{D_r}$$

Seguindo-se o procedimento apresentado em (David 2000), obtém-se como fluxos magnéticos parciais:

$$\Phi_{rr}(t) = \frac{f_{mmr}}{R_{eqr}} = \frac{D_r}{N} n_{eq}(i_{Amag}(t) + i_{xmag}(t))$$

$$\Phi_{ur}(t) = \frac{R_l R_d}{N} n_{eq}(i_{Amag}(t) + i_{xmag}(t))$$

$$\Phi_{lr}(t) = \frac{R_u R_d}{N} n_{eq}(i_{Amag}(t) + i_{xmag}(t))$$

$$\Phi_{dr}(t) = \frac{R_u R_l}{N} n_{eq}(i_{Amag}(t) + i_{xmag}(t))$$

De forma análoga obtém-se os fluxos magnéticos parciais associados aos subproblemas 2, 3 e 4 (David 2000).

Arbitrando-se como sentido positivo o de entrada no fluxo magnético no rotor, obtém-se os fluxos totais para os subproblemas 1 a 4, como sendo, respectivamente:

$$\Phi_r = \Phi_{rr} + \Phi_{ru} - \Phi_{rl} + \Phi_{rd}$$

$$\Phi_l = -\Phi_{lr} + \Phi_{lu} + \Phi_{ll} + \Phi_{ld}$$

$$\Phi_u = -\Phi_{ur} - \Phi_{uu} - \Phi_{ul} + \Phi_{ud}$$

$$\Phi_d = -\Phi_{dr} + \Phi_{du} - \Phi_{dl} - \Phi_{dd}$$

3.6 Geração das Forças de Relutância

Das correntes de magnetização na fase A foi possível determinar os fluxos magnéticos em cada um dos pólos desta fase. Agora, a meta é determinar as forças de relutância radiais, que são função dos fluxos magnéticos gerados pelas fases A e B .

Fase A

As forças de relutância nesta fase são dadas por:

$$f_{Ax} = \frac{1}{2\mu_0 S_a} (\Phi_r^2 - \Phi_l^2)$$

$$f_{Ay} = \frac{1}{2\mu_0 S_a} (\Phi_u^2 - \Phi_d^2)$$

onde:

f_{Ax} = força radial na direção do eixo x produzida pela fase A .

f_{Ay} = força radial na direção do eixo y produzida pela fase A .

Reescrevendo estas expressões em termos das correntes de excitação da fase A , e dos parâmetros α e β (David 2000), vem que:

$$f_{Ax} = \frac{\mu_0 S_a}{2} n_{eq}^2 \alpha^2 \sin^2(\omega t + \beta) \left[\frac{\delta_0^2 - \delta_1^2}{H_1^2} \right] \quad (3.12)$$

$$f_{Ay} = \frac{\mu_0 S_a}{2} n_{eq}^2 \alpha^2 \sin^2(\omega t + \beta) \left[\frac{\delta_2^2 - \delta_3^2}{H_1^2} \right] \quad (3.13)$$

onde:

$$H_1 = (h-x)(h-y)(h+x) + (h-x)(h-y)(h+y) + (h-x)(h+x)(h+y) + (h-y)(h+x)(h+y)$$

$$\delta_0 = (I_0 + u_x)H_2 + (I_0 + u_y)H_3 - (I_0 - u_x)H_4 + (I_0 - u_y)H_5$$

$$\delta_1 = (I_0 - u_x)H_6 - (I_0 + u_x)H_4 + (I_0 + u_y)H_7 + (I_0 - u_y)H_8$$

$$\delta_2 = -(I_0 + u_y)H_2 - (I_0 + u_x)H_4 - (I_0 - u_x)H_3 + (I_0 - u_y)H_9$$

$$\delta_3 = -(I_0 - u_y)H_6 + (I_0 + u_x)H_4 + (I_0 + u_y)H_9 + (I_0 - u_x)H_8$$

$$H_2 = (h + x)(h - y) + (h + x)(h + y) + (h - y)(h + y)$$

$$H_3 = (h + x)(h + y)$$

$$H_4 = (h - y)(h + y)$$

$$H_5 = (h + x)(h - y)$$

$$H_6 = (h - x)(h - y) + (h - x)(h + y) + (h - y)(h + y)$$

$$H_7 = (h - x)(h + y)$$

$$H_8 = (h - x)(h - y)$$

$$H_9 = (h + x)(h - x)$$

Substituindo:

$$Q_x = \frac{\delta_0^2 - \delta_1^2}{H_1^2} \quad \text{e} \quad Q_y = \frac{\delta_2^2 - \delta_3^2}{H_1^2}$$

em (3.12) e (3.13) obtém-se:

$$f_{Ax} = \frac{\mu_0 S_a}{2} n_{eq}^2 \alpha^2 \sin^2(\omega t + \beta) Q_x(x, y, I_0, u_x, u_y, h) \quad (3.14)$$

$$f_{Ay} = \frac{\mu_0 S_a}{2} n_{eq}^2 \alpha^2 \sin^2(\omega t + \beta) Q_y(x, y, I_0, u_x, u_y, h) \quad (3.15)$$

Nota-se que as forças dependem de modo não linear dos parâmetros x , y , I_0 , u_x , u_y , h . Como I_0 e h são grandezas fixas, opera-se a linearização de (3.14) e (3.15) em torno do ponto de equilíbrio $P_0|_{x=y=u_x=u_y=0}$, resultando em:

$$f_{Ax}(x, u_x) = 2\mu_0 S_a n_{eq}^2 \alpha^2 \left(\frac{I_0^2}{h^3} x + \frac{I_0}{h^2} u_x \right) \sin^2(\omega t + \beta) \quad (3.16)$$

$$f_{Ay}(y, u_y) = 2\mu_0 S_a n_{eq}^2 \alpha^2 \left(\frac{I_0^2}{h^3} y + \frac{I_0}{h^2} u_y \right) \text{sen}^2(\omega t + \beta) \quad (3.17)$$

Mas $\text{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, que substituída em (3.16) e (3.17) produz:

$$f_{Ax}(x, u_x) = \mu_0 S_a n_{eq}^2 \alpha^2 \left(\frac{I_0^2}{h^3} x + \frac{I_0}{h^2} u_x \right) (1 - \cos 2(\omega t + \beta)) \quad (3.18)$$

$$f_{Ay}(y, u_y) = \mu_0 S_a n_{eq}^2 \alpha^2 \left(\frac{I_0^2}{h^3} y + \frac{I_0}{h^2} u_y \right) (1 - \cos 2(\omega t + \beta)) \quad (3.19)$$

Substituindo:

$$k_p(\sigma, \omega) = \frac{\mu_0 S_a n_{eq}^2 I_0^2 \alpha^2}{h^3} \quad e \quad k_i(\sigma, \omega) = \frac{\mu_0 S_a n_{eq}^2 I_0 \alpha^2}{h^2}$$

em (3.18) e (3.19), tem-se:

$$f_{Ax}(x, u_x) = k_p(1 - \cos 2(\omega t + \beta))x + k_i(1 - \cos 2(\omega t + \beta))u_x \quad (3.20)$$

$$f_{Ay}(y, u_y) = k_p(1 - \cos 2(\omega t + \beta))y + k_i(1 - \cos 2(\omega t + \beta))u_y \quad (3.21)$$

onde:

$k_p(\sigma, \omega)$ = parâmetro de posição, tomado como constante ao se fixar σ e ω .

$k_i(\sigma, \omega)$ = parâmetro de corrente, tomado como constante ao se fixar σ e ω .

Fase B

Conforme visto anteriormente, a fase *B* apresenta como excitação uma corrente elétrica senoidal, de amplitude igual à da fase *A* e com defasagem de 90 graus elétricos. Ela também contribui na resultante de forças radiais, sendo a expressão das forças por ela produzidas dadas por:

$$f_{Bx_B} = k_p \left[1 - \cos 2 \left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2} \right) \right] x_B \quad (3.22)$$

$$f_{By_B} = k_p \left[1 - \cos 2 \left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2} \right) \right] y_B \quad (3.23)$$

onde:

f_{Bx_B} = força de relutância radial, aplicada pela fase *B* ao longo do eixo *x* referenciado à fase *B*.

f_{ByB} = força de relutância radial, aplicada pela fase B ao longo do eixo y e referenciado à fase B .

Como existe um deslocamento geométrico de 45 graus entre as fases, pode-se dizer que as coordenadas do sistema associado à fase B estão relacionadas as da fase A , de acordo com as seguintes expressões:

$$x = x_B \cos 45^\circ + y_B \cos 135^\circ \quad (3.24)$$

$$y = x_B \sin 45^\circ + y_B \sin 135^\circ \quad (3.25)$$

De (3.24) e (3.25), vem que:

$$f_{Bx} = f_{Bx_B} \cos 45^\circ + f_{By_B} \cos 135^\circ = (f_{Bx_B} - f_{By_B}) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3.26)$$

$$f_{By} = f_{Bx_B} \sin 45^\circ + f_{By_B} \sin 135^\circ = (f_{Bx_B} + f_{By_B}) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3.27)$$

Substituindo (3.22) e (3.23) em (3.26) e (3.27), tem-se:

$$f_{Bx} = k_p \left[1 - \cos 2 \left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{\sqrt{2}}{2} (x_B - y_B) \quad (3.28)$$

$$f_{By} = k_p \left[1 - \cos 2 \left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2} \right) \right] \frac{\sqrt{2}}{2} (x_B + y_B) \quad (3.29)$$

Aplicando (3.24) e (3.25) em (3.28) e (3.29), seguem as expressões de força produzidas pela fase B e referenciadas à fase A :

$$f_{Bx} = k_p \left[1 - \cos 2 \left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2} \right) \right] x \quad (3.30)$$

$$f_{By} = k_p \left[1 - \cos 2 \left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2} \right) \right] y \quad (3.31)$$

De (3.20), (3.21), (3.30) e (3.31), chega-se às expressões para a resultante das forças radiais produzidas pelas fases A e B :

$$\begin{aligned} f_x = f_{Ax} + f_{Bx} &= k_p [1 - \cos (2\omega t + 2\beta)] x + k_i [1 - \cos (2\omega t + 2\beta)] u_x + \\ &+ k_p [1 - \cos (2\omega t + 2\beta + \pi)] x \end{aligned}$$

$$f_y = f_{Ay} + f_{By} = k_p [1 - \cos(2\omega t + 2\beta)] y + k_i [1 - \cos(2\omega t + 2\beta)] u_y + \\ + k_p [1 - \cos(2\omega t + 2\beta + \pi)] y$$

Mas $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$. Daí, vem que:

$$f_x = 2k_p x + k_i [1 - \cos(2\omega t + 2\beta)] u_x \quad (3.32)$$

$$f_y = 2k_p y + k_i [1 - \cos(2\omega t + 2\beta)] u_y \quad (3.33)$$

Do exposto no presente capítulo e das expressões finais para as resultantes das forças radiais nota-se que:

1. As equações (3.32) e (3.33) são semelhantes às expressões de resultante (2.13) e (2.15) para o caso do mancal magnético simples.
2. A excitação, desempenhada por correntes DC no caso do mancal magnético simples, é agora desempenhada por correntes de natureza senoidal, especificamente pela amplitude de base I_0 e pelas amplitudes diferenciais u_x e u_y .
3. Como no caso do mancal magnético simples apresentado no capítulo 2, as expressões para as forças radiais apresentam como característica o desacoplamento.
4. O controle atua no sentido de gerar as amplitudes diferenciais u_x e u_y solicitadas pelas forças radiais f_x e f_y , responsáveis pelo posicionamento do rotor.

Capítulo 4

Análise Dinâmica do Rotor

4.1 Introdução

O protótipo em estudo pode ser visto na figura 4.1. Trata-se de um rotor estabilizado verticalmente por um mancal axial e posicionado radialmente por dois mancais motores, que também o fazem girar. A mesma figura esquematiza a situação.

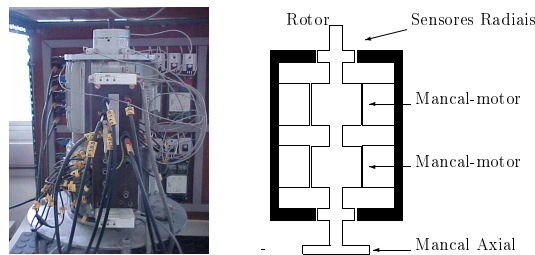


FIGURA 4.1: Foto e Esquema em Corte do Protótipo.

Os movimentos verticais do rotor podem ser controlados por meio de calços ou mancais. O uso de calços permite fixar a extremidade inferior do eixo, ao passo que os mancais (axiais agora e não radiais como os outros) tolerarão pequenos movimentos horizontais e verticais dessa extremidade. O tipo do dispositivo usado na sustentação da parte inferior do eixo será considerado na elaboração detalhada do modelo matemático.

Em (David 2000) pode-se encontrar detalhes de um mancal axial baseado em propriedades dinâmicas de cerâmicas supercondutoras. As principais características desse dispositivo serão aqui recordadas.

O presente capítulo tem como objetivo apresentar a análise dinâmica do rotor a

partir da modelagem do mancal-motor descrita anteriormente e das propriedades do mancal supercondutor (David 2000).

4.2 O Mancal Axial

Os movimentos verticais ao eixo do rotor são controlados passivamente, através de um mancal axial supercondutor (David 2000), cujas partes estática e dinâmica, são representadas na figura 4.2:

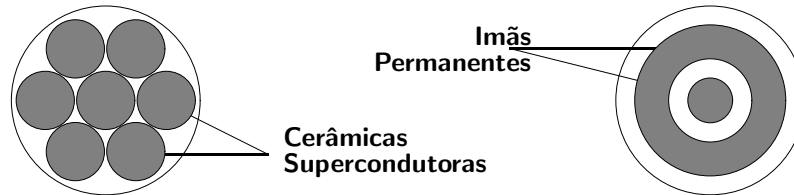


FIGURA 4.2: Esquema das Partes Estática e Dinâmica do Mancal Axial.

Os materiais supercondutores de alta temperatura (HTS) como o $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ tornam a construção de um mancal axial possível. A base física para o dispositivo é a resposta diamagnética do supercondutor que causa uma força de repulsão entre os blocos do material HTS e os ímãs permanentes conectados na parte inferior do rotor (David 2000).

Os blocos supercondutores são dispostos de maneira simétrica em uma base de cobre imersa em nitrogênio líquido, constituindo a parte estática do mancal axial. Já a parte dinâmica, é formada pelos ímãs permanentes (Nd Fe B) fixados na parte inferior do eixo giratório.

4.3 Dinâmica do Rotor

Apresentadas a modelagem dos mancais-motores (responsáveis pelo acionamento e estabilização do rotor) e as características do mancal axial utilizado, é chegada a hora de se analisar o rotor em termos de sua dinâmica (Schweitzer et al. 1994, David 2000), com o objetivo de se gerar uma equação que a traduza.

A representação esquemática do sistema segue na figura 4.3.

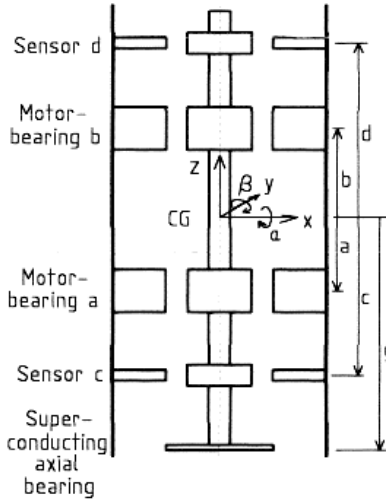


FIGURA 4.3: Representação Esquemática do Rotor

onde:

a = distância do mancal-motor inferior ao C G do rotor.

b = distância do mancal-motor superior ao C G do rotor.

c = distância dos sensores inferiores ao C G do rotor.

d = distância dos sensores superiores ao C G do rotor.

g = distância do mancal axial ao C G do rotor.

α = deslocamento angular do rotor em relação ao eixo x.

β = deslocamento angular do rotor em relação ao eixo y.

ω = velocidade angular do rotor.

x = deslocamento linear do C G do rotor na direção x.

y = deslocamento linear do C G do rotor na direção y.

Antes de se iniciar a análise, deve-se definir vetores com os deslocamentos angulares e lineares do C G do rotor, com os deslocamentos nos mancais motores, com os deslocamentos nos sensores, e com as variáveis de controle. Eles são dados respectivamente por:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ \beta \\ y \\ -\alpha \end{bmatrix}; \quad z_B = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ y_a \\ y_b \end{bmatrix}; \quad z_S = \begin{bmatrix} x_c \\ x_d \\ y_c \\ y_d \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} u_{ax} \\ u_{bx} \\ u_{ay} \\ u_{by} \end{bmatrix}$$

onde: x_a é o deslocamento na direção x, de um ponto situado na cota "a" do rotor, x_b é o deslocamento na direção x, de um ponto situado na cota "b" do rotor, etc.

As forças exercidas no rotor pelos mancais superiores são f_{bx} e f_{by} , e pelos mancais inferiores são f_{ax} e f_{ay} . De acordo com o capítulo anterior, as forças radiais geradas pelos mancais ao longo dos eixos x e y, desconsiderando-se a defasagem β , serão dadas pelas equações (3.32) e (3.33):

$$f_{ax} = 2k_{pa} x_a + k_{ia}[1 - \cos(2\omega t)]u_{ax} \quad (4.1)$$

$$f_{bx} = 2k_{pb} x_b + k_{ib}[1 - \cos(2\omega t)]u_{bx} \quad (4.2)$$

$$f_{ay} = 2k_{pa} y_a + k_{ia}[1 - \cos(2\omega t)]u_{ay} \quad (4.3)$$

$$f_{by} = 2k_{pb} y_b + k_{ib}[1 - \cos(2\omega t)]u_{by} \quad (4.4)$$

onde as variáveis de controle u_{ax} , u_{bx} , u_{ay} e u_{by} são as amplitudes das correntes diferenciais.

Para efeito de simplificação define-se:

$$K_Z(\sigma, \omega) = 2 \begin{bmatrix} k_{pa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{pb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{pa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{pb} \end{bmatrix}; \quad K_u(\sigma, \omega) = \begin{bmatrix} k_{ia} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{ib} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{ia} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{ib} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$K_u^t(\sigma, \omega, t) = (1 - \cos 2\omega t) \begin{bmatrix} k_{ia} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{ib} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{ia} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{ib} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Substituindo (4.5) e (4.6) em (4.1) a (4.4), tem-se a expressão das forças de restauração geradas pelo mancais:

$$f_B = \begin{bmatrix} f_{ax} \\ f_{bx} \\ f_{ay} \\ f_{by} \end{bmatrix} = K_Z z_B + K_u^t u$$

Estas forças podem ser reduzidas a forças (f) e momentos (p) aplicados ao C G do rotor pela transformação:

$$f_1 = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ p_{1y} \\ f_{1y} \\ -p_{1x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ax} \\ f_{bx} \\ f_{ay} \\ f_{by} \end{bmatrix} = T_c f_B$$

A figura 4.4 mostra os planos xz e yz com os deslocamentos lineares e angulares do rotor, bem como os momentos p_y e $-p_x$.

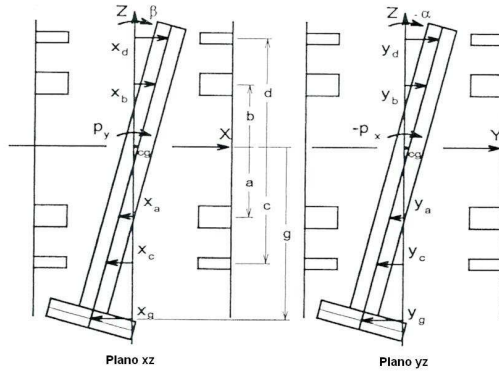


FIGURA 4.4: Esquema do Sistema nos Planos xz e yz.

Um deslocamento radial ocorrido no mancal axial (cota g) se relaciona às posições do C G do rotor por meio de:

$$x_g = x + g\beta \quad (4.7)$$

$$y_g = y - g\alpha \quad (4.8)$$

De acordo com (David 2000), o mancal axial apresenta uma constante elástica horizontal K_h . Com isso, as expressões das forças radiais geradas por ele ao longo dos eixos x e y são:

$$f_{2x} = -K_h x_g \quad (4.9)$$

$$f_{2y} = -K_h y_g \quad (4.10)$$

Os momentos destas forças com relação ao C G são:

$$p_{2y} = g f_{2x} \quad (4.11)$$

$$-p_{2x} = gf_{2y} \quad (4.12)$$

Substituindo (4.7) e (4.8) em (4.9) e (4.10), e depois em (4.11) e (4.12), e rearranjando chegamos ao vetor das forças elásticas radiais geradas pelo mancal axial:

$$f_2 = \begin{bmatrix} f_{2x} \\ p_{2y} \\ f_{2y} \\ -p_{2x} \end{bmatrix} = -K_h \begin{bmatrix} 1 & g & 0 & 0 \\ g & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & g & g^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \beta \\ y \\ -\alpha \end{bmatrix} = -S z$$

O efeito de amortecimento do mancal axial contribui para a dinâmica do rotor com uma força que é função do coeficiente de amortecimento C_h , que seguindo desenvolvimento análogo ao feito para as forças elásticas, é dada por:

$$f_3 = \begin{bmatrix} f_{3x} \\ p_{3y} \\ f_{3y} \\ -p_{3x} \end{bmatrix} = -C_h \begin{bmatrix} 1 & g & 0 & 0 \\ g & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & g & g^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\beta} \\ \dot{y} \\ -\dot{\alpha} \end{bmatrix} = -C \dot{z}$$

onde: f_3 representa as forças de amortecimento provocadas pelo mancal axial.

Conhecendo as forças de origem elétrica, elástica e de amortecimento no C G do rotor, o próximo passo é definir matrizes de transformação que permitam escrever a equação dinâmica em termos dos deslocamentos nos mancais-motores e dos deslocamentos nos sensores.

As matrizes de transformação dos mancais-motores ao C G e do C G aos sensores são dadas respectivamente por:

$$T_B = \frac{1}{b-a} \begin{bmatrix} b & -a & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -a \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_D = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 & 0 \\ 1 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix}$$

As relações entre os mancais-motores e o C G e deste e os sensores, são dadas

respectivamente por:

$$z = T_B z_B; \quad z_S = T_D z$$

A relação entre os mancais-motores e os sensores, segue da matriz T_S :

$$T_S = T_D T_B$$

Daí:

$$z_S = T_S z_B$$

A equação dinâmica do rotor pode ser finalmente escrita:

$$M\ddot{z} + G\dot{z} = f_1 + f_2 + f_3$$

onde as matrizes de massa (M) e giroscópica (G) são dadas abaixo. A massa do rotor é m e seus momentos de inércia são I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} ; sua velocidade angular é ω_r .

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{yy} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{zz}\omega_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{zz}\omega_r & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Seguindo-se o procedimento apresentado em (David 2000), chega-se às equações dinâmicas do rotor em termos dos deslocamentos nos mancais-motores e em termos dos deslocamentos nos sensores, dadas respectivamente por:

$$M_B \ddot{z}_B + (G_B + C_B) \dot{z}_B + (S_B - K_Z) z_B = K_u^t u$$

$$M_S \ddot{z}_S + (G_S + C_S) \dot{z}_S + (S_S - K_S) z_S = T_S K_u^t u \quad (4.13)$$

onde:

$$M_B = T'_B M T_B$$

$$G_B = T'_B G T_B$$

$$S_B = T'_B S T_B$$

$$C_B = T'_B C T_B$$

$$T_S M_B T_S^{-1} = M_S$$

$$T_S G_B T_S^{-1} = G_S \tag{4.14}$$

$$T_S C_B T_S^{-1} = C_S$$

$$T_S S_B T_S^{-1} = S_S$$

$$T_S K_Z T_S^{-1} = K_S \tag{4.15}$$

Da equação (4.13) vê-se que S_S e C_S associadas com o mancal axial, tendem a estabilizar o sistema, enquanto, a matriz K_S relacionada com os mancais-motores é precedida por um sinal negativo e com isso requer um controle ativo.

Capítulo 5

Controle do Rotor

5.1 Introdução

Neste capítulo serão revistas as técnicas centralizada e descentralizada aplicadas ao controle do protótipo do mancal-motor descrito nos capítulos anteriores. A técnica de controle centralizado é baseada na teoria clássica do regulador linear quadrático (Athans & Falb 1966, Anderson & Moore 1971, Zhou et al. 1995, Gomes 1999) e fornece uma única solução ótima. Na solução descentralizada há restrições ao controlador, podendo-se encontrar uma ou mais soluções sub-ótimas (Anderson & Moore 1971, Bleuler 1984, Schweitzer et al. 1994, David 2000).

5.2 Modelo Matemático do Sistema

A equação que descreve a dinâmica do rotor foi obtida no capítulo 4 e é aqui reescrita por comodidade:

$$M_S \ddot{z}_S + (G_S + C_S) \dot{z}_S + (S_S - K_S) z_S = T_S K_u^t u \quad (5.1)$$

Com o objetivo de escrever esta equação em sua forma canônica, deve-se definir o vetor de estados como sendo:

$$x = \begin{bmatrix} z_S \\ \dot{z}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c & x_d & y_c & y_d & \dot{x}_c & \dot{x}_d & \dot{y}_c & \dot{y}_d \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x_I \\ x_{II} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

onde $z_S = x_I = \begin{bmatrix} x_c & x_d & y_c & y_d \end{bmatrix}'$ e $\dot{z}_S = \dot{x}_I = x_{II} = \begin{bmatrix} \dot{x}_c & \dot{x}_d & \dot{y}_c & \dot{y}_d \end{bmatrix}'$

Levando a (5.1), vem que:

$$\ddot{z}_S = \dot{x}_{II} = A_{21}x_I(t) + A_{22}x_{II}(t) + \Gamma_2(t)u(t)$$

onde A_{21} , A_{22} e $\Gamma_2(t)$ são matrizes (4×4) dadas por:

$$A_{21} = M_S^{-1}(K_S - S_S)$$

$$A_{22} = -M_S^{-1}(G_S + C_S)$$

$$\Gamma_2(t) = M_S^{-1}T_S K_u^t$$

e a equação de estados para o protótipo fica:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \Gamma(t)u(t)$$

onde A e $\Gamma(t)$ são matrizes (8×8) e (8×4) dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Gamma(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

As matrizes K_S e K_u^t , definidas nas equações (4.15) e (4.6), dependem da matriz de ganhos K_Z definida em (4.5), que depende dos parâmetros ω e σ , conforme discutido anteriormente. G_S , dada pela equação (4.14), depende em última instância de G , que depende da velocidade do rotor ω_r . Isto significa que A_{21} e A_{22} podem ser consideradas matrizes constantes somente em condições de regime. A definição de K_u^t leva a $\Gamma_2(t) = M_S^{-1}T_S K_u(1 - \cos 2\omega t)$ e um modelo linear pode ser utilizado para o funcionamento em regime do sistema de posicionamento:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(1 - \cos 2\omega t)u(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) - Bu(t) \cos 2\omega t \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad B_2 = M_S^{-1} T_S K_u \quad (5.5)$$

Este modelo pode ser considerado linear e invariante no tempo, com uma entrada de controle $u(t)$ que também age, após a modulação por $\cos 2\omega t$, como um sinal de perturbação.

A principal diferença entre a abordagem magnética convencional de posicionamento do rotor (mancal magnético) e a nova (mancal-motor) é o surgimento do termo harmônico dado na equação (5.4). Os mancais magnéticos tradicionais utilizam correntes DC (sinais de baixa frequência) como variáveis de controle, no entanto, se empregarmos as forças de relutância presentes no núcleo de motores AC para propósitos de posicionamento (mancal-motor), o preço a ser pago é o surgimento de sinais de perturbação de alta frequência.

É muito razoável esperar que o sistema inteiro contenha inércias mecânicas suficientes para se comportar como um filtro passa-baixas. Neste caso as frequências em $\cos 2\omega t$ seriam “absorvidas pela massa” e um modelo mais simples, sem a perturbação harmônica, seria gerado. Várias simulações foram realizadas (David 2000) mostrando que este é sem dúvida o caso, e o modelo descrito pela equação (5.4) pode ser seguramente substituído pelo tradicional:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5.6)$$

onde A e B são as matrizes explicitadas em (5.3) e (5.5), respectivamente.

5.3 Controle Centralizado

O sistema descrito em (5.6) pode ser controlado, por exemplo, pelas técnicas de controle ótimo baseadas no regulador linear quadrático (LQR) (Athans & Falb 1966, Anderson & Moore 1971, Zhou et al. 1995, Gomes 1999). O objetivo é encontrar uma realimentação de estados do tipo

$$u(t) = F_c^* x(t)$$

que seja capaz de minimizar uma função custo, também denominada índice de desempenho, dada por

$$J = \int_0^{\infty} [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)]dt \quad (5.7)$$

onde Q é uma matriz de ponderação associada aos estados do sistema e R é uma matriz de ponderação associada às entradas do sistema.

As matrizes de ponderação expressam a maior ou menor relevância dos estados e entradas para a função custo e são escolhidas de acordo com o problema. No presente trabalho as matrizes de ponderação serão dadas por:

$$Q = \begin{bmatrix} I_4 & 0_4 \\ 0_4 & 0_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

onde os escalares r_i serão unitários, em princípio.

Supondo-se que o sistema dado por (5.6) seja estabilizável e detetável, a Equação de Riccati Matricial Algébrica (ERMA) a ele associada,

$$A'P + PA + Q - PBR^{-1}B'P = 0$$

apresentará uma única solução positiva definida P^* . Assim a matriz de ganhos F_c^* que minimiza (5.7) também será única e dada por:

$$F_c^* = -B'R^{-1}P^*$$

Esta estratégia, conhecida como técnica de controle LQR centralizado gera como solução uma matriz de ganhos de realimentação F_c^* com poucos elementos nulos, neste trabalho representada por uma matriz de 32 elementos (4×8). Este fato pode dificultar a implementação do controle, já que o esforço computacional do algoritmo cresce (David 2000).

Na figura 5.1, é apresentada a dinâmica do sistema em malha fechada caracterizada por seu diagrama de blocos.

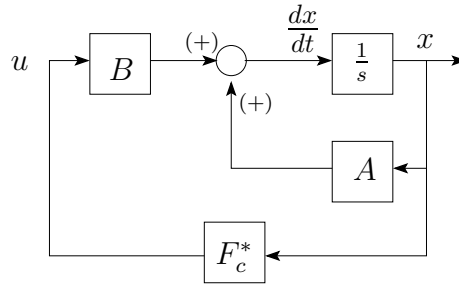


FIGURA 5.1: Técnica de Controle LQR Centralizado para Realimentação de Estados.

5.3.1 Exemplos

Nesta subseção será analisada a aplicação da técnica de controle centralizado em um exemplo acadêmico e em um real.

Exemplo 5.1 Considere o sistema linear e invariante no tempo dado por: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$; $x(t_0) = x_0$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad x_0 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema: Determine F_c^* que minimiza $J = \int_0^\infty [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)]dt$, onde:

$$Q = \begin{bmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{bmatrix} \quad e \quad R = I_2$$

A Equação de Riccati Matricial Algébrica (ERMA) associada a esse sistema é:

$$A'P + PA + Q - PBR^{-1}B'P = 0$$

Ela apresenta como solução única a seguinte matriz positiva definida:

$$P^* = \begin{bmatrix} 3.1015 & 1.4050 & 2.3362 & 2.1021 \\ 1.4050 & 2.7183 & 1.0694 & 2.7307 \\ 2.3362 & 1.0694 & 2.9891 & 1.3099 \\ 2.1021 & 2.7307 & 1.3099 & 3.7139 \end{bmatrix}$$

Com isso a matriz de ganhos F_c^* será:

$$F_c^* = -B'R^{-1}P^* = \begin{bmatrix} -2.3362 & -1.0694 & -2.9891 & -1.3099 \\ -2.1021 & -2.7307 & -1.3099 & -3.7139 \end{bmatrix}$$

O índice de desempenho será dada por: $J = x_0'P^*x_0 = 3.1015 \times 10^{-8}$.

O algoritmo de solução deste exemplo se encontra codificado em matlab e presente no Apêndice A.

Exemplo 5.2 Considere os seguintes parâmetros (em unidades SI) associados às características físicas e geométricas do protótipo em estudo: $a = -6.8900 \times 10^{-2}$, $b = 8.2800 \times 10^{-2}$, $c = -1.4800 \times 10^{-1}$, $d = 1.6300 \times 10^{-1}$, $g = -2.1800 \times 10^{-1}$, $m = 4.9100$, $I_{xx} = I_{yy} = 5.0300 \times 10^{-2}$, $I_{zz} = 2.2600 \times 10^{-6}$, $K_h = 1.3680 \times 10^3$, $C_h = 2.8900$, $\gamma = 6.0000 \times 10^{-1}$, $n = 1.6500 \times 10^2$, $n_e = \gamma \times n = 9.9000 \times 10$, $h = 4.0000 \times 10^{-4}$, $S_a = 3.7340 \times 10^{-3}$, $I_0 = 1.1700$, $\mu_0 = 4 \times \pi \times 10^{-7}$, $L_r = 3.4240 \times 10^{-2}$, $L_{mag} = 3.5043 \times 10^{-1}$, $R_r = 1.3970 \times 10$, $\tau_r = 2.4500 \times 10^{-3}$, $\tau_{mag} = 2.5080 \times 10^{-2}$, $\omega = 2.4000 \times 10^2 \times \pi$, $f = 1.2000 \times 10^2$, $\sigma = 5.0000 \times 10^{-2}$ e $\omega_r = 9.5000 \times 10^{-1} \times \omega/2$. De posse destes parâmetros é possível gerar o sistema ligado ao protótipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); x(t_0) = x_0$$

onde :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad e \quad x_0 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 2.7820 \times 10^5 & 7.0666 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 1.0314 \times 10^5 & 3.2966 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.7820 \times 10^5 & 7.0666 \times 10^4 \\ 0 & 0 & 1.0314 \times 10^5 & 3.2966 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -2.9921 & 5.4972 \times 10^{-1} & -7.6577 \times 10^{-3} & 7.6577 \times 10^{-3} \\ 1.7801 & -3.2705 \times 10^{-1} & 8.4338 \times 10^{-3} & -8.4338 \times 10^{-3} \\ 7.6577 \times 10^{-3} & -7.6577 \times 10^{-3} & -2.9921 & 5.4972 \times 10^{-1} \\ -8.4338 \times 10^{-3} & 8.4338 \times 10^{-3} & 1.7801 & -3.2705 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 6.6357 \times 10 & -6.5249 & 0 & 0 \\ -3.2017 & 7.7067 \times 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.6357 \times 10 & -6.5249 \\ 0 & 0 & -3.2017 & 7.7067 \times 10 \end{bmatrix}$$

Problema: Determine F_c^* que minimiza $J = \int_0^\infty [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)]dt$, onde:

$$Q = \begin{bmatrix} I_4 & 0_4 \\ 0_4 & 0_4 \end{bmatrix} \quad e \quad R = I_4$$

A Equação de Riccati Matricial Algébrica (ERMA) associada a esse sistema é:

$$A'P + PA + Q - PBR^{-1}B'P = 0$$

Ela apresenta como solução única a seguinte matriz positiva definida:

$$P^* = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2' & P_3 \end{bmatrix}$$

onde:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 7.4486 \times 10^4 & 3.7435 \times 10^4 & 4.4768 \times 10^{-4} & -4.3345 \times 10^{-2} \\ 3.7435 \times 10^4 & 6.9775 \times 10^4 & 4.2498 \times 10^{-2} & -3.5759 \times 10^{-3} \\ 4.4768 \times 10^{-4} & 4.2498 \times 10^{-2} & 7.4486 \times 10^4 & 3.7435 \times 10^4 \\ -4.3345 \times 10^{-2} & -3.5759 \times 10^{-3} & 3.7435 \times 10^4 & 6.9775 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1.3332 \times 10^2 & 5.0661 \times 10 & -6.6992 \times 10^{-4} & 5.6019 \times 10^{-4} \\ 5.0641 \times 10 & 1.1689 \times 10^2 & 7.2417 \times 10^{-4} & -6.1455 \times 10^{-4} \\ 6.7194 \times 10^{-4} & -5.6191 \times 10^{-4} & 1.3332 \times 10^2 & 5.0661 \times 10 \\ -7.2353 \times 10^{-4} & 6.0191 \times 10^{-4} & 5.0641 \times 10 & 1.1689 \times 10^2 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 2.4388 \times 10^{-1} & 6.1320 \times 10^{-2} & 1.8692 \times 10^{-9} & -9.7343 \times 10^{-9} \\ 6.1320 \times 10^{-2} & 1.9850 \times 10^{-1} & 1.0444 \times 10^{-8} & -1.1152 \times 10^{-8} \\ 1.8692 \times 10^{-9} & 1.0444 \times 10^{-8} & 2.4388 \times 10^{-1} & 6.1320 \times 10^{-2} \\ -9.7343 \times 10^{-9} & -1.1152 \times 10^{-8} & 6.1320 \times 10^{-2} & 1.9850 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

Com isso a matriz de ganhos F_c^* será:

$$F_c^* = -B'R^{-1}P^* = \begin{bmatrix} -8681 & -2986 & 0 & 0 & -16 & -3 & 0 & 0 \\ -3033 & -8678 & 0 & 0 & -3 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8685 & -2986 & 0 & 0 & -16 & -3 \\ 0 & 0 & -3035 & -8678 & 0 & 0 & -3 & -15 \end{bmatrix}$$

O índice de desempenho será dado por: $J = x_0'P^*x_0 = 7.4486 \times 10^{-4}$.

Esta solução ótima apresenta vários elementos praticamente nulos, o que reforça o comentário feito anteriormente (capítulos 2 e 3) a respeito de um desacoplamento natural existente no protótipo. O algoritmo de solução deste exemplo se encontra codificado em matlab e presente no Apêndice B.

5.4 Controle Descentralizado

É notório que a presença de elementos nulos na matriz de ganhos de realimentação diminui a carga computacional e conseqüentemente facilita a implementação do controle. Assim, a presença de elementos nulos na matriz de ganhos é algo interessante e desejável à implementação.

A estratégia de controle conhecida como técnica de controle descentralizado consiste em impor a existência de elementos nulos na matriz de ganhos, dando a ela uma estrutura esparsa e favorecendo a simplificação do sistema de controle. Para cada tipo de problema existem posições pré-estabelecidas da matriz de ganhos a serem zeradas, em função das características físicas do particular sistema.

Para o sistema considerado no presente trabalho pode-se pensar em uma matriz mais esparsa dada, por exemplo, por:

$$F_D = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Esta matriz permite uma estrutura de controle descentralizada, onde cada uma

das quatro variáveis de entrada tem um comportamento independente e desacoplado dos outros. Cada uma delas leva em consideração apenas duas variáveis de estado (Schweitzer et al. 1994). Como cada variável de controle depende de uma posição e de uma velocidade (derivada) esta estratégia pode ser chamada de controle PD descentralizado.

A abordagem do controle descentralizado ótimo é uma adaptação do controle LQR tradicional para a restrição descentralizada. O problema LQR descentralizado (LQRd) tem como objetivo procurar uma matriz de realimentação com estrutura descentralizada como em (5.9) que minimize a função custo comum ao controle centralizado dado por (5.7) (Schweitzer et al. 1994, David 2000, David et al. 2000).

O modelo é dividido em quatro subsistemas, cada um associado a uma posição e a uma direção. Assim:

Subsistema 1: (direção x — posição inferior)

Vetor de estados:

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_c \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = C_1 x$$

Matriz de inserção:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Variável de entrada:

$$u_1 = u_{ax}$$

Subsistema 2: (direção x - posição superior)

Vetor de estados:

$$x_2 = \begin{bmatrix} x_d \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} = C_2 x$$

Matriz de inserção:

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Variável de entrada:

$$u_2 = u_{bx}$$

Subsistema 3: (direção y - posição inferior)

Vetor de estados:

$$x_3 = \begin{bmatrix} y_c \\ \dot{y}_c \end{bmatrix} = C_3 x$$

Matriz de inserção:

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Variável de entrada:

$$u_3 = u_{ay}$$

Subsistema 4: (direção y - posição superior)

Vetor de estados:

$$x_4 = \begin{bmatrix} y_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} = C_4 x$$

Matriz de inserção:

$$C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Variável de entrada:

$$u_4 = u_{by}$$

Sendo B_i a i -ésima coluna de B, e u_i a i -ésima componente de u, a dinâmica em malha aberta do sistema descrito por (5.6) é

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^4 B_i u_i$$

Em uma estrutura descentralizada, a entrada de cada subsistema depende apenas dos estados contidos no subsistema: $u_i = F_i x_i$. O vetor de controle fica

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 x_1 \\ F_2 x_2 \\ F_3 x_3 \\ F_4 x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 C_1 \\ F_2 C_2 \\ F_3 C_3 \\ F_4 C_4 \end{bmatrix} x \quad (5.10)$$

As matrizes de realimentação de cada subsistema são

$$F_1 = \begin{bmatrix} p_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} p_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} p_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

$$F_4 = \begin{bmatrix} p_4 & d_4 \end{bmatrix}$$

Substituindo as expressões associadas às matrizes de inserção e as matrizes de realimentação de cada subsistema em (5.10), vem que:

$$u = \begin{bmatrix} F_1 C_1 \\ F_2 C_2 \\ F_3 C_3 \\ F_4 C_4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix} x = F_D x \quad (5.11)$$

onde F_D apresenta a natureza descentralizada explicitada em (5.9).

A lei de controle dada por (5.11) visa a minimização da mesma função custo empregada no caso centralizado, dada por (5.7), que possui como matrizes de ponderação as apresentadas em (5.8).

Assim o problema LQRd é enunciado da seguinte forma — Encontre uma matriz de realimentação F_D que satisfaça a restrição dada por (5.11) e que minimize a função custo:

$$J = \int_0^\infty [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)]dt = \int_0^\infty \left[x'(t)Qx(t) + \sum_{i=1}^4 u_i'(t)r_i u_i(t) \right] dt \quad (5.12)$$

A dinâmica do sistema controlado é representada pela matriz em malha fechada e pela matriz de transição de estados dadas por:

$$A_0 = A + \sum_{i=1}^4 B_i F_i C_i$$

$$\phi(t) = e^{A_0 t}$$

A trajetória de estados e as condições iniciais se encontram associadas respectivamente às seguintes matrizes:

$$X = \int_0^\infty x(t)x'(t)dt = \int_0^\infty \phi(t)X_0\phi'(t)dt$$

$$X_0 = x_0x_0'$$

Reescrevendo a função custo dada por (5.12) em termos do vetor de estados iniciais x_0 , tem-se após a substituição de (5.11) em (5.12) que:

$$J(u) = \int_0^\infty \left(x_0'\phi'Q\phi x_0 + \sum_{i=1}^4 x_0'\phi' C_i' F_i' r_i F_i C_i \phi x_0 \right) dt$$

$$J(u) = x_0' \left\{ \int_0^\infty \left[\phi'(t) \left(Q + \sum_{i=1}^4 C_i' F_i' r_i F_i C_i \right) \phi(t) \right] dt \right\} x_0$$

$$J(u) = x_0' P x_0$$

O desenvolvimento teórico acima (Bleuler 1984, David 2000) em conjunto com os conceitos da teoria LQR é a base para o enunciado das condições necessárias de otimalidade do problema LQRd estabelecidas de acordo com o seguinte teorema:

Teorema 5.1 (Bleuler 1984) *Se a matriz de ganhos de realimentação F_D é uma solução para o problema LQRd — F_D satisfaz (5.11) e minimiza (5.12) — então*

$$r_i F_i C_i X C_i' + B_i' P X C_i' = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.13)$$

$$A_0 X + X A_0' + X_0 = 0 \quad (5.14)$$

$$A_0' P + P A_0 + Q + \sum_{i=1}^4 C_i' F_i' r_i F_i C_i = 0 \quad (5.15)$$

Estas são condições necessárias, assim como as condições para o problema centralizado clássico. Isto significa que uma solução pode satisfazer estas condições e não ser ótima.

Uma diferença marcante entre os casos centralizado e descentralizado é que neste último as condições dependem dos estados iniciais.

No caso centralizado é muito fácil extrair a solução F_c^* da solução da equação de Riccati: $F_c^* = -B'R^{-1}P^*$, como visto. No caso descentralizado é muito difícil extrair as soluções F_D^* das condições (5.13) a (5.15), mesmo supondo que existe uma solução única para (5.15), a correspondente descentralizada da equação de Riccati Algébrica.

Se as equações (5.14) e (5.15) pudessem ser resolvidas, as suas soluções X e P seriam substituídas em (5.13) permitindo a determinação dos F_i . Mas (5.15) e (5.14) dependem de A_0 , que depende dos F_i que depende de P e X , que depende de A_0 . Um algoritmo é necessário, mas antes de apresentá-lo, note que ao se decompor o sistema em apenas um subsistema nós teremos $u_1 = u$, $x_1 = x$, $C_1 = I$, etc, e as expressões (5.13) a (5.15) se tornam:

$$RFX = -B'PX$$

$$A_0X + XA'_0 + X_0 = 0$$

$$A'_0P + PA_0 + Q + F'RF = 0$$

que podem ser reconhecidas como as condições centralizadas.

5.4.1 Algoritmo para o Caso Descentralizado

Conforme visto anteriormente, a implementação do controle LQRd apresenta maior simplicidade, no entanto a complexidade do sistema de equações que define as condições necessárias de otimalidade torna difícil a busca da matriz de ganhos de realimentação desejada. A necessidade de uma solução algorítmica para o problema LQRd se torna evidente (Bleuler 1984, Anderson & Moore 1971, David 2000).

De acordo com a equação (5.11), cada linha de um F descentralizado é dada por $F_iC_i = F_{ri}$. Uma lei descentralizada é chamada de estabilizadora descentralizada se $A_0 = A + \sum_{i=1}^4 B_iF_{ri}$ possuir todos os seus autovalores na região estável do plano complexo.

Um passo genérico para o algoritmo do problema LQRd é dado por:

1. F^i , com linhas $\{F_{r1}^i, F_{r2}^i, F_{r3}^i, F_{r4}^i\}$, é um estabilizador descentralizado.
2. $A_0^i = A + BF^i = A + \sum_{k=1}^4 B_kF_{rk}^i$.
3. A_0^i, X_0 na equação (5.14) $\rightarrow X^i$.

4. A_0^i, Q, F^i, R na equação (5.15) $\rightarrow P^i$.
5. P^i, X^i na equação (5.13) $\rightarrow F^{i+1}$.
6. $F^{i+1} - F^i = \Delta^i$.
7. Δ^i é pequeno o suficiente?

As expressões (5.14) e (5.15) são Equações de Lyapunov. Um resultado bem conhecido (Vidyasagar 1978, David 2000) para elas é que: dadas matrizes quadradas M e N então, $\forall N > 0$, a equação $MX + XM' + N = 0$ possuirá uma única solução se e somente se M for estável. Neste problema a matriz A_0^i sempre satisfaz esta condição.

O resultado de um determinado passo do algoritmo, F^{i+1} , será estabilizadora, e deverá ser usada no próximo passo. Mas e o primeiro passo? Fica claro que uma estabilizadora inicial é necessária. Uma possibilidade é começar o processo todo com uma estabilizadora F qualquer, não necessariamente descentralizada. Uma candidata natural seria $F_0 = F_c^*$ a solução do LQR centralizado. Ao longo das iterações o algoritmo imporá uma estrutura descentralizada aos F^i .

Se um estabilizador inicial centralizado levar a problemas de convergência, então deve-se alterar x_0 até que se tenha a convergência do algoritmo. Se um formato descentralizado é desejado para a primeira iteração, pode pensar em alterar F_c^* , diminuindo o valor dos elementos que deveriam ser nulos. Se a matriz gerada por este último procedimento for estabilizadora, ela poderá ser usada para iniciar o algoritmo e a convergência deverá ser mais rápida, caso contrário, basta impor valores ainda menores aos valores que deveriam ser nulos e tentar novamente.

5.4.2 Exemplos

Nesta subseção será analisada a aplicação da técnica de controle descentralizado em um exemplo acadêmico e em um real.

Exemplo 5.3 *Para o sistema dado no exemplo 5.1, determinar F_D^* que minimiza $J = \int_0^\infty [x'(t)Qx(t) + \sum_{i=1}^2 u_i'(t)r_i u_i(t)]dt$, onde*

$$Q = \begin{bmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{bmatrix} \quad e \quad R = I_2$$

Considerando-se que a matriz estabilizadora inicial seja a matriz de estrutura centralizada encontrada no exemplo 5.1 e que a tolerância definida como sendo $\|\Delta^i\|$ é 1.3457×10^{-6} , tem-se após 40 iterações do algoritmo de obtenção da solução descentralizada:

$$F_D^* = \begin{bmatrix} -3.2271 & 0 & -4.4479 & 0 \\ 0 & -4.7713 & 0 & -4.2231 \end{bmatrix}$$

O índice de desempenho é dado por: $J_d = x_0' P^* x_0 = 4.6940 \times 10^{-8}$. Ele apresentou um acréscimo de 51.35% no valor do índice apresentado no exemplo 5.1 referente ao caso centralizado (sem restrição no controlador). Isto caracteriza a natureza sub-ótima da solução. O algoritmo de solução deste exemplo se encontra codificado em matlab e presente no Apêndice C.

Exemplo 5.4 Para o sistema dado no exemplo 5.2, determinar a matriz de ganhos de realimentação F_D^* dada por (5.9) que minimiza (5.12), onde

$$Q = \begin{bmatrix} I_4 & 0_4 \\ 0_4 & 0_4 \end{bmatrix} \quad e \quad R = I_4$$

Considerando-se que a matriz estabilizadora inicial seja a matriz de estrutura centralizada encontrada no exemplo 5.2 e que a tolerância definida como sendo $\|\Delta^i\|$ é 8.2504×10^{-7} , tem-se após 46 iterações do algoritmo de obtenção da solução descentralizada que as equações (5.14) e (5.15) fornecerão como solução respectivamente:

$$X^* = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2' & X_3 \end{bmatrix} \quad e \quad P^* = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2' & P_3 \end{bmatrix}$$

onde as submatrizes de X^* e P^* são:

$$X_1 = 10^{-11} \begin{bmatrix} 2.1340 & 1.9963 & 2.1340 & 1.9963 \\ 1.9963 & 1.8794 & 1.9963 & 1.8794 \\ 2.1340 & 1.9963 & 2.1340 & 1.9963 \\ 1.9963 & 1.8794 & 1.9963 & 1.8794 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = 10^{-9} \begin{bmatrix} -5.0000 & -5.4828 & -5.0000 & -5.4828 \\ -4.5172 & -5.0000 & -4.5172 & -5.0000 \\ -5.0000 & -5.4828 & -5.0000 & -5.4828 \\ -4.5172 & -5.0000 & -4.5172 & -5.0000 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = 10^{-6} \begin{bmatrix} 1.4582 & 1.5530 & 1.4582 & 1.5530 \\ 1.5530 & 1.6754 & 1.5530 & 1.6754 \\ 1.4582 & 1.5530 & 1.4582 & 1.5530 \\ 1.5530 & 1.6754 & 1.5530 & 1.6754 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 8.5617 \times 10^4 & 2.6348 \times 10^4 & 2.7035 \times 10^{-7} & -3.3940 \times 10^{-2} \\ 2.6348 \times 10^4 & 8.0834 \times 10^4 & 3.3940 \times 10^{-2} & -1.4090 \times 10^{-7} \\ 2.7035 \times 10^{-7} & 3.3940 \times 10^{-2} & 8.5617 \times 10^4 & 2.6348 \times 10^4 \\ -3.3940 \times 10^{-2} & -1.4090 \times 10^{-7} & 2.6348 \times 10^4 & 8.0834 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1.4848 \times 10^2 & 3.8996 \times 10 & -5.6622 \times 10^{-4} & 5.3179 \times 10^{-4} \\ 3.5566 \times 10 & 1.2850 \times 10^2 & 6.0723 \times 10^{-4} & -5.7124 \times 10^{-4} \\ 5.6623 \times 10^{-4} & -5.3179 \times 10^{-4} & 1.4848 \times 10^2 & 3.8996 \times 10 \\ -6.0724 \times 10^{-4} & 5.7124 \times 10^{-4} & 3.5566 \times 10 & 1.2850 \times 10^2 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 2.6566 \times 10^{-1} & 4.4306 \times 10^{-2} & 1.6163 \times 10^{-12} & 5.1436 \times 10^{-8} \\ 4.4306 \times 10^{-2} & 2.1193 \times 10^{-1} & -5.1436 \times 10^{-8} & -9.1118 \times 10^{-13} \\ 1.6163 \times 10^{-12} & -5.1436 \times 10^{-8} & 2.6566 \times 10^{-1} & 4.4306 \times 10^{-2} \\ 5.1436 \times 10^{-8} & -9.1118 \times 10^{-13} & 4.4306 \times 10^{-2} & 2.1193 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

Levando estas matrizes na equação (5.13), chega-se a matriz de ganhos descentralizada:

$$F_D^* = \begin{bmatrix} -11720 & 0 & 0 & 0 & -20.692 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11616 & 0 & 0 & 0 & -16.741 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11720 & 0 & 0 & 0 & -20.692 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11616 & 0 & 0 & 0 & -16.741 \end{bmatrix}$$

O índice de desempenho é dado por: $J_d = x_0' P^* x_0 = 8.5617 \times 10^{-4}$. Ele apresentou um acréscimo de 14.94% no valor do índice apresentado no exemplo 5.2 referente ao caso centralizado (sem restrição no controlador). Isto caracteriza a natureza sub-ótima

da solução. O algoritmo de solução deste exemplo se encontra codificado em matlab e presente no Apêndice D.

Capítulo 6

Controle Descentralizado a Dois Parâmetros

6.1 Introdução

O protótipo em estudo, bem como vários outros sistemas reais, apresenta um número par de variáveis de estado. Além disto, a segunda metade destas variáveis é a derivada da primeira, como já visto na equação (5.2), aqui repetida:

$$x = \begin{bmatrix} x_I \\ x_{II} \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad x_{II} = \dot{x}_I \quad (6.1)$$

Uma realimentação de estados genérica para um tal sistema pode ser escrita como

$$u = Fx = F_I x_I + F_{II} x_{II}$$

onde as partições F_I e F_{II} de F representam as partes proporcional e derivativa do controle, e passam a ser designadas por F_p e F_d , respectivamente:

$$u = Fx = \begin{bmatrix} F_p & F_d \end{bmatrix} x = F_p x_I + F_d \dot{x}_I$$

Na solução ótima centralizada os ganhos matriciais F_p^* e F_d^* são matrizes “cheias”, como visto. Na solução descentralizada, os ganhos F_p^* e F_d^* são matrizes diagonais,

cada uma delas dependendo de $n/2$ ganhos distintos. No caso do protótipo:

$$F_p^* = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F_d^* = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

O que se pretende a partir de agora é impor às partições proporcional e derivativa uma estrutura ainda mais particular, onde cada uma delas depende de apenas um parâmetro real. Para o caso do protótipo:

$$F_p = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} = pI \quad \text{e} \quad F_d = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} = dI \quad (6.3)$$

A realimentação de estados decorrente é $u = F_p x_I + F_d \dot{x}_I = p x_I + d \dot{x}_I$ e poderia ser chamada de lei de controle proporcional derivativa a dois parâmetros: PD_{2p} ou simplesmente PD_2 .

Esta abordagem, assim como a imediatamente anterior, permite que as variáveis de entrada sejam trabalhadas de forma desacoplada e independente, sendo que cada uma delas leva em consideração apenas duas variáveis de estado, uma posição e sua respectiva derivada. Esta nova técnica pode, deste modo, ser considerada uma técnica descentralizada com restrições adicionais. Sua grande vantagem seria a facilidade de implementação, pois apenas dois parâmetros devem ser providenciados pelo controlador.

Antes de atacar o problema de uma lei de controle linear quadrática ótima a dois parâmetros, ou seja, o problema $LQRPD_{2p}$, é necessário verificar a estabilizabilidade das plantas por meio de realimentação PD_{2p} .

6.2 Estabilização por Lei PD_{2p}

Nesta seção analisaremos a estabilização de um exemplo acadêmico e do protótipo mediante o emprego de uma matriz PD_{2p} na realimentação de estados.

6.2.1 Exemplos

Exemplo 6.1 Considere o sistema linear e invariante no tempo dado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(t_0) = x_0$$

onde :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad x_0 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são: 2.2470, -0.8019 , -0.0000 e 0.5550, o que caracteriza um sistema instável.

Considere a seguinte matriz, cujos parâmetros p e d foram tomados próximos à média aritmética dos parâmetros p_i e d_i da matriz F_D^* encontrada no exemplo 5.3:

$$F_{2p} = \begin{bmatrix} -4.0 & 0.0 & -4.5 & 0.0 \\ 0.0 & -4.0 & 0.0 & -4.5 \end{bmatrix}$$

Ao se empregar F_{2p} na realimentação dos estados deste sistema, a sua dinâmica em malha fechada passará a ser dada por:

$$\dot{x}(t) = (A + BF_{2p})x = A_F x = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ -3.0 & 1.0 & -3.5 & 1.0 \\ 1.0 & -3.0 & 0.0 & -3.5 \end{bmatrix} x$$

Os autovalores de A_F são: $-2.4571 \pm 0.88941i$ e $-1.0429 \pm 0.28974i$, e assim a realimentação PD_{2p} dada por F_{2p} estabiliza a planta acima.

Existe uma família de matrizes PD_{2p} que estabilizam a planta em questão, definindo uma região de estabilidade no espaço dos parâmetros (p, d) . O programa codificado em Matlab (Apêndice E) gera alguns pontos dessa região, como se vê na figura 6.1.

Exemplo 6.2 Considere o protótipo em estudo, cujo modelo já foi visto nos exemplos 5.2 e 5.4:

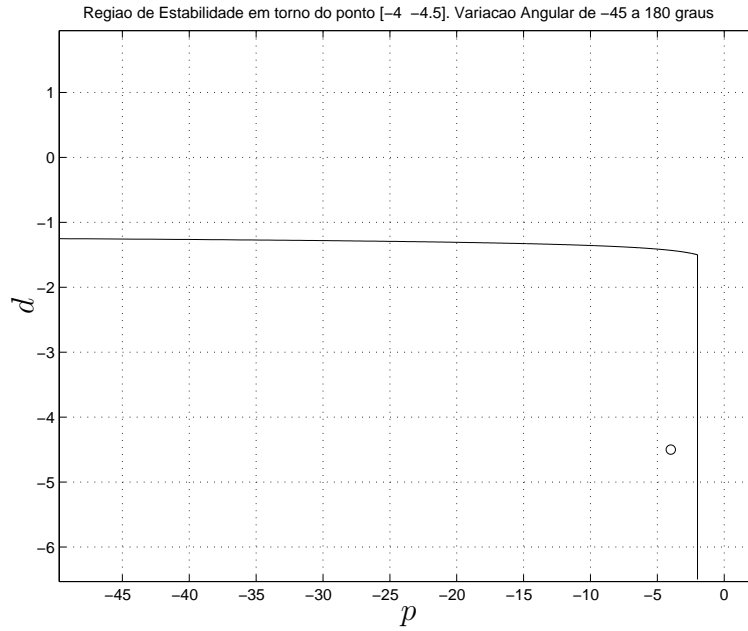


FIGURA 6.1: Região Delimitadora de Matrizes PD_{2p} Estabilizadoras para o Exemplo 6.1

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(t_0) = x_0$$

Os autovalores de A são: $461.8949 \pm 0.00782i$, $626.8493 \pm 0.00020i$, $-464.9623 \pm 0.00788i$ e $-627.1011 \pm 0.00019i$, caracterizando um sistema instável.

Considere a seguinte matriz no formato PD_{2p} cujos parâmetros p e d foram tomados como sendo a média aritmética dos parâmetros p_i e d_i da matriz F_D^* encontrada no exemplo 5.4:

$$F_{2p} = \begin{bmatrix} -11668 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11668 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11668 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11668 & 0 & 0 & 0 & -19 \end{bmatrix}$$

Ao se empregar F_{2p} na realimentação dos estados deste sistema, a sua dinâmica em malha fechada passará a ser dada por:

$$\dot{x}(t) = (A + BF_{2p})x = A_F x = \begin{bmatrix} 0_4 & I_4 \\ A_{F3} & A_{F4} \end{bmatrix} x$$

onde:

$$A_{F_3} = 10^5 \begin{bmatrix} -4.9606 & 1.4680 & 0 & 0 \\ 1.4050 & -5.6956 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.9606 & 1.4680 \\ 0 & 0 & 1.4050 & -5.6956 \end{bmatrix}$$

$$A_{F_4} = \begin{bmatrix} -1.2638 \times 10^3 & 1.2452 \times 10^2 & -7.6577 \times 10^{-3} & 7.6577 \times 10^{-3} \\ 6.2613 \times 10 & -1.4646 \times 10^3 & 8.4338 \times 10^{-3} & -8.4338 \times 10^{-3} \\ 7.6577 \times 10^{-3} & -7.6577 \times 10^{-3} & -1.2638 \times 10^3 & 1.2452 \times 10^2 \\ -8.4338 \times 10^{-3} & 8.4338 \times 10^{-3} & 6.2613 \times 10 & -1.4646 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

Os autovalores da matriz A_F são: $-712.94 \pm 371.52i$, $-712.91 \pm 371.51i$, $-788.72 \pm 0.0038999i$ e $-513.81 \pm 0.0002763i$, e assim a realimentação PD_{2p} dada por F_{2p} estabiliza o modelo acima. Existe uma família de matrizes PD_{2p} que estabilizam o modelo em questão e definem uma região de estabilidade no espaço dos parâmetros (p, d) . O programa citado anteriormente foi aplicado para gerar alguns pontos dessa região, como se vê na figura 6.2.

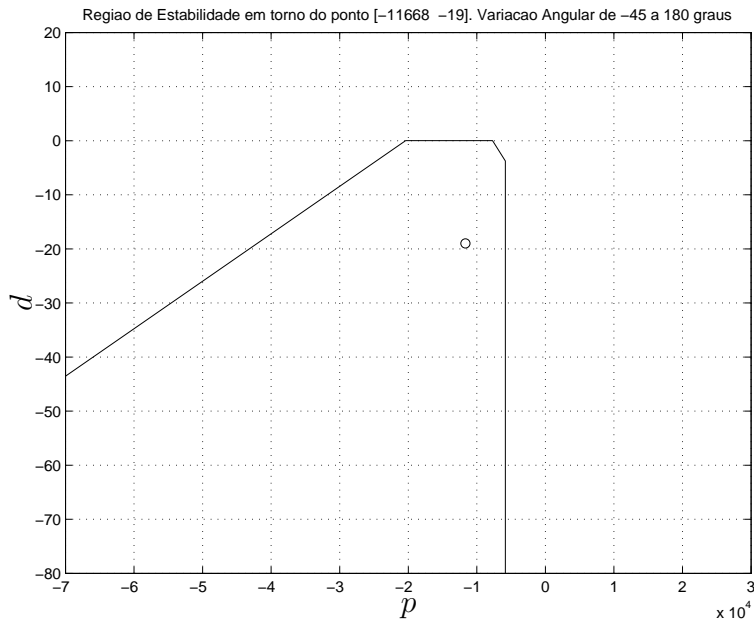


FIGURA 6.2: Região Delimitadora de Matrizes PD_{2p} Estabilizadoras para o Exemplo 6.2

O programa responsável pela geração dos pontos no domínio de estabilidade no espaço dos parâmetros (p, d) é explicado a seguir.

Supomos dadas matrizes A e B que caracterizam um sistema instável, e uma matriz de ganhos de realimentação F no formato PD_{2p} que o estabiliza. Os elementos desta matriz definem um ponto P_E do domínio de estabilidade RE no espaço (p, d) . É arbitrado um novo ponto P_I no espaço (p, d) que gera uma F não estabilizadora, ou seja, P_I é um ponto fora de RE . As coordenadas de P_E e P_I são respectivamente (p_E, d_E) e (p_I, d_I) , onde $p_I = p_E + D \cos \theta$, $d_I = d_E + D \sin \theta$ e θ é o ângulo formado entre a reta que une os pontos e o eixo p . Calcula-se então o ponto médio M do segmento de reta que une P_E e P_I e realiza-se o teste de estabilidade deste, ou seja, calcula-se os autovalores do sistema a malha fechada formado a partir da matriz de realimentação F associada. Se M for um ponto estável (pertencente a RE), o ponto P_E passa a ser traduzido por suas coordenadas, senão o ponto P_I é quem passará a ser descrito por suas coordenadas. Feito isso, calcula-se a distância entre os novos pontos formados (norma da diferença entre os vetores associados) e compara-se com o valor inicialmente estipulado (tolerância), se o valor da distância for maior, o processo prossegue, senão o processo termina, suficientemente próximo do ponto situado na fronteira da região de estabilidade. O processo é então repetido para outros valores de θ e a seqüência de pontos passam a dar uma idéia do contorno delimitador de RE . Neste programa os valores de θ variaram de -45 a 180° com uma resolução de 0.1250° .

Este procedimento foi inspirado pelo método de bisseção que é um método numérico utilizado para se encontrar as raízes de uma função (Belegundu & Chandrupatla 1999).

6.3 Regulador Linear Quadrático

Antes de entrar nos detalhes do controle ótimo PD_{2p} apresentaremos uma revisão sucinta dos aspectos principais da teoria básica do Regulador Linear Quadrático. Mais detalhes poderão ser encontrados em um sem número de referências, por exemplo (Athans & Falb 1966, Anderson & Moore 1971, Zhou et al. 1995, Gomes 1999).

Dado um sistema descrito pelo modelo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

encontrar uma entrada de controle u que minimize o índice

$$J = J(x_0, u(\cdot)) = \int_{t_0}^{\infty} [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)] dt$$

onde $Q = Q' \geq 0$ e $R = R' > 0$.

Este é o Problema do Regulador Linear Quadrático clássico para um sistema linear e invariante no tempo, com horizonte de tempo infinito. Desde que condições suaves de existência sejam satisfeitas — estabilizabilidade do par (A, B) — a sua solução é única e dada por

$$u^*(t) = F^*x(t)$$

onde a matriz de ganhos F^* pode ser obtida a partir de uma equação de Riccati, como é bem conhecido.

Esta solução ótima é uma lei de controle por realimentação de estados, e chega-se a ela sem impor qualquer tipo de restrição a u . Por uma especial característica dos meandros matemáticos envolvidos, a solução final envolve uma realimentação, e isto é muito interessante para o pessoal de controle, visto que realimentações aumentam a robustez geral da solução.

6.3.1 Regulador Linear com Restrições no Controle

Trata-se da mesma planta acima com o mesmo índice de desempenho a ser minimizado, mas agora se exige, desde o começo, que

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \quad u(t) = Fx(t) \\ 2. \quad \text{restrições extras} \end{array} \right.$$

A entrada de controle u não é mais livre, ela deve ser obtida por meio de uma realimentação linear, estática e invariante no tempo dos estados (restrição 1). Além disso pode haver requisitos adicionais na estrutura de F (restrição 2).

Pode-se desejar, por exemplo, uma realimentação estática das variáveis de saída, ou seja, $u(t) = Ky(t) = KCx(t)$. Detalhes sobre este problema podem ser encontrados em (Levine & Athans 1970, Anderson & Moore 1971).

As exigências adicionais podem envolver descentralização, caso onde F deve ser

decomposta em blocos como os vistos em (6.2) (Bleuler 1984, Schweitzer et al. 1994, David 2000).

No presente trabalho a matriz F deve apresentar uma descentralização do tipo PD_{2p} , ou seja, é dividida em blocos que satisfazem (6.3).

Ignorando por ora estas restrições adicionais e ficando apenas com a restrição 1, após a realimentação $u = Fx$, o sistema de malha fechada fica

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

o que leva às expressões

$$x(t) = e^{(A+BF)t}x_0 \quad \text{e} \quad u(t) = Fe^{(A+BF)t}x_0$$

Chamando $A + BF = A_F$ o índice fica

$$\begin{aligned} J &= x_0' \left[\int_{t_0}^{\infty} e^{A_F t} (Q + F'RF) e^{A_F t} dt \right] x_0 \\ &= x_0' P(t_0, F) x_0 \\ &= J(x_0, t_0, F) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Seria fácil verificar (Vidyasagar 1978) que $P = P(t_0, F)$ é solução da equação de Lyapunov

$$PA_F + A_F'P + Q + F'RF = 0$$

e é também independente de t_0 : $P = P(F)$ (Anderson & Moore 1971).

Um novo problema pode ser enunciado

Problema 6.1 *Encontrar F que minimiza*

$$J(x_0, F) = x_0' P x_0$$

sujeito a

$$\begin{cases} 1. & P(A + BF) + (A + BF)'P + Q + F'RF = 0 \\ 2. & \text{restrições adicionais em } F \end{cases}$$

Este é um problema de otimização estática para o qual se pode, de modo geral, dizer que

- para um dado x_0 existe um — ou pelo menos um — valor de F que resolve o problema.
- para um x_0 diferente o índice muda e a solução (ou as soluções) serão provavelmente diferentes.

A falta de unicidade e, principalmente, a dependência das condições iniciais são aspectos desagradáveis, seria muito interessante ter uma única solução ótima.

Nas próximas seções trataremos deste problema, onde a dependência de x_0 existe, e posteriormente veremos maneiras de contornar isso.

6.4 Controle Ótimo PD_{2p} - Caso I

Nesta seção serão apresentados o problema $LQRPD_{2p}$ para o caso em que a função custo depende das condições iniciais, alguns conceitos matemáticos preliminares e as condições necessárias de otimalidade do problema.

Seja o sistema linear e invariante no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(t_0) = x_0 \quad (6.5)$$

onde o estado x é dado por (6.1) e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Problema 6.2 *Minimize* $J = \int_0^\infty [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)]dt$, onde

$$Q = Q' = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{bmatrix} \geq 0 \quad e \quad R = R' > 0 \quad (6.7)$$

sabendo que $u = Fx = F_p x_I + F_d x_{II} = p x_I + d x_{II}$

Lançando mão dos desenvolvimentos da seção anterior este problema pode ser reformulado.

Problema 6.3 Dado o sistema linear e invariante no tempo modelado pela equação (6.5) onde A e B são como em (6.6) e Q e R são dados por (6.7), encontrar F que minimiza

$$J(x_0, F) = x_0' P x_0$$

sujeito a

$$\begin{cases} 1) & P(A + BF) + (A + BF)'P + Q + F'RF = 0 \\ 2) & F = \begin{bmatrix} F_p & F_d \end{bmatrix}, \quad F_p = pI, \quad F_d = dI \end{cases}$$

Antes de prosseguir com a análise do problema, algumas definições e conceitos matemáticos a ele associados (Levine & Athans 1970, Yudilevitch 1994) se fazem necessários.

6.4.1 Aspectos Matemáticos Preliminares

Definição 1 Seja $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então o traço de M é dado por:

$$\text{tr}[M] = \sum_{i=1}^n m_{ij}$$

Propriedade 1 Sendo $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $m, n \in \mathbb{R}$, o operador traço possui as seguintes propriedades

$$\begin{cases} \text{tr}[M'] = \text{tr}[M] \\ \text{tr}[mM + nN] = m \text{tr}[M] + n \text{tr}[N] \\ \text{tr}[PQ] = \text{tr}[QP] \end{cases}$$

A análise de matrizes pode ser muito simplificada pelo auxílio do traço. Para aprofundar estas idéias seguem os conceitos de função traço e suas derivadas.

Definição 2 (Levine & Athans 1970) A função real de variável matricial

$$f : \mathbb{R}^{r \times n} \mapsto \mathbb{R}$$

com lei de associação

$$X \mapsto f(X)$$

é uma função traço se

$$f(X) = \text{tr}[F(X)]$$

onde $F : \mathbb{R}^{r \times n} \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma função matricial de variável matricial continuamente diferenciável. O índice $J(x_0, F)$ que queremos minimizar é uma função traço. O próximo resultado estabelece o conceito de derivada de uma função traço.

Lema 6.1 (Kleinman 1966) *Seja $f : \mathbb{R}^{r \times n} \mapsto \mathbb{R}$ uma função traço. Dadas X e $\Delta_X \in \mathbb{R}^{r \times n}$, se existir $M \in \mathbb{R}^{n \times r}$ tal que:*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(X + \epsilon \Delta_X) - f(X)}{\epsilon} = \text{tr}[M \Delta_X]$$

então $M \in \mathbb{R}^{n \times r}$ é a derivada de f ao longo de Δ_X e escreveremos

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = M'(X)$$

6.4.2 Cálculo do Gradiente Matricial

O próximo resultado aplica o conceito de derivadas matriciais às grandezas envolvidas no problema 6.3. Sendo F uma estabilizadora do par (A, B) já vimos que o índice de desempenho

$$J = \int_0^\infty [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)]dt$$

onde $Q = Q' \geq 0$, $R = R' > 0$ e $u(t) = Fx(t)$ pode ser expresso como na equação (6.4): $J = x_0' P x_0 = J(F, x_0)$

Teorema 6.1 (Yudilevitch 1994) *A derivada do índice de desempenho J acima com relação a F é dada por*

$$\frac{\partial J(F, x_0)}{\partial F} = 2[RF + B'P]L$$

onde

$$PA_F + A_F'P + Q + F'RF = 0 \tag{6.8}$$

$$LA'_F + A_FL + x_0x'_0 = 0 \quad (6.9)$$

$$A_F = A + BF \quad (6.10)$$

Demonstração do Teorema 6.1: Como se supõe (A, B) estabilizável, existe F tal que $\lambda(A + BF) = \lambda(A_F) \subset \mathbb{C}^-$. Impondo $u = Fx$ o índice fica

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty x'(t)(Q + F'RF)x(t)dt \\ &= x'_0 \left[\int_0^\infty e^{A'_F t}(Q + F'RF)e^{A_F t} dt \right] x_0 \\ &= J(F, x_0) \end{aligned}$$

Conforme já mencionado anteriormente, seria fácil garantir (Vidyasagar 1978) que

$$P = P' = \int_0^\infty e^{A'_F t}(Q + F'RF)e^{A_F t} dt$$

é solução da equação de Lyapunov.

$$PA_F + A'_F P + Q + F'RF = 0 \quad (6.11)$$

o que mostra que (6.8) vale.

Chamando $x_0x'_0 = \Pi$ e usando a propriedade 1 temos

$$\begin{aligned} J &= x'_0 P x_0 \\ &= \text{tr} [x'_0 P x_0] \\ &= \text{tr} [P \Pi] \end{aligned}$$

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\Delta_F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que $\tilde{F} = F + \alpha \Delta_F$ é também estabilizadora (supondo que existem outras estabilizadoras, seria fácil encontrar uma com a estrutura acima). A matriz de malha fechada fica

$$A + B\tilde{F} = A + BF + \alpha B\Delta_F = A_F + \alpha B\Delta_F$$

O novo índice será, por um raciocínio análogo ao anterior,

$$\tilde{J} = J(\tilde{F}, x_0) = x_0' \tilde{P} x_0 = \text{tr} [\tilde{P} \Pi]$$

onde $\tilde{P} = \tilde{P}'$ satisfaz

$$\tilde{P}(A_F + \alpha B \Delta_F) + (A_F + \alpha B \Delta_F)' \tilde{P} + Q + (F + \alpha \Delta_F)' R (F + \alpha \Delta_F) = 0$$

Qual a relação entre \tilde{P} e P ? É simples perceber que existe $\Delta_P = \Delta_P'$ tal que $\tilde{P} = P + \alpha \Delta_P$. A variação no índice pode ser calculada

$$\Delta_J = \tilde{J} - J = \text{tr} [\tilde{P} \Pi] - \text{tr} [P \Pi] \implies \Delta_J = \alpha \text{tr} [\Delta_P \Pi] \quad (6.12)$$

Lembrando que o traço de um real é o próprio real podemos estabelecer outras expressões para o índice J .

$$\begin{aligned} J &= \text{tr} [J] \\ &= \int_0^\infty \text{tr} [x'(t)(Q + F' R F)x(t)] dt \\ &= \text{tr} \left[(Q + F' R F) \int_0^\infty x(t)x'(t) dt \right] \\ &= \text{tr} [(Q + F' R F)L] = J(F, x_0) \end{aligned}$$

Como $x(t) = e^{A_F t} x_0$ temos que

$$L = L' = \int_0^\infty x(t)x'(t) dt = \int_0^\infty e^{A_F t} x_0 x_0' e^{A_F' t} dt$$

é uma solução (Vidyasagar 1978) da equação de Lyapunov

$$L A_F' + A_F L + x_0 x_0' = 0$$

o que mostra que (6.9) é verdadeira.

Um raciocínio análogo mostraria que a estabilizadora $\tilde{F} = F + \alpha \Delta_F$ leva ao índice

$$\tilde{J} = J(\tilde{F}, x_0) = \text{tr} [(Q + \tilde{F}' R \tilde{F}) \tilde{L}]$$

onde \tilde{L} é solução da equação de Lyapunov.

$$\tilde{L}(A_F + \alpha B\Delta_F)' + (A_F + \alpha B\Delta_F)\tilde{L} + x_0x_0' = 0$$

Mas $\tilde{L} = L + \alpha\Delta_L$ para algum $\Delta_L = \Delta_L'$. Para encontrar Δ_L basta substituir \tilde{L} na expressão imediatamente anterior:

$$(L + \alpha\Delta_L)(A_F' + \alpha\Delta_F'B') + (A_F + \alpha B\Delta_F)(L + \alpha\Delta_L) + \Pi = 0$$

o que levaria a

$$L\Delta_F'B' + B\Delta_FL + \Delta_LA_F' + A_F\Delta_L + \alpha(\Delta_L\Delta_F'B' + B\Delta_F\Delta_L) = 0 \quad (6.13)$$

A variação no índice pode ser calculado por meio de

$$\Delta_J = \tilde{J} - J = \text{tr}[(Q + \tilde{F}'R\tilde{F})\tilde{L}] - \text{tr}[(Q + F'RF)L]$$

que, após as substituições fica

$$\begin{aligned} \Delta_J = & 2\alpha\text{tr}[LF'R\Delta_F] + \alpha\text{tr}[(Q + F'RF)\Delta_L] + \\ & + \alpha^2\text{tr}[2\Delta_LF'R\Delta_F + \Delta_F'R\Delta_F(L + \alpha\Delta_L)] \end{aligned} \quad (6.14)$$

As equações (6.12) e (6.14) mostram duas expressões diferentes para calcular a mesma variação Δ_J . Ambas dependem de α , mas (6.12) envolve, através de Π , a condição inicial x_0 e também Δ_P , ao passo que (6.14) envolve $F, \Delta_F, L, \Delta_L, Q$ e R .

O próximo passo será eliminar Δ_P e Δ_L de (6.12) e (6.14). Multiplicando (6.11) por $\alpha\Delta_L$:

$$\alpha PA_F\Delta_L + \alpha A_F'P\Delta_L + \alpha Q\Delta_L + \alpha F'RF\Delta_L = 0$$

cujos traço é

$$\alpha\text{tr}[PA_F\Delta_L] + \alpha\text{tr}[A_F'P\Delta_L] + \alpha\text{tr}[(Q + F'RF)\Delta_L] = 0$$

Como $\text{tr}[A'_F P \Delta_L] = \text{tr}[\Delta_L A'_F P] = \text{tr}[P A_F \Delta_L]$ temos

$$2\alpha \text{tr}[P A_F \Delta_L] + \alpha \text{tr}[(Q + F' R F) \Delta_L] = 0 \quad (6.15)$$

Multiplicando (6.13) por αP e calculando o traço:

$$\begin{aligned} & \alpha \text{tr}[P A_F \Delta_L + P \Delta_L A'_F] + \alpha \text{tr}[P L \Delta'_F B' + P B \Delta_F L] + \\ & + \alpha^2 \text{tr}[P \Delta_L \Delta'_F B' + P B \Delta_F \Delta_L] = 0 \end{aligned}$$

Após manipulações com as propriedades básicas do traço:

$$2\alpha \text{tr}[P A_F \Delta_L] + 2\alpha \text{tr}[L P B \Delta_F] + 2\alpha^2 \text{tr}[\Delta_L P B \Delta_F] = 0$$

Comparando (6.15) com a expressão imediatamente anterior

$$\alpha \text{tr}[(Q + F' R F) \Delta_L] = 2\alpha \text{tr}[L P B \Delta_F] + 2\alpha^2 \text{tr}[\Delta_L P B \Delta_F]$$

Levando a (6.14) eliminaremos Δ_L dos termos de 1^a ordem

$$\begin{aligned} \Delta_J &= 2\alpha \text{tr}[L F' R \Delta_F] + 2\alpha \text{tr}[L P B \Delta_F] + 2\alpha^2 \text{tr}[\Delta_L P B \Delta_F] + \\ & + \alpha^2 \text{tr}[2\Delta_L F' R \Delta_F + \Delta'_F R \Delta_F (L + \alpha \Delta_L)] \\ \Delta_J &= \alpha \text{tr}[2L(F' R + P B) \Delta_F] + \alpha^2 \text{tr}[2\Delta_L(F' R + P B) \Delta_F + \\ & + \Delta'_F R \Delta_F (L + \alpha \Delta_L)] \end{aligned}$$

Quando $\alpha \rightarrow 0$ a expressão acima é dominada pelos termos de 1^a ordem em Δ_F o que leva a

$$\frac{\partial J}{\partial F} = 2(RF + B'P)L$$

C Q D

6.4.3 Condições Necessárias de Otimalidade

A partir do teorema anterior, e lembrando a conexão entre soluções minimizadoras e pontos estacionários, é imediato estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 6.2 Sendo F uma solução para o $LQRPD_{2p}$ com índice dependente das condições iniciais, então

$$(RF + B'P)L = 0 \quad (6.16)$$

onde P e L satisfazem

$$P(A + BF) + (A + BF)'P + Q + F'RF = 0 \quad (6.17)$$

$$L(A + BF)' + (A + BF)L + \Pi = 0 \quad (6.18)$$

A partir de agora entram em cena as particularidades estruturais inerentes ao problema em estudo, aqui revistas. As matrizes A , B e F são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} F_p & F_d \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

onde todos os blocos indicados são quadrados, $n \times n$ e ainda $F_p = pI$, $F_d = dI$ para reais p e d . As matrizes de ponderação Q e R e a matriz Π dos estados iniciais apresentam-se como

$$Q = Q' = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{bmatrix} \geq 0 \quad R = R' > 0 \quad \Pi = x_0 x_0' = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi_2' & \Pi_3 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6.20)$$

onde os blocos indicados são quadrados e $n \times n$.

As matrizes P e L , soluções de equações de Lyapunov, também serão particionadas em blocos quadrados e $n \times n$.

$$P = P' = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2' & P_3 \end{bmatrix} \quad L = L' = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2' & L_3 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Corolário 6.2.1 Sendo $F = \begin{bmatrix} pI & dI \end{bmatrix}$ uma solução para o $LQRPD_{2p}$ com índice de desempenho dependente das condições iniciais, então

$$\left(pR + B_2'P_2' \right) L_1 + \left(dR + B_2'P_3 \right) L_2' = 0 \quad (6.22)$$

$$\left(pR + B'_2 P'_2 \right) L_2 + \left(dR + B'_2 P_3 \right) L_3 = 0 \quad (6.23)$$

$$P_2 X_p + X'_p P'_2 + p^2 R + Q_1 = 0 \quad (6.24)$$

$$P_2 X_d + X'_p P_3 + P_1 + p dR + Q_2 = 0 \quad (6.25)$$

$$P_2 + P'_2 + P_3 X_d + X'_d P_3 + d^2 R + Q_3 = 0 \quad (6.26)$$

$$L_2 + L'_2 + \Pi_1 = 0 \quad (6.27)$$

$$L_3 + L_1 X'_p + L_2 X'_d + \Pi_2 = 0 \quad (6.28)$$

$$X_p L_2 + L'_2 X'_p + X_d L_3 + L_3 X'_d + \Pi_3 = 0 \quad (6.29)$$

onde $X_p = (A_{21} + pB_2)$ e $X_d = (A_{22} + dB_2)$

Observação 1

A solução F obtida de (6.22) a (6.29) depende do estado inicial.

Para um dado estado inicial podem existir vários mínimos locais para o problema.

As condições necessárias geradas a partir do corolário 6.2.1 traduzem oito equações a oito incógnitas ($p, d, P_1, P_2, P_3, L_1, L_2$ e L_3).

Demonstração do corolário 6.2.1: Aplicando-se o problema 6.3, e as equações (6.19), (6.20) e (6.21) ao teorema 6.2, segue de (6.16) que:

$$\left(R \begin{bmatrix} pI & dI \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P'_2 & P_3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L'_2 & L_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(R \begin{bmatrix} pI & dI \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B'_2 P'_2 & B'_2 P_3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L'_2 & L_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$R \begin{bmatrix} pL_1 + dL'_2 & pL_2 + dL_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B'_2 P'_2 L_1 + B'_2 P_3 L'_2 & B'_2 P'_2 L_2 + B'_2 P_3 L_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.30)$$

Igualando a zero o primeiro bloco da relação acima vem

$$R \begin{bmatrix} pL_1 + dL'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B'_2 P'_2 L_1 + B'_2 P_3 L'_2 \end{bmatrix} = 0$$

ou reagrupando

$$\begin{bmatrix} Rp + B'_2P'_2 \\ Rd + B'_2P_3 \end{bmatrix} L_1 + \begin{bmatrix} Rd + B'_2P_3 \\ L'_2 \end{bmatrix} = 0$$

que demonstra a validade de (6.22). Igualando a zero o 2º bloco de (6.30):

$$R \begin{bmatrix} pL_2 + dL_3 \\ B'_2P'_2L_2 + B'_2P_3L_3 \end{bmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{bmatrix} Rp + B'_2P'_2 \\ Rd + B'_2P_3 \end{bmatrix} L_2 + \begin{bmatrix} Rd + B'_2P_3 \\ L_3 \end{bmatrix} = 0$$

que demonstra a validade de (6.23).

Entrando em (6.17) com as restrições estruturais temos

$$\begin{bmatrix} 0 & (A'_{21} + pB'_2) \\ I & (A'_{22} + dB'_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P'_2 & P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P'_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ (A_{21} + pB_2) & (A_{22} + dB_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} pI \\ dI \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} pI & dI \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q'_2 & Q_3 \end{bmatrix} = 0$$

Chamando $A_{21} + pB_2 = X_p$ e $A_{22} + dB_2 = X_d$ esta equação pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} X'_pP'_2 & X'_pP_3 \\ P_1 + X'_dP'_2 & P_2 + X'_dP_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_2X_p & P_1 + P_2X_d \\ P_3X_p & P'_2 + P_3X_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p^2R & p dR \\ p dR & d^2R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q'_2 & Q_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.31)$$

Entrando em (6.18) com as restrições estruturais

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ X_p & X_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L'_2 & L_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L'_2 & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & X'_p \\ I & X'_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi'_2 & \Pi_3 \end{bmatrix} = 0$$

ou então, efetuando os produtos:

$$\begin{bmatrix} L'_2 & L_3 \\ X_pL_1 + X_dL'_2 & X_pL_2 + X_dL_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 & L_1X'_p + L_2X'_d \\ L_3 & L'_2X'_p + L_3X'_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi'_2 & \Pi_3 \end{bmatrix} = 0$$

Somando e igualando a zero as partições de (6.31) e da expressão imediatamente anterior:

$$P_2X_p + X'_pP'_2 + p^2R + Q_1 = 0$$

$$P_3X_p + X'_dP'_2 + P_1 + p dR + Q'_2 = 0 \quad (6.32)$$

$$P_2X_d + X'_pP_3 + P_1 + p dR + Q_2 = 0 \quad (6.33)$$

$$P_2 + P'_2 + P_3X_d + X'_dP_3 + d^2R + Q_3 = 0$$

$$L_2 + L'_2 + \Pi_1 = 0$$

$$L_3 + X_pL_1 + X_dL'_2 + \Pi'_2 = 0 \quad (6.34)$$

$$L_3 + L_1X'_p + L_2X'_d + \Pi_2 = 0 \quad (6.35)$$

$$X_pL_2 + L'_2X'_p + X_dL_3 + L_3X'_d + \Pi_3 = 0$$

As equações (6.32) e (6.33), e também (6.34) e (6.35) diferem entre si apenas por uma transposição e assim as oito equações precedentes comprovam a validade das relações de (6.24) até (6.29). C Q D

6.4.4 Busca da Solução

O corolário 6.2.1 fornece condições necessárias para a solução do $LQRPD_{2p}$, ou seja, todos os possíveis candidatos a solução devem satisfazê-las. Essas condições, representadas pelas equações de (6.22) até (6.29) são aqui repetidas, em outra ordem.

$$L_2 + L'_2 + \Pi_1 = 0$$

$$X_pL_2 + L'_2X'_p + X_dL_3 + L_3X'_d + \Pi_3 = 0$$

$$X_pL_1 + X_dL'_2 + L_3 + \Pi'_2 = 0$$

$$P_2X_p + X'_pP'_2 + p^2R + Q_1 = 0$$

$$P_3X_d + X'_dP_3 + P_2 + P'_2 + d^2R + Q_3 = 0$$

$$P_2X_d + X'_pP_3 + P_1 + p dR + Q_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \left[pR + B_2'P_2' \right] L_1 + \left[dR + B_2'P_3 \right] L_2' &= 0 \\ \left[pR + B_2'P_2' \right] L_2 + \left[dR + B_2'P_3 \right] L_3 &= 0 \end{aligned}$$

São oito equações matriciais para as incógnitas $p, d, P_1, P_2, P_3, L_1, L_2, L_3$, lembrando que $X_p = A_{21} + pB_2$ e $X_d = A_{22} + dB_2$. Podemos considerar, sem perda de generalidade, velocidades iniciais nulas, o que acarreta uma pequena simplificação dada por.

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_I^0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \Pi = \begin{bmatrix} x_I^0 x_I^{0'} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \Pi_2 = \Pi_3 = 0$$

As incógnitas P e L são soluções de equações de Lyapunov e, portanto, simétricas. Isto acarreta simetria em P_1, P_3, L_1 e L_3 . Com estas informações as relações acima podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} L_2 + L_2' + \Pi_1 &= 0 \\ X_p L_2 + X_d L_3 + (X_p L_2 + X_d L_3)' &= 0 \\ X_p L_1 + X_d L_2' + L_3 &= 0 \\ P_2 X_p + \frac{p^2}{2} R + \left(P_2 X_p + \frac{p^2}{2} R \right)' + Q_1 &= 0 \\ P_2 + P_3 X_d + \frac{d^2}{2} R + \left(P_2 + P_3 X_d + \frac{d^2}{2} R \right)' + Q_3 &= 0 \\ P_1 + P_2 X_d + X_p' P_3 + p d R + Q_2 &= 0 \\ L_1 \left[pR + P_2 B_2 \right] + L_2 \left[dR + P_3 B_2 \right] &= 0 \\ \left[pR + (P_2 B_2)' \right] L_2 + \left[dR + (P_3 B_2)' \right] L_3 &= 0 \end{aligned}$$

O formato básico da equação $L_2 + L_2' + \Pi_1 = 0$ aparece em outros trechos destas equações. Para um estudo mais detalhado sobre ela considere que, sendo $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é claro que $X + X'$ será uma matriz simétrica.

A Equação $X + X' + \Delta = 0$

Como $(X + X')$ e Δ devem ser simétricas, a equação acima terá

$$n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n + 1)}{2}$$

equações escalares independentes, para um total de n^2 incógnitas, os elementos x_{ij} de X . Isto garante que, para uma dada $\Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ haverá múltiplas soluções. Sendo $\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{ij} \end{bmatrix}$ simétrica, considere a matriz

$$\Delta^0 = \begin{bmatrix} -\frac{\delta_{11}}{2} & -\delta_{12} & -\delta_{13} & \dots & -\delta_{1n} \\ 0 & -\frac{\delta_{22}}{2} & -\delta_{23} & \dots & -\delta_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & -\frac{\delta_{nn}}{2} \end{bmatrix}$$

Lema 6.2 *Sendo $\Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica, o conjunto de todas as soluções da equação $X + X' + \Delta = 0$ é*

$$\mathcal{X} = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = \Delta^0 + M\}$$

onde M é uma matriz anti-simétrica qualquer.

Demonstração do Lema 6.2: Se $\bar{X} = \Delta^0 + \bar{M} \in \mathcal{X}$ é imediato verificar que $\bar{X} + \bar{X}' + \Delta = \Delta^0 + \bar{M} + \Delta^{0'} + \bar{M}' + \Delta = 0$, pois $\Delta^0 + \Delta^{0'} = -\Delta$ e $\bar{M} + \bar{M}' = 0$ por se tratarem de matrizes anti-simétricas.

Para mostrar que uma solução X qualquer da equação pertence à família \mathcal{X} basta equacionar $x_{ij} + x_{ji} = -\delta_{ij}$ para a parte superior das matrizes (são simétricas) e obter os x_{ij} . C Q D

O uso deste resultado permite escrever as oito condições necessárias em uma forma mais simples.

$$L_2 = \Pi_1^0 + M_1$$

$$X_p L_2 + X_d L_3 = M_3$$

$$X_p L_1 + X_d L_2' + L_3 = 0$$

$$P_2 X_p + \frac{p^2}{2} R = Q_1^0 + M_2$$

$$P_2 + P_3 X_d + \frac{d^2}{2} R = Q_3^0 + M_4$$

$$\begin{aligned}
P_1 + P_2 X_d + X'_p P_3 + p dR + Q_2 &= 0 \\
L_1 \left[pR + P_2 B_2 \right] + L_2 \left[dR + P_3 B_2 \right] &= 0 \\
L'_2 \left[pR + P_2 B_2 \right] + L_3 \left[dR + P_3 B_2 \right] &= 0
\end{aligned}$$

Manipulações razoavelmente simples permitem reescrever estas equações:

$$L_2 = \Pi_1^0 + M_1 \quad (6.36)$$

$$X_d X_p L_1 = -M_3 + X_p L_2 - X_d^2 L'_2 \quad (6.37)$$

$$X_d L_3 = -X_d X_p L_1 - X_d^2 L'_2 \quad (6.38)$$

$$P_2 X_p = Q_1^0 + M_2 - \frac{p^2}{2} R$$

$$P_3 X_d = -P_2 + Q_3^0 + M_4 - \frac{d^2}{2} R$$

$$P_1 = -P_2 X_d - X'_p P_3 - Q_2 - p dR$$

$$pL_1 R + dL_2 R + L_1 P_2 B_2 + L_2 P_3 B_2 = 0 \quad (6.39)$$

$$pL'_2 R + dL_3 R + L'_2 P_2 B_2 + L_3 P_3 B_2 = 0 \quad (6.40)$$

Entrando com (6.36) em (6.37) e em (6.38) eliminaríamos L_2 das equações. Eliminações análogas poderiam ser efetuadas, resultando em

$$L_2 = \Pi_1^0 + M_1 \quad (6.41)$$

$$X_d X_p L_1 = X_p \Pi_1^0 - X_d^2 \Pi_1^{0'} + X_p M_1 - X_d^2 M'_1 - M_3 \quad (6.42)$$

$$X_d L_3 = -X_p \Pi_1^0 - X_p M_1 + M_3 \quad (6.43)$$

$$P_2 X_p = Q_1^0 - \frac{p^2}{2} R + M_2 \quad (6.44)$$

$$P_3 X_d X_p = -Q_1^0 + Q_3^0 X_p + \frac{p^2}{2} R - \frac{d^2}{2} R X_p - M_2 + M_4 X_p \quad (6.45)$$

$$P_1 = -Q_2 - p dR - P_2 X_d - X'_p P_3 \quad (6.46)$$

$$pL_1 R + dL_2 R + L_1 P_2 B_2 + L_2 P_3 B_2 = 0 \quad (6.47)$$

$$pL'_2R + dL_3R + L'_2P_2B_2 + L_3P_3B_2 = 0 \quad (6.48)$$

Retirando das equações (6.41) a (6.45) os valores de L_1, L_2, L_3, P_2 e P_3 (matrizes X_p e X_d supostamente inversíveis) e substituindo nas equações (6.47) e (6.48), poderíamos resolver analiticamente o sistema. Fazendo isto chegaríamos a

$$\begin{aligned} & p(X_dX_p)^{-1}[X_p\Pi_1^0 - X_d^2\Pi_1^{0'} - \Pi_3^0 + X_pM_1 - X_d^2M_1' - M_3]R + d[\Pi_1^0 + M_1]R + (X_dX_p)^{-1} \\ & [X_p\Pi_1^0 - X_d^2\Pi_1^{0'} - \Pi_3^0 + X_pM_1 - X_d^2M_1' - M_3] \left[Q_1^0X_p^{-1} - \frac{p^2R}{2}X_p^{-1} + M_2X_p^{-1} \right] B_2 + \\ & + [\Pi_1^0 + M_1] \left[-Q_1^0 + Q_3^0X_p + \frac{p^2R}{2} - \frac{d^2R}{2}X_p - M_2 + M_4X_p \right] (X_dX_p)^{-1}B_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p[\Pi_1^0 + M_1]'R + dX_d^{-1}[-X_p\Pi_1^0 + \Pi_3^0 - X_pM_1 + M_3]R + [\Pi_1^0 + M_1]' \left[Q_1^0 - \frac{p^2R}{2} + M_2 \right] \\ & X_p^{-1}B_2 + X_d^{-1}[-X_p\Pi_1^0 + \Pi_3^0 - X_pM_1 + M_3] \left[-Q_1^0 + Q_3^0X_p + \frac{p^2R}{2} - \frac{d^2R}{2}X_p - M_2 + \right. \\ & \left. + M_4X_p \right] (X_dX_p)^{-1}B_2 = 0 \end{aligned}$$

cuja solução para obter p e d parece intransponível, o que força a busca de um algoritmo.

Dados p e d , as matrizes X_p e X_d estão determinadas. Supondo invertibilidade destas matrizes será possível encontrar expressões para os L_i e os P_i . Cada expressão é uma família de soluções parametrizada pelas anti-simétricas. É fácil perceber que cada uma destas famílias é composta por uma parte fixa somada a uma parte que depende dos parâmetros livres anti-simétricos:

$$L_1 = \bar{L}_1 + f_{L_1}(M_1, M_3) \quad (6.49)$$

$$L_2 = \bar{L}_2 + f_{L_2}(M_1) \quad (6.50)$$

$$L_3 = \bar{L}_3 + f_{L_3}(M_1, M_3) \quad (6.51)$$

$$P_1 = \bar{P}_1 + f_{P_1}(M_2, M_4) \quad (6.52)$$

$$P_2 = \bar{P}_2 + f_{P_2}(M_2) \quad (6.53)$$

$$P_3 = \bar{P}_3 + f_{P_3}(M_2, M_4) \quad (6.54)$$

A análise das equações de (6.41) a (6.46) permite determinar os parâmetros fixos \bar{L}_i e \bar{P}_i e as funções f_{L_i} e f_{P_i} . Comparando, por exemplo, (6.51) com (6.43) vê-se que $\bar{L}_3 = -X_d^{-1}X_p\Pi_1^0 + X_d^{-1}\Pi_3^0$ (fixa porque se supõe p e d conhecidos e fixos) e $f_{L_3} = -X_d^{-1}X_pM_1 + X_d^{-1}M_3$.

O caminho para um algoritmo parece claro:

1. Escolhemos p^i e d^i tais que $\begin{bmatrix} p^i I & d^i I \end{bmatrix}$ é estabilizadora.
2. Por meio de (6.49) a (6.54) encontramos famílias de soluções para L_1, L_2, L_3, P_1, P_2 e P_3 .
3. Entrando com estes valores em (6.39) e (6.40) determinamos p^{i+1} e d^{i+1} .
4. Se (p^{i+1}, d^{i+1}) estiver suficientemente próximo de (p^i, d^i) haverá parada, caso contrário $p^i = p^{i+1}$ e $d^i = d^{i+1}$ e se retorna a (1).

6.4.5 Conclusões

A implementação do algoritmo sugerido acima esbarra em obstáculos sérios. O item 3 acima, por exemplo, pode-se revelar problemático. Não há soluções únicas $L_1 \dots P_3$ que colocadas em (6.39) e (6.40) forneçam de modo direto e simples p^{i+1} e d^{i+1} . Pode ser necessário encontrar valores particulares dos parâmetros M_1, M_2, M_3 e M_4 que possibilitem a solução. Maneiras eficientes e gerais de resolver estes problemas precisam ser buscadas.

Ainda há outros aspectos, mais gerais, a considerar. As condições necessárias de otimalidade fornecem um conjunto de oito equações matriciais com oito incógnitas. Embora tenhamos trabalhado no sentido de entender melhor este sistema, nada nos garante, do ponto de vista matemático, que haja solução para ele. Menos ainda se pode afirmar a respeito de unicidade ou multiplicidade de soluções.

No problema da próxima seção estes inconvenientes serão removidos.

6.5 Controle Ótimo PD_{2p} - Caso II

Retomando a linha mestra da seção 6.3, o Problema do Regulador Linear Quadrático clássico para um sistema linear e invariante no tempo, com horizonte de tempo infinito,

será novamente formulado.

Dado um sistema descrito pelo modelo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

encontrar uma entrada de controle u que minimize o índice

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)] dt$$

onde $Q = Q' \geq 0$ e $R = R' > 0$.

Se condições suaves forem satisfeitas — estabilizabilidade do par (A, B) — a solução deste problema existe, é única e dada por

$$u^*(t) = F^*x(t)$$

onde F^* é obtida a partir de uma bem conhecida equação de Riccati.

É importante notar que esta solução por realimentação de estados é obtida sem que qualquer tipo de restrição tenha sido atribuída a u na formulação do problema. Por um especial “favor” dos mecanismos matemáticos envolvidos, a solução final envolve uma realimentação de estados, o que é algo precioso para o pessoal de controle, pois realimentações aumentam a robustez geral da solução.

Quando restrições iniciais são impostas ao controle u as coisas mudam. Considere a mesma planta acima, com o mesmo índice de desempenho a ser minimizado, mas agora se exige, desde o começo, que

$$\begin{cases} 1.) & u(t) = Fx(t) \\ 2.) & \text{restrições extras em } F \end{cases}$$

A entrada de controle u não é mais livre, ela deve ser obtida por meio de uma realimentação de estados (restrição 1). Além disso pode haver requisitos adicionais na estrutura de F (restrição 2). Neste trabalho ela deve apresentar uma descentralização do tipo PD_{2p} , ou seja, é dividida em blocos que satisfazem (6.3).

Usando, por ora, apenas a restrição 1, o sistema de malha fechada fica

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

o que leva a expressões simples para $x(t)$ e $u(t)$, conforme visto na subseção 6.3.1.

Usando estas expressões e chamando $A + BF = A_F$ o índice fica

$$\begin{aligned} J &= x_0' \left[\int_{t_0}^{\infty} e^{A_F t} (Q + F' R F) e^{A_F t} dt \right] x_0 \\ &= x_0' P(t_0, F) x_0 \\ &= J(x_0, t_0, F) \end{aligned}$$

Seria fácil verificar que $P = P(t_0, F)$ é independente de t_0 , logo $P = P(F)$, e é solução da equação de Lyapunov $PA_F + A_F'P + Q + F'RF = 0$.

Pode-se agora enunciar o Problema do Regulador Linear Quadrático com restrições no controlador:

Problema 6.4 *Para o sistema padrão encontrar F que minimiza*

$$J(x_0, F) = x_0' P x_0$$

sujeito a

$$\begin{cases} 1.) & P(A + BF) + (A + BF)'P + F'RF + Q = 0 \\ 2.) & \text{restrições adicionais em } F \end{cases}$$

Conforme já comentado anteriormente (subseção 6.3.1) este é um problema de otimização estática cujas soluções, se existirem, dependem da condição inicial x^0 .

Embora na seção 6.4 este problema tenha sido estudado com detalhes para o caso PD_{2p} , esta dependência de x_0 é algo desagradável. Deseja-se, claramente, soluções independentes das condições iniciais. Se, além de independente, a solução for única, melhor ainda.

Nesta seção analisaremos maneiras de eliminar o efeito de x_0 nas soluções (Levine & Athans 1970, Anderson & Moore 1971). Um possível procedimento seria considerar x^0 como uma variável aleatória uniformemente distribuída na superfície da esfera de

raio unitário no \mathbb{R}^n e minimizar o valor esperado do índice para todos os possíveis valores de x^0 .

Problema 6.5 Para o sistema padrão encontrar F que minimiza

$$\bar{J}(F) = E[x_0' P(F) x_0]$$

com a variável aleatória x_0 satisfazendo $E[x_0 x_0'] = \frac{1}{n} I_n$ e com as restrições adicionais em F .

Usando algumas ferramentas básicas do estudo de variáveis aleatórias é possível exprimir este novo índice de maneira mais simples. Sendo $P(F) = P = [p_{ij}]$ e $x^0 = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n]'$ temos

$$E[x_0 x_0'] = \frac{1}{n} I_n \quad \implies \quad E[x_0' P x_0] = \sum_{i,j=1}^n p_{ij} E[x_i x_j] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_{ii} = \frac{1}{n} \text{tr} [P]$$

Podemos finalmente formular o

Problema 6.6 Dadas as matrizes A , B , Q , R e o sistema padrão, minimizar

$$\bar{J}(F) = \frac{1}{n} \text{tr} [P]$$

onde $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad P(A + BF) + (A + BF)'P + F'RF + Q = 0 \\ 2) \quad \text{restrições adicionais em } F \end{array} \right.$$

Conforme prometido, este problema independe da condição inicial x_0 . Ele é mais tratável, mas ainda assusta, principalmente porque não é muito simples exprimir diretamente o índice \bar{J} em termos de F .

É sempre bom lembrar que a matriz F descrita deve estabilizar o sistema, caso contrário, o problema não tem significado. Deste modo, antes de otimizar é necessário estabilizar.

Uma outra possível maneira de eliminar a influência de x^0 seria considerar

$$\bar{J}(F) = \lambda_{max}(P(F))$$

Este índice é o máximo valor de $x_0'P(F)x_0 = J(x_0, F)$ quando x_0 varre a esfera de raio unitário no \mathbb{R}^n .

6.5.1 Cálculo das Derivadas Parciais

Antes de prosseguir é preciso apresentar um resultado devido a Bellman (Bellman 1960), muito útil ao se tratar com exponenciais matriciais.

Lema 6.3 (Bellman 1960) *Dadas as matrizes A e B do modelo padrão, considere a função matricial de variável matricial*

$$h : \mathbb{R}^{m \times n} \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$$

com lei de associação dada por

$$X \mapsto h(X) = e^{(A+BX)t}$$

Para $\epsilon \in \mathbb{R}$ e $\Delta_X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ teremos

$$h(X + \epsilon\Delta_X) = e^{(A+BX+\epsilon B\Delta_X)t} = e^{(A+BX)t} + \epsilon \int_0^t e^{(A+BX)(t-\sigma)} B\Delta_X e^{(A+BX)\sigma} d\sigma$$

O desenvolvimento a seguir é baseado no encontrado em Levine e Athans (Levine & Athans 1970). Supondo $F^* = \begin{bmatrix} p^*I & d^*I \end{bmatrix}$ uma solução do problema em estudo temos $A + BF^* = A_*$ estável (com autovalores em \mathbb{C}^-). Para $\epsilon \in \mathbb{R}$ considere $F = \begin{bmatrix} (p^* + \epsilon)I & d^*I \end{bmatrix} = F^* + \epsilon \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} = F^* + \epsilon\Delta_p$. Seja ainda $A_F = A + BF$.

$$\begin{aligned} n\bar{J}(F) &= \text{tr}[P(F)] \\ &= \text{tr} \int_0^\infty e^{A_F t} [Q + F'RF] e^{A_F t} dt \\ &= \text{tr} \int_0^\infty e^{A_F t} \left[Q + F^{*'}RF^* + \epsilon \left(\Delta_p'RF^* + F^{*'}R\Delta_p \right) + \epsilon^2 \Delta_p'R\Delta_p \right] e^{A_F t} dt \\ &= \text{tr} \int_0^\infty e^{A_F t} [K_0 + \epsilon K_1 + \epsilon^2 K_2] e^{A_F t} dt \end{aligned}$$

onde usamos $F = F^* + \epsilon \Delta_p$ na expressão entre colchetes e batizamos $Q + F^{*'} R F^* = K_0$, etc. Entrando agora com os valores de Q , R , F^* e Δ_p temos

$$K_0 = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q'_2 & Q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p^* I \\ d^* I \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} p^* I & d^* I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 + p^{*2} R & Q_2 + p^* d^* R \\ Q'_2 + p^* d^* R & Q_3 + d^{*2} R \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} p^* I & d^* I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p^* I \\ d^* I \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p^* R & d^* R \\ d^* R & 0 \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando o lema de Bellman à exponencial $e^{A_F t}$ temos

$$\begin{aligned} e^{A_F t} &= e^{(A+BF)t} = e^{(A+BF^*+\epsilon B\Delta_p)t} \\ &= e^{(A_*+\epsilon B\Delta_p)t} \\ &= e^{A_* t} + \epsilon \int_0^t e^{A_*(t-\sigma)} B\Delta_p e^{A_* \sigma} d\sigma \\ &= e^{A_* t} + \epsilon \Gamma(t) \end{aligned}$$

onde a matriz $\Gamma(t)$ é dada por

$$\Gamma(t) = \int_0^t e^{A_*(t-\sigma)} B\Delta_p e^{A_* \sigma} d\sigma$$

o índice fica

$$n\bar{J}(F) = \text{tr} \int_0^\infty \left(e^{A_*' t} + \epsilon \Gamma'(t) \right) \left[K_0 + \epsilon K_1 + \epsilon^2 K_2 \right] \left(e^{A_* t} + \epsilon \Gamma(t) \right) dt$$

$$\begin{aligned} n\bar{J}(F) &= \text{tr} \int_0^\infty \left[e^{A_*' t} K_0 e^{A_* t} + \epsilon \left(e^{A_*' t} K_0 \Gamma(t) + e^{A_*' t} K_1 e^{A_* t} + \Gamma'(t) K_0 e^{A_* t} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^2 P_2 + \epsilon^3 P_3 + \epsilon^4 P_4 \right] dt \end{aligned}$$

onde os coeficientes P_2 , P_3 e P_4 não precisam ser calculados. Quando $\epsilon = 0$ temos $F = F^*$ e o índice fica

$$n\bar{J}(F^*) = \text{tr} \int_0^\infty \left(e^{A_*' t} K_0 e^{A_* t} \right) dt$$

Deste ponto é fácil calcular a grandeza

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{n\bar{J}(F^* + \epsilon\Delta_p) - n\bar{J}(F^*)}{\epsilon} \\
&= \text{tr} \int_0^\infty \left(e^{A'_*t} K_0 \Gamma(t) + e^{A'_*t} K_1 e^{A_*t} + \Gamma'(t) K_0 e^{A_*t} \right) dt \\
&= \frac{\partial n\bar{J}}{\partial p}
\end{aligned}$$

O traço pode ser levado “para dentro” da integral; como $\text{tr}[M] = \text{tr}[M']$ e como $Q = Q'$ e $K_0 = K'_0$ temos

$$\frac{\partial n\bar{J}}{\partial p} = \int_0^\infty \left(2\text{tr} \left[e^{A'_*t} K_0 \Gamma(t) \right] + \text{tr} \left[e^{A'_*t} K_1 e^{A_*t} \right] \right) dt$$

Entrando com o valor de K_1 (6.56), desenvolvendo os produtos, lembrando que $R = R'$ e usando novamente a propriedade do traço da transposta vem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n\bar{J}}{\partial p} &= \int_0^\infty \left(2\text{tr} \left[e^{A'_*t} K_0 \Gamma(t) \right] + \text{tr} \left[e^{A'_*t} \begin{bmatrix} 2p^* R & d^* R \\ d^* R & 0 \end{bmatrix} e^{A_*t} \right] \right) dt \\
&= \int_0^\infty \left(2\text{tr} \left[e^{A'_*t} K_0 \Gamma(t) \right] + \text{tr} \left[e^{A'_*t} (\Delta'_p R F^* + F^{*'} R \Delta_p) e^{A_*t} \right] \right) dt \\
&= 2 \int_0^\infty \left(\text{tr} \left[e^{A'_*t} K_0 \Gamma(t) \right] + \text{tr} \left[e^{A'_*t} F^{*'} R \Delta_p e^{A_*t} \right] \right) dt
\end{aligned}$$

Entrando com o valor anterior para $\Gamma(t)$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n\bar{J}}{\partial p} &= 2 \int_0^\infty \left(\text{tr} \left[e^{A'_*t} K_0 \int_0^t e^{A_*(t-\sigma)} B \Delta_p e^{A_*\sigma} d\sigma \right] + \text{tr} \left[e^{A'_*t} F^{*'} R \Delta_p e^{A_*t} \right] \right) dt \\
&= 2 \int_0^\infty \left(\text{tr} \int_0^t \left(e^{A'_*t} K_0 e^{A_*(t-\sigma)} B \Delta_p e^{A_*\sigma} d\sigma \right) + \text{tr} \left[e^{A'_*t} F^{*'} R \Delta_p e^{A_*t} \right] \right) dt \\
&= 2 \int_0^\infty \left(\int_0^t \text{tr} \left[e^{A'_*t} K_0 e^{A_*(t-\sigma)} B \Delta_p e^{A_*\sigma} \right] d\sigma + \text{tr} \left[e^{A'_*t} F^{*'} R \Delta_p e^{A_*t} \right] \right) dt
\end{aligned}$$

Lembrando que $\text{tr}[PQ] = \text{tr}[QP]$ a expressão acima fica

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n\bar{J}}{\partial p} &= 2 \int_0^\infty \left(\int_0^t \text{tr} \left[e^{A_*\sigma} e^{A'_*t} K_0 e^{A_*(t-\sigma)} B \Delta_p \right] d\sigma + \text{tr} \left[e^{A_*t} e^{A'_*t} F^{*'} R \Delta_p \right] \right) dt \\
&= 2\text{tr} \int_0^\infty \left[e^{A_*t} e^{A'_*t} F^{*'} R + \int_0^t e^{A_*\sigma} e^{A'_*t} K_0 e^{A_*(t-\sigma)} B d\sigma \right] \Delta_p dt \\
&= 2\text{tr} \int_0^\infty \Delta'_p \left[R F^* e^{A_*t} e^{A'_*t} + \int_0^t B' e^{A'_*(t-\sigma)} K_0 e^{A_*t} e^{A_*\sigma} d\sigma \right] dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\text{tr} \left[\Delta'_p R F^* \int_0^\infty e^{A_* t} e^{A'_* t} dt \right] + 2\text{tr} \left[\Delta'_p B' \int_0^\infty \int_0^t e^{A'_*(t-\sigma)} K_0 e^{A_* t} e^{A'_* \sigma} d\sigma dt \right] \\
&= 2\text{tr} \left[\Delta'_p R F^* \int_0^\infty e^{A_* t} e^{A'_* t} dt \right] + 2\text{tr} \left[\Delta'_p B' \int_0^t \int_0^\infty e^{A'_*(t-\sigma)} K_0 e^{A_* t} dt e^{A'_* \sigma} d\sigma \right]
\end{aligned}$$

Fazendo $t - \sigma = \tau$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n \bar{J}}{\partial p} &= 2\text{tr} \left[\Delta'_p R F^* \int_0^\infty e^{A_* t} e^{A'_* t} dt \right] + 2\text{tr} \left[\Delta'_p B' \int_0^t \int_{-\sigma}^\infty e^{A'_* \tau} K_0 e^{A_* \tau} d\tau e^{A_* \sigma} e^{A'_* \sigma} d\sigma \right] \\
&= 2\text{tr} \left[\Delta'_p R F^* \int_0^\infty e^{A_* t} e^{A'_* t} dt \right] + 2\text{tr} \left[\Delta'_p B' \int_{-\sigma}^\infty e^{A'_* \tau} K_0 e^{A_* \tau} d\tau \int_0^t e^{A_* \sigma} e^{A'_* \sigma} d\sigma \right]
\end{aligned}$$

Considerando uniteralidade dos sinais envolvidos ($f(\xi) = 0$ para $\xi < 0$) temos que o limite inferior de qualquer integral definida pode ser 0 ao invés de um número negativo. Considerando causalidade nos operadores, os limites superiores positivos e finitos de qualquer integral definida podem ser levados a ∞ . Isto nos leva, finalmente, a

$$\frac{\partial n \bar{J}}{\partial p} = 2\text{tr} \left[\Delta'_p R F^* \int_0^\infty e^{A_* t} e^{A'_* t} dt \right] + 2\text{tr} \left[\Delta'_p B' \int_0^\infty e^{A'_* \tau} K_0 e^{A_* \tau} d\tau \int_0^\infty e^{A_* \sigma} e^{A'_* \sigma} d\sigma \right]$$

$$\frac{\partial n \bar{J}}{\partial p} = 2\text{tr} \left[\Delta'_p R F^* M^* \right] + 2\text{tr} \left[\Delta'_p B' P^* M^* \right] \quad (6.57)$$

onde $M^*, P^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são dadas por

$$M^* = \int_0^\infty e^{A_* \sigma} e^{A'_* \sigma} d\sigma \quad (6.58)$$

$$P^* = \int_0^\infty e^{A'_* \tau} K_0 e^{A_* \tau} d\tau \quad (6.59)$$

É fato conhecido (Vidyasagar 1978) que M^* definida acima é solução da equação de Lyapunov

$$M^* A'_* + A_* M^* + I = 0 \quad (6.60)$$

Como A_* , e conseqüentemente A'_* , são estáveis, M^* é a única solução de (6.60) e ainda $M^* = M^{*'} > 0$, o que garante sua invertibilidade.

Também se pode dizer que P^* definida em (6.59) é solução da equação de Lyapunov

$$P^* A_* + A'_* P^* + K_0 = 0 \quad (6.61)$$

A estabilidade de A_* garante que P^* dada em (6.59) é a única solução de (6.61).

De modo análogo, seja agora uma variação em d : $F = F^* + \epsilon \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} = F^* + \epsilon \Delta_d$. Seguindo um raciocínio análogo ao anterior, chega-se a expressão da derivada parcial da função custo em relação ao parâmetro d :

$$\frac{\partial n\bar{J}}{\partial d} = 2\text{tr} [\Delta'_d R F^* M^*] + 2\text{tr} [\Delta'_d B' P^* M^*] \quad (6.62)$$

onde M^* e P^* são dadas por (6.58) e (6.59) e são soluções das equações (6.60) e (6.61), respectivamente.

6.5.2 Condições Necessárias de Otimalidade

Os desenvolvimentos da subseção anterior permitem estabelecer o

Teorema 6.3 *Sendo $F^* = \begin{bmatrix} p^* I & d^* I \end{bmatrix}$ uma solução para o $LQRPD_{2p}$ com índice de desempenho independente das condições iniciais, então*

$$\text{tr} [\Delta'_p (R F^* + B' P^*) M^*] = 0 \quad (6.63)$$

$$\text{tr} [\Delta'_d (R F^* + B' P^*) M^*] = 0 \quad (6.64)$$

onde M^* e P^* são as soluções das equações de Lyapunov

$$M^* A'_* + A_* M^* + I = 0 \quad (6.65)$$

$$P^* A_* + A'_* P^* + K_0 = 0 \quad (6.66)$$

Demonstração do Teorema 6.3: Para obter uma condição necessária de otimalidade de 1ª ordem basta igualar as derivadas parciais dadas por (6.57) e (6.62) a zero.

C Q D.

Resta agora entrar com as particularidades do modelo e com as restrições desejadas para F^* . As matrizes A , B e F são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} F_p & F_d \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

onde, conforme mencionado na subseção 6.4.3, os blocos indicados são quadrados, $n \times n$ e $F_p = pI$, $F_d = dI$ para reais p e d . As matrizes de ponderação Q e R são dadas por

$$Q = Q' = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{bmatrix} \geq 0 \quad R = R' > 0 \quad (6.68)$$

onde os blocos indicados são quadrados e $n \times n$. As matrizes P^* e M^* serão particionadas em blocos quadrados e $n \times n$.

$$P^* = P^{*'} = \begin{bmatrix} P_1^* & P_2^* \\ P_2^{*'} & P_3^* \end{bmatrix} \quad M^* = M^{*'} = \begin{bmatrix} M_1^* & M_2^* \\ M_2^{*'} & M_3^* \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

Assim as condições (6.63) e (6.64) podem ser mais detalhadas gerando o corolário a seguir.

Corolário 6.3.1 *Sendo $F^* = \begin{bmatrix} p^*I & d^*I \end{bmatrix}$ uma solução para o $LQRPD_{2p}$ com índice de desempenho independente das condições iniciais e sendo $A_* = A + BF^*$ estável, então*

$$p^* \text{tr} [RM_1^*] + d^* \text{tr} [RM_2^{*'}] + \text{tr} [B_2' P_2^{*'} M_1^*] + \text{tr} [B_2' P_3^* M_2^{*'}] = 0 \quad (6.70)$$

$$p^* \text{tr} [RM_2^*] + d^* \text{tr} [RM_3^*] + \text{tr} [B_2' P_2^{*'} M_2^*] + \text{tr} [B_2' P_3^* M_3^*] = 0 \quad (6.71)$$

$$M^* A_*' + A_* M^* + I = 0 \quad (6.72)$$

$$P^* A_* + A_*' P^* + K_0 = 0 \quad (6.73)$$

Demonstração do Corolário 6.3.1 *Aplicando as equações (6.67) e (6.69) a (6.63):*

$$\text{tr} \left[\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \left[R \begin{bmatrix} p^*I & d^*I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^* & P_2^* \\ P_2^{*'} & P_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1^* & M_2^* \\ M_2^{*'} & M_3^* \end{bmatrix} \right] \right] = 0$$

$$\text{tr} \left[\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rp^* + B'_2 P_2^{*'} & Rd^* + B'_2 P_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1^* & M_2^* \\ M_2^{*'} & M_3^* \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\text{tr} \left[\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta 1 & \vartheta 2 \end{bmatrix} \right] = \text{tr} \begin{bmatrix} \vartheta 1 & \vartheta 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{tr} \begin{bmatrix} \vartheta 1 \end{bmatrix} = 0$$

onde $\vartheta 1 = Rp^* M_1^* + B'_2 P_2^{*'} M_1^* + Rd^* M_2^{*'} + B'_2 P_3^* M_2^{*'} .$ Isto leva a

$$p^* \text{tr} [RM_1^*] + d^* \text{tr} [RM_2^{*'}] + \text{tr} [B'_2 P_2^{*'} M_1^*] + \text{tr} [B'_2 P_3^* M_2^{*'}] = 0$$

que valida a equação (6.70).

Aplicando um procedimento análogo a (6.64), tem-se:

$$p^* \text{tr} [RM_2^*] + d^* \text{tr} [RM_3^*] + \text{tr} [B'_2 P_2^{*'} M_2^*] + \text{tr} [B'_2 P_3^* M_3^*] = 0$$

que torna a equação (6.71) válida.

C Q D

As condições necessárias do corolário 6.3.1 podem ajudar no problema prático de interesse, o de encontrar os ganhos ótimos p^* e d^* . Para isto seria necessário resolver o sistema de equações (6.70) a (6.73).

A resolução analítica deste sistema parece ser uma tarefa formidável, pela complexidade das equações resultantes. Disto, surge a necessidade de um algoritmo que gere os ganhos p^* e d^* . Uma possível proposta seria:

Algoritmo de Obtenção dos Ganhos p^* e d^*

1. Escolhemos p^i e d^i tais que $F = \begin{bmatrix} p^i I & d^i I \end{bmatrix}$ é estabilizadora.
2. Por meio das equações (6.72) a (6.73) obtemos as matrizes M e P .
3. Entrando com estes valores em (6.70) e (6.71) determinamos p^{i+1} e d^{i+1} .
4. Se (p^{i+1}, d^{i+1}) estiver suficientemente próximo de (p^i, d^i) haverá parada, caso contrário $p^i = p^{i+1}$ e $d^i = d^{i+1}$ e se retorna a (1).

A solução $F = \begin{bmatrix} pI & dI \end{bmatrix}$ obtida a partir do procedimento acima não depende dos estados iniciais do sistema, mas depende de uma estabilizadora inicial F^0 .

As condições necessárias de otimalidade dadas por (6.70) a (6.73) geram somente candidatos e não minimizadores garantidos. Para isto, deveriam ser geradas condições suficientes baseadas em variações de segunda ordem, ou seja, no cálculo da Hessiana do índice de desempenho \bar{J} , o que foge do escopo desta tese.

6.5.3 Resultados sobre a convergência do algoritmo

O algoritmo para geração dos ganhos ótimos p^* e d^* descrito na subseção anterior foi implementado por meio do código que pode ser visto no apêndice F .

Inúmeras simulações com sistemas 4×4 (sistema acadêmico), 6×6 , 8×8 (sistema real associado ao protótipo), 10×10 , 12×12 , 14×14 e 16×16 foram feitas. Em todas elas o objetivo era analisar a influência da inicializadora F^0 na convergência do processo. O resultado principal pode ser sintetizado por

- O algoritmo sempre converge para uma matriz PD_{2p} : $F^i \longrightarrow \begin{bmatrix} pI & dI \end{bmatrix}$.

A palavra “sempre” usada acima deve ser entendido como: em todas as simulações efetuadas. Embora o procedimento proposto forneça uma solução PD_{2p} , nem sempre esta é a solução procurada, ou seja, nem sempre ela é estabilizadora.

As constantes repetições de resultados das simulações podem ser agrupadas em três categorias básicas:

- a) quando F^0 é uma estabilizadora PD_{2p} — $F^0 = \begin{bmatrix} p^0I & d^0I \end{bmatrix}$ e $A + BF^0$ é estável — o algoritmo converge sempre para uma única solução PD_{2p} estabilizadora: $F^i \longrightarrow \begin{bmatrix} p^*I & d^*I \end{bmatrix} = F^*$.
- b) quando F^0 é uma estabilizadora qualquer o algoritmo converge quase sempre para a solução F^* ; nas pouquíssimas situações onde isto falha o resultado é uma matriz PD_{2p} não estabilizadora.
- c) quando F^0 é uma matriz qualquer o algoritmo às vezes converge para a solução F^* ; nas outras vezes converge para uma, ou várias, soluções PD_{2p} não estabilizadoras.

Resultados teóricos conclusivos sobre a convergência do algoritmo proposto não serão apresentados nesta tese, e assim as “conclusões” acima devem ser encaradas apenas como conjecturas sugeridas por um número grande de simulações.

O procedimento proposto para lidar com um caso qualquer é:

- Encontrar uma estabilizadora inicial F^0 usando o LQR: $F^0 = F_c^*$. Há quase certeza de que ela funciona.
- Se a F^0 acima falhar ela deve ser modificada até funcionar. Estas modificações tentam aproximar F^0 de uma estabilizadora PD_{2p} , ou mesmo de uma estabilizadora descentralizada. Para isto diminuiríamos o módulo dos elementos de F^0 fora das diagonais de interesse, sempre cuidando de manter o poder estabilizador de F^0 .

6.5.4 Exemplos

Nesta subseção será analisada a aplicação do algoritmo gerador dos ganhos ótimos p^* e d^* em um exemplo acadêmico e em um real.

Exemplo 6.3 *Considere o sistema acadêmico já visto anteriormente nos exemplos 5.1, 5.3 e 6.1, onde :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A são: 2.2470, -0.8019, -0.0000 e 0.5550, o que caracteriza um sistema instável. O controle LQR para este caso, já visto no exemplo 5.1, fornece

$$F_c^* = -B'R^{-1}P^* = \begin{bmatrix} -2.3362 & -1.0694 & -2.9891 & -1.3099 \\ -2.1021 & -2.7307 & -1.3099 & -3.7139 \end{bmatrix}$$

cuja realimentação em malha fechada gera os autovalores: -2.2031, -0.7852 ± 0.6895i e -0.9296. O índice de desempenho associado será: $\bar{J}_c^ = \frac{\text{tr}[P(F_c^*)]}{4} = 3.1307$.*

O controle LQRd para este caso, já visto no exemplo 5.3 fornece, para

$$x^0 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

$$F_D^* = \begin{bmatrix} -3.2271 & 0 & -4.4479 & 0 \\ 0 & -4.7713 & 0 & -4.2231 \end{bmatrix}$$

cuja realimentação em malha fechada gera os autovalores: -0.7998 , $-1.9868 \pm 0.9633i$ e -1.8977 . O índice de desempenho associado é: $\bar{J}_d^* = \frac{\text{tr}[P(F_D^*)]}{4} = 4.2071$.

A partir de agora vamos aplicar o algoritmo visto na seção 6.5.2. Em primeiro lugar usaremos F_c^* como inicializadora. Após 37 iterações, com uma tolerância dada por 10^{-11} , o resultado seria:

$$F_{2p}^* = \begin{bmatrix} -3.6959 & 0.0000 & -4.3791 & 0.0000 \\ 0.0000 & -3.6959 & 0.0000 & -4.3791 \end{bmatrix}$$

cuja realimentação em malha fechada gera os autovalores: $-2.4212 \pm 0.8475i$ e $-0.9579 \pm 0.1867i$. O índice de desempenho associado é: $\bar{J}_{2p}^* = \frac{\text{tr}[P(F_{2p}^*)]}{4} = 3.8324$.

Seja agora $F^0 = F_D^*$. Após 10 iterações, o algoritmo converge para

$$F_{2p}^* = \begin{bmatrix} -3.6959 & 0.0000 & -4.3791 & 0.0000 \\ 0.0000 & -3.6959 & 0.0000 & -4.3791 \end{bmatrix}$$

O índice de desempenho seria igual ao visto acima.

Vamos agora preparar uma inicializadora PD_{2p} , tomando valores próximos das médias aritméticas dos elementos das diagonais principais de F_D^* , já vista no exemplo 6.1. Isto leva a

$$F^0 = \begin{bmatrix} -4.0 & 0.0 & -4.5 & 0.0 \\ 0.0 & -4.0 & 0.0 & -4.5 \end{bmatrix}$$

O algoritmo converge em 10 iterações para:

$$F_{2p}^* = \begin{bmatrix} -3.6959 & 0.0000 & -4.3791 & 0.0000 \\ 0.0000 & -3.6959 & 0.0000 & -4.3791 \end{bmatrix}$$

O índice de desempenho permanece igual ao anterior.

Seja agora $F^0 = F$ uma matriz qualquer (aleatória), dada por:

$$F = \begin{bmatrix} 0.9501 & 0.6068 & 0.8913 & 0.4565 \\ 0.2311 & 0.4860 & 0.7621 & 0.0185 \end{bmatrix}$$

que não é estabilizadora (autovalores: 3.4925, -0.9073 , -0.4003 e 0.7250). Após 22 iterações o método fornece

$$F_{2p} = \begin{bmatrix} -3.8777 & 0.0000 & 2.3565 & 0.0000 \\ 0.0000 & -3.8777 & 0.0000 & 2.3565 \end{bmatrix}$$

que é PD_{2p} mas não é solução pois gera os autovalores: 0.5840 , $1.5257 \pm 1.3128i$, 3.0776 .

Seja agora $F^0 = F$ uma outra matriz qualquer (aleatória), dada por:

$$F = \begin{bmatrix} 0.8214 & 0.6154 & 0.9218 & 0.1763 \\ 0.4447 & 0.7919 & 0.7382 & 0.4057 \end{bmatrix}$$

cuja realimentação em malha fechada produz os seguintes autovalores: 3.5614 , -0.9442 , -0.2795 e 0.9897 . Após 21 iterações o método converge para a matriz PD_{2p} desejada:

$$F_{2p}^* = \begin{bmatrix} -3.6959 & 0.0000 & -4.3791 & 0.0000 \\ 0.0000 & -3.6959 & 0.0000 & -4.3791 \end{bmatrix}$$

Exemplo 6.4 Considere o protótipo em estudo, cujo modelo já foi visto nos exemplos 5.2, 5.4 e 6.2:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Os autovalores de A são: $461.8949 \pm 0.00782i$, $626.8493 \pm 0.00020i$, $-464.9623 \pm 0.00788i$ e $-627.1011 \pm 0.00019i$, caracterizando um sistema instável.

O controle LQR para este caso, já visto no exemplo 5.2, fornece

$$F_c^* = -B'R^{-1}P^* = \begin{bmatrix} -8681 & -2986 & 0 & 0 & -16 & -3 & 0 & 0 \\ -3033 & -8678 & 0 & 0 & -3 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8685 & -2986 & 0 & 0 & -16 & -3 \\ 0 & 0 & -3035 & -8678 & 0 & 0 & -3 & -15 \end{bmatrix}$$

cuja realimentação em malha fechada produz os autovalores: $-461.89 \pm 0.007834i$, $-464.96 \pm 0.007897i$, $-626.86 \pm 0.00016931i$ e $-627.09 \pm 0.00018834i$. O índice de desempenho é dado por: $\bar{J}_c^* = \frac{\text{tr}[P(F_c^*)]}{8} = 3.6065 \times 10^4$.

O controle LQRd para este caso, já visto no exemplo 5.4 fornece, para

$$x^0 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

$$F_D^* = \begin{bmatrix} -11720 & 0 & 0 & 0 & -20.692 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11616 & 0 & 0 & 0 & -16.741 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11720 & 0 & 0 & 0 & -20.692 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11616 & 0 & 0 & 0 & -16.741 \end{bmatrix}$$

cuja realimentação em malha fechada gera os autovalores: $-691.88 \pm 430.16i$, $-691.85 \pm 430.15i$, $-771.12 \pm 0.0053716i$, $-511.71 \pm 0.0017196i$. O índice de desempenho associado é: $\bar{J}_d^* = \frac{\text{tr}[P(F_D^*)]}{8} = 4.1613 \times 10^4$.

A partir de agora vamos aplicar o algoritmo visto na seção 6.5.2. Em primeiro lugar F_c^* será a inicializadora. Após 33 iterações, com uma tolerância de 10^{-11} , o resultado seria:

$$F_{2p}^* = \begin{bmatrix} -11156 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11156 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11156 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11156 & 0 & 0 & 0 & -22 \end{bmatrix}$$

cuja realimentação em malha fechada gera os autovalores: $-1242 \pm 0.011917i$, $-961.52 \pm 0.027017i$, $-605.87 \pm 0.022831i$, $-310.99 \pm 3.2834 \times 10^{-6}i$. O índice de desempenho associado é: $\bar{J}_{2p}^* = \frac{\text{tr}[P(F_{2p}^*)]}{8} = 4.0294 \times 10^4$.

Seja agora $F^0 = F_D^*$. Após 32 iterações, o resultado seria

$$F_{2p}^* = \begin{bmatrix} -11156 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11156 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11156 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11156 & 0 & 0 & 0 & -22 \end{bmatrix}$$

O índice de desempenho seria igual ao visto acima.

Vamos agora preparar uma inicializadora PD_{2p} , tomando as médias aritméticas dos elementos das diagonais principais de F_D^* , já vista no exemplo 6.2. Isto leva a

$$F^0 = \begin{bmatrix} -11668 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11668 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11668 & 0 & 0 & 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11668 & 0 & 0 & 0 & -19 \end{bmatrix}$$

O algoritmo converge em 32 iterações para a F_{2p}^* acima.

Seja agora $F^0 = F$ uma matriz qualquer (aleatória), dada por:

$$F = \begin{bmatrix} 0.9501 & 0.8913 & 0.8214 & 0.9218 & 0.9355 & 0.0579 & 0.1389 & 0.2722 \\ 0.2311 & 0.7621 & 0.4447 & 0.7382 & 0.9169 & 0.3529 & 0.2028 & 0.1988 \\ 0.6068 & 0.4565 & 0.6154 & 0.1763 & 0.4103 & 0.8132 & 0.1987 & 0.0153 \\ 0.4860 & 0.0185 & 0.7919 & 0.4057 & 0.8936 & 0.0099 & 0.6038 & 0.7468 \end{bmatrix}$$

cuja realimentação em malha fechada produz os seguintes autovalores: 680.8137, 635.1964, 460.9791, 477.7942, -617.4441, -577.7981, -450.2990 e -466.0277. Após 12 iterações o método leva:

$$F_{2p} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 2.70 & 0 & 0 & 0 & 35.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.70 & 0 & 0 & 0 & 35.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.70 & 0 & 0 & 0 & 35.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.70 & 0 & 0 & 0 & 35.04 \end{bmatrix}$$

que é PD_{2p} mas não é solução pois gera os autovalores: $461.91 \pm 0.0078342i$, $626.86 \pm 0.00019194i$, $-464.95 \pm 0.0078968i$ e $-627.09 \pm 0.00017708i$

Seja agora $F^0 = F$ uma outra matriz qualquer (aleatória), dada por:

$$F = \begin{bmatrix} 0.6226 & 0.2233 & 0.9275 & 0.0217 & 0.1870 & 0.4796 & 0.2625 & 0.0135 \\ 0.1326 & 0.3966 & 0.3911 & 0.1595 & 0.9913 & 0.4960 & 0.1863 & 0.3697 \\ 0.3100 & 0.1351 & 0.5113 & 0.8445 & 0.7120 & 0.2875 & 0.9171 & 0.6986 \\ 0.1348 & 0.2411 & 0.0929 & 0.8792 & 0.8714 & 0.0609 & 0.1233 & 0.8894 \end{bmatrix}$$

cuja realimentação em malha fechada produz os seguintes autovalores: 689.16, 647.59, 449.29, 479.33, -606.81, -566.41, -481.52 e -448.29, tem-se após 94 iterações a matriz PD_{2p} :

$$F_{2p}^* = \begin{bmatrix} -11156 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11156 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11156 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11156 & 0 & 0 & 0 & -22 \end{bmatrix}$$

O índice de desempenho permanece igual ao anterior.

Capítulo 7

Simulações

7.1 Introdução

Neste capítulo será analisada a eficácia das estratégias dos controles centralizado, descentralizado e descentralizado a dois parâmetros. Isto será feito por meio de simulações sobre a aplicação das respectivas leis de controle no posicionamento do rotor, inicialmente em um exemplo acadêmico e por fim, em um exemplo real associado ao protótipo.

7.2 Sistema Acadêmico

Para o sistema apresentado nos exemplos 5.1, 5.3, 6.1 e 6.3, foram geradas as seguintes leis de controle:

- Controle Ótimo Centralizado:

$$F_c^* = -B'R^{-1}P^* = \begin{bmatrix} -2.3362 & -1.0694 & -2.9891 & -1.3099 \\ -2.1021 & -2.7307 & -1.3099 & -3.7139 \end{bmatrix}$$

- Controle Ótimo Descentralizado:

Para

$$x_0 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

$$F_D^* = \begin{bmatrix} -3.2271 & 0.0000 & -4.4479 & 0.0000 \\ 0.0000 & -4.7713 & 0.0000 & -4.2231 \end{bmatrix}$$

onde x_0 é o vetor de estados iniciais empregado no algoritmo do caso descentralizado.

- Controle Ótimo Descentralizado a dois parâmetros — Caso II:

$$F_{2p}^* = \begin{bmatrix} -3.6959 & 0.0000 & -4.3791 & 0.0000 \\ 0.0000 & -3.6959 & 0.0000 & -4.3791 \end{bmatrix}$$

Na seção 7.4 serão apresentadas as curvas geradas pelas simulações das leis de controle acima. Nestas curvas serão mostradas a evolução dos estados (1 e 2) em relação ao tempo, e por fim, a comparação entre as leis de controle na evolução do estado 1.

Em todas as simulações o vetor de estados iniciais x_0 é dado por:

$$x_0 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

7.3 Sistema Real

Para o sistema apresentado nos exemplos 5.2, 5.4, 6.2 e 6.4, foram geradas as seguintes leis de controle:

- Controle Ótimo Centralizado:

$$F_c^* = -B'R^{-1}P^* = \begin{bmatrix} -8681 & -2986 & 0 & 0 & -16 & -3 & 0 & 0 \\ -3033 & -8678 & 0 & 0 & -3 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8685 & -2986 & 0 & 0 & -16 & -3 \\ 0 & 0 & -3035 & -8678 & 0 & 0 & -3 & -15 \end{bmatrix}$$

- Controle Ótimo Descentralizado:

Para

$$x_0 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

$$F_D^* = \begin{bmatrix} -11720 & 0 & 0 & 0 & -20.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11616 & 0 & 0 & 0 & -16.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11720 & 0 & 0 & 0 & -20.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11616 & 0 & 0 & 0 & -16.7 \end{bmatrix}$$

onde x_0 é o vetor de estados iniciais empregado no algoritmo do caso descentralizado.

- Controle Ótimo Descentralizado a dois parâmetros — Caso II:

$$F_{2p}^* = \begin{bmatrix} -11156 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11156 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11156 & 0 & 0 & 0 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11156 & 0 & 0 & 0 & -22 \end{bmatrix}$$

Na seção 7.4 serão apresentadas as curvas geradas pelas simulações das leis de controle acima. Nestas curvas serão mostradas a evolução do estados (1 e 2) relacionados ao deslocamento radial do rotor em relação aos planos dos sensores superiores e inferiores, ao longo do eixo x em relação ao tempo, e por fim, a comparação entre as leis de controle na evolução do estado 1.

Em todas as simulações o vetor de estados iniciais x_0 é dado por:

$$x_0 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

7.4 Simulação

Nesta subseção serão mostradas as curvas referentes às simulações das leis de controle associadas aos sistemas acadêmico e real, descritas nas subseções 7.2 e 7.3.

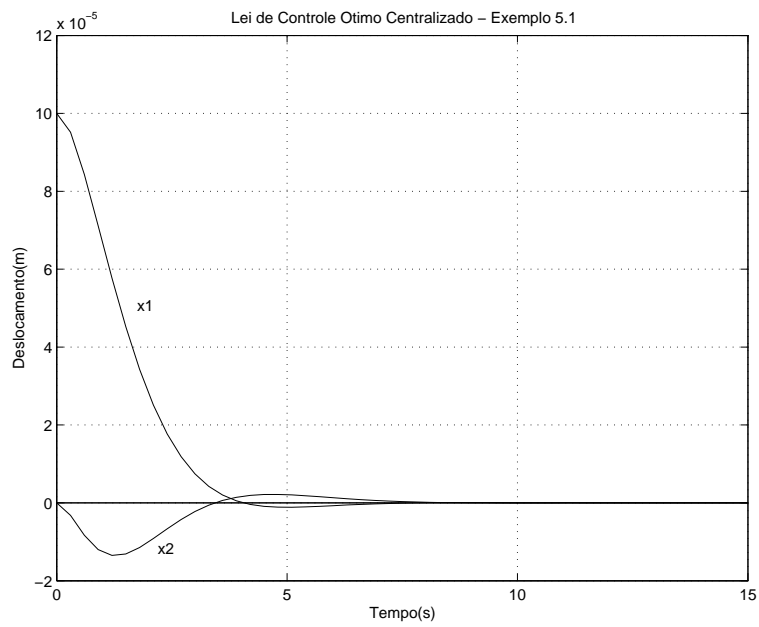


FIGURA 7.1: Simulação sobre a Aplicação da Lei de Controle LQR - Exemplo Acadêmico.

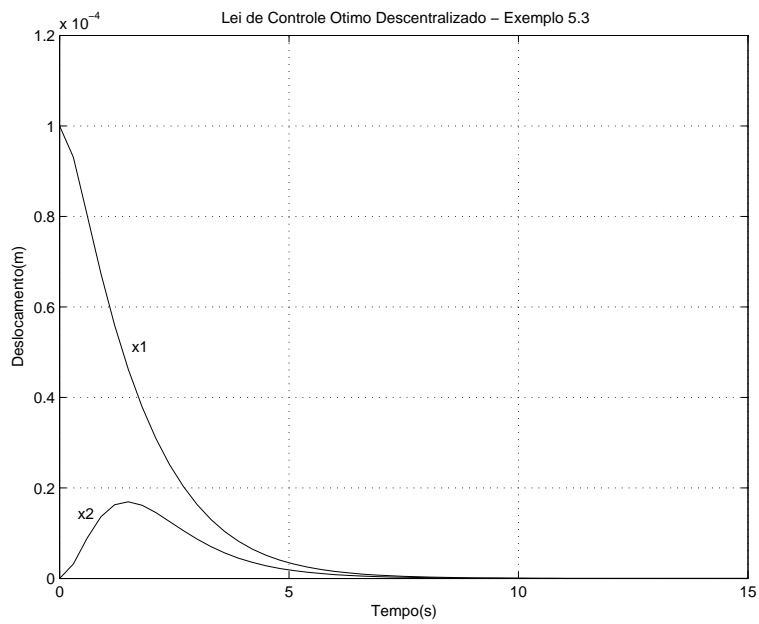


FIGURA 7.2: Simulação sobre a Aplicação da Lei de Controle Descentralizado ótimo - Exemplo Acadêmico.

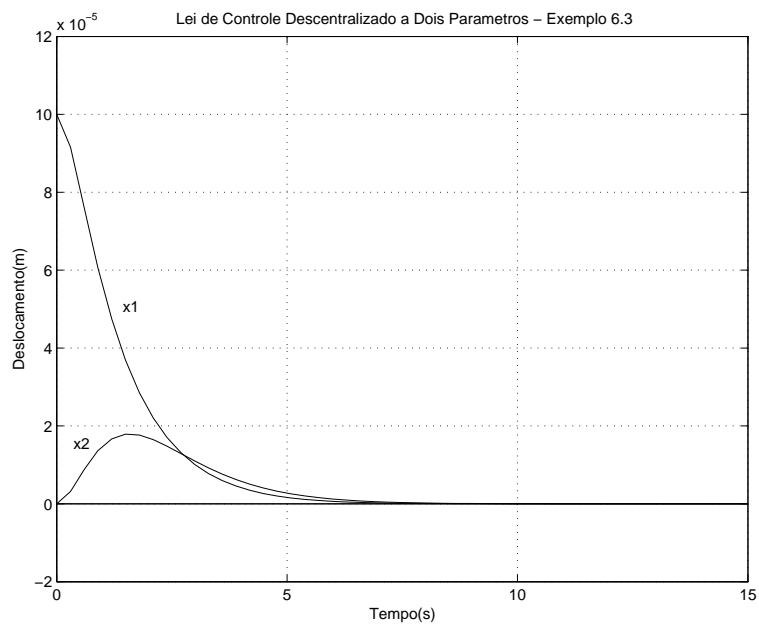


FIGURA 7.3: Simulação sobre a Aplicação da Lei de Controle PD_{2p} ótimo - Exemplo Acadêmico.

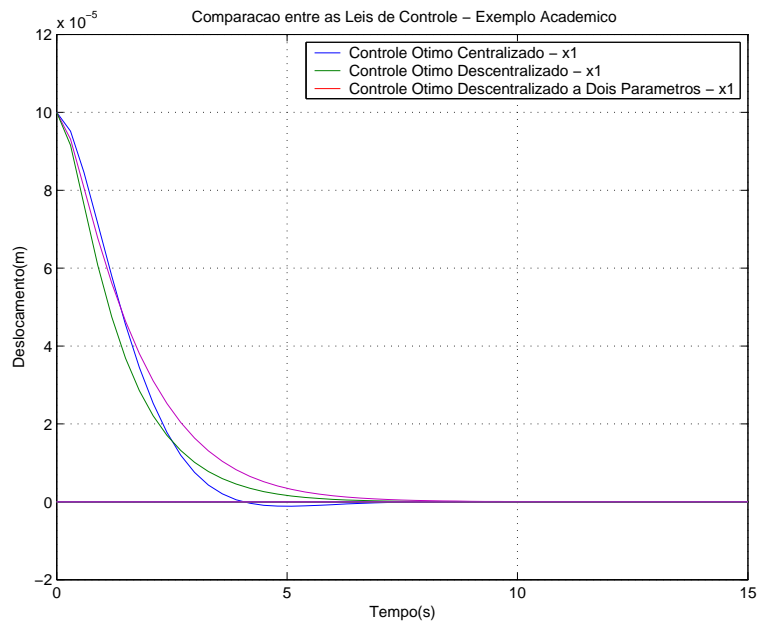


FIGURA 7.4: Simulação sobre a Comparação das Leis de Controle - Exemplo Acadêmico.

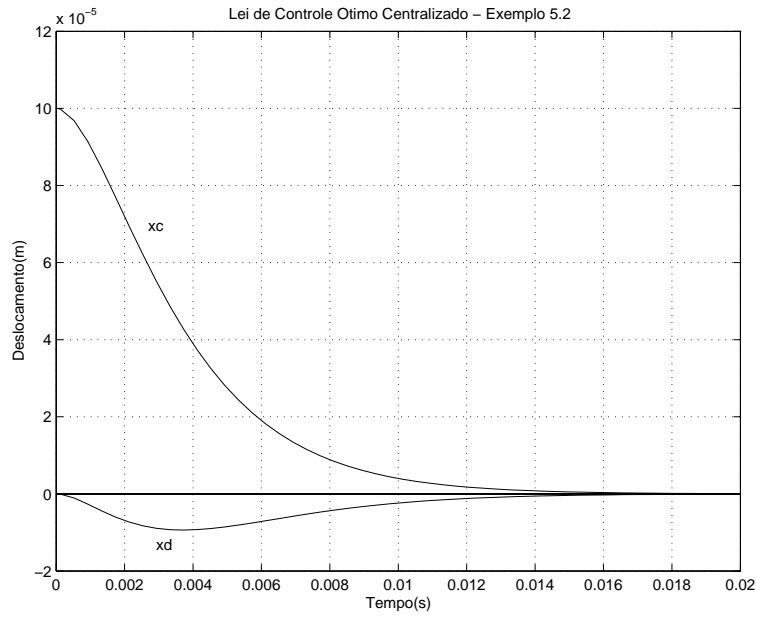


FIGURA 7.5: Simulacao sobre a Aplicacao da Lei de Controle LQR - Exemplo Real.

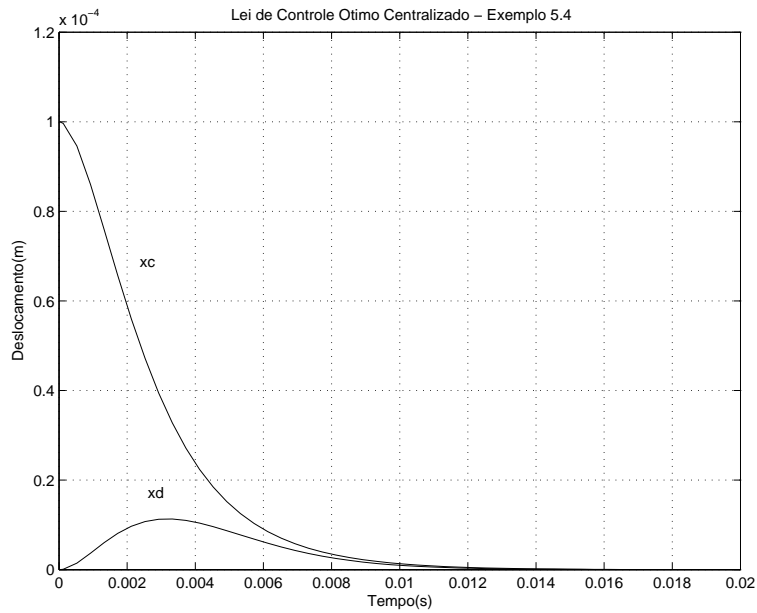


FIGURA 7.6: Simulação sobre a Aplicação da Lei de Controle Descentralizado ótimo - Exemplo Real.

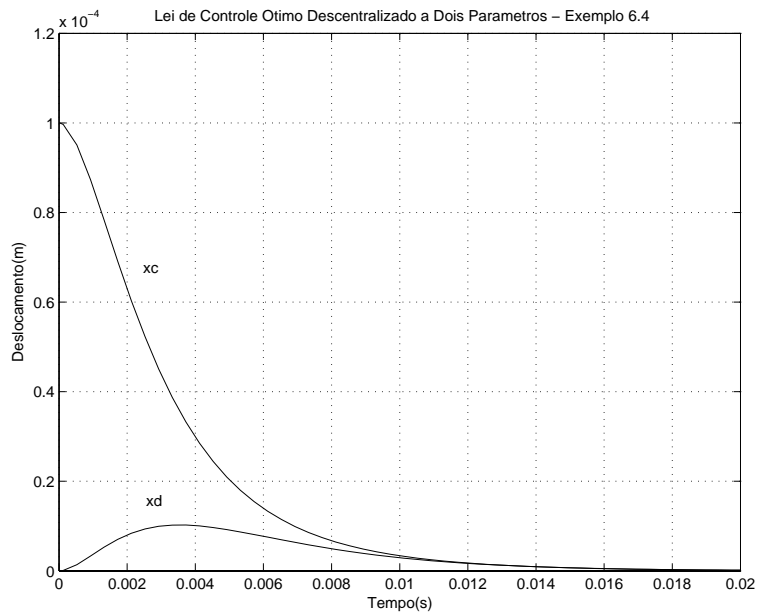


FIGURA 7.7: Simulação sobre a Aplicação da Lei de Controle PD_{2p} ótimo - Exemplo Real.

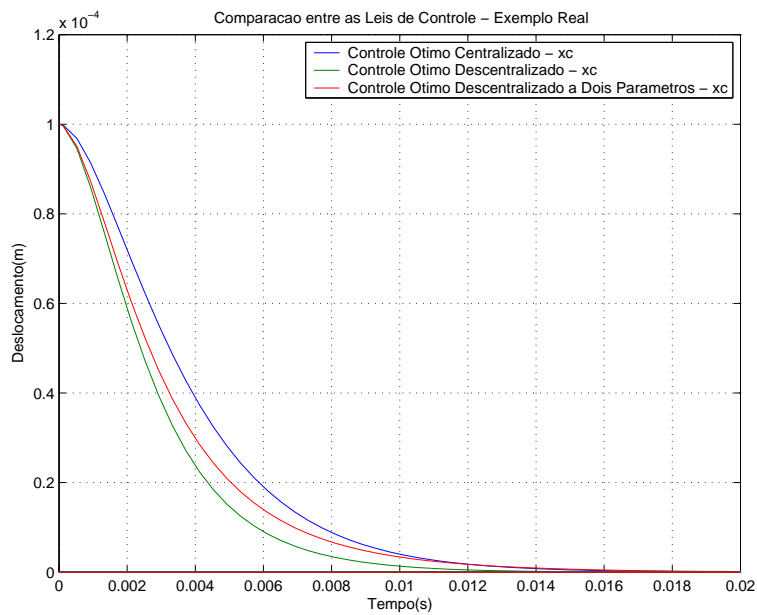


FIGURA 7.8: Simulação sobre a Comparação das Leis de Controle - Exemplo Real.

7.5 Conclusões

A análise da seção anterior sugere as seguintes conclusões:

- No Sistema Acadêmico nota-se uma diferença qualitativa entre os controles descentralizado e descentralizado a dois parâmetros, e o controle centralizado. As duas abordagens descentralizadas revelaram uma diferença qualitativa muito pequena entre seus transitórios; elas apresentam resultados próximos à abordagem centralizada, revelando assim a sua sub otimalidade. A técnica descentralizada a dois parâmetros apresentou um resultado próximo à descentralizada comum. A técnica que revelou maior velocidade de convergência foi a centralizada, seguida da descentralizada e por fim, da descentralizada a dois parâmetros.
- No Sistema Real também se nota uma diferença qualitativa entre os controles descentralizado e descentralizado a dois parâmetros, e o controle centralizado. Agora a diferença qualitativa entre as técnicas descentralizadas é um pouco maior do que a notada no caso acadêmico. As técnicas descentralizadas mostram resultados próximos à centralizada, revelando assim a sua sub otimalidade. A técnica descentralizada a dois parâmetros apresentou um resultado próximo e levemente superior à descentralizada comum, ou seja, mais próximo do resultado centralizado. No que se refere à velocidade de convergência, a técnica que se revelou melhor foi a descentralizada, seguida da descentralizada a dois parâmetros e por fim, da centralizada.

Capítulo 8

Conclusões do Trabalho e Propostas para Novos Trabalhos

Os conceitos recapitulados nos quatro primeiros capítulos desta tese tiveram caráter introdutório e serviram de base para os capítulos subseqüentes. Inicialmente foi apresentado o mancal-magnético, o seu princípio de funcionamento e a sua operação em modo diferencial; em seguida, foi apresentada a modelagem do mancal-motor empregado no protótipo estudado, obtendo-se as forças radiais de restauração, e por fim apresentada a dinâmica do rotor.

No capítulo cinco foi apresentado o modelo matemático do sistema a ser controlado, gerado a partir da análise dinâmica descrita no capítulo anterior, e revistas e comparadas as técnicas de controle centralizado e descentralizado empregadas no controle de posicionamento do rotor. Por fim, foram geradas condições necessárias de otimalidade e um algoritmo gerador dos ganhos de realimentação nelas baseado.

No capítulo seis foi proposta uma nova abordagem para o controle descentralizado que consiste em uma particularização da abordagem anterior (imposição de um único parâmetro para as partições proporcional e derivativa da matriz de ganhos). Inicialmente foi considerado o caso em que o índice de desempenho depende dos estados iniciais. Para ele foi formulado o problema de controle associado, foram obtidas as condições necessárias de otimalidade e foi proposto um algoritmo para obtenção dos ganhos. A convergência do algoritmo não foi estudada, o que leva a necessidade de trabalhos adicionais nesta direção. Comentários mais detalhados sobre os resultados

encontrados para este primeiro caso foram feitos no final da seção 6.4.

Posteriormente, eliminou-se a dependência do índice de desempenho das condições iniciais. Isto permitiu a obtenção de condições necessárias de otimalidade bem mais tratáveis do que antes. Para o problema prático de se determinar uma solução ótima foi proposto um algoritmo para resolver as condições necessárias. Em uma bateria de testes o funcionamento deste algoritmo se revelou bastante satisfatório. Ainda não há resultados teóricos concretos, mas os testes sugerem de forma forte que o algoritmo sempre converge.

A nova tática proposta, como se vê nos capítulos 6 e 7, leva a resultados praticamente idênticos aos da técnica descentralizada. Nos exemplos analisados há mesmo uma leve superioridade da nova proposta, medida pelos índices: $\bar{J}_{2p}^* < \bar{J}_d^*$.

Estas duas táticas descentralizadas apresentam resultados próximos ao do caso centralizado, o que caracteriza a sua sub otimalidade.

Como propostas para novos trabalhos podem ser sugeridas:

- Estabelecer teoricamente a convergência dos algoritmos propostos.
- Aprimorar os algoritmos no sentido de se elevar a sua velocidade de convergência.
- Desenvolver métodos de obtenção das condições suficientes de otimalidade para os casos de dependência e independência dos estados iniciais.
- Empregar novas técnicas de controle no posicionamento do rotor, como por exemplo controle robusto e adaptativo.
- Considerar a não-linearidade existente no sistema na sua modelagem e dinâmica.
- Propor novas técnicas para o controle dos movimentos axiais do rotor, ou mesmo pensar em controlá-los de maneira ativa.

Apêndice A

Programa de Controle Ótimo LQR: Exemplo 5.1

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%% Programa para Geracao da Matriz de Realimentacao Centralizada Otima do Exemplo 5.1 %%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
clear all; clc;  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Matrizes do Sistema Academico %%%%%%%%%%%  
  
A21=[1 1;1 1]; A22=[1 1;0 1];A=[[zeros(2)] [eye(2)];[A21] [A22]];  
B1=zeros(2,2);B2=[1 0;0 1];B=[B1;B2];  
x0=10^(-4)*[1 0 0 0]'; % vetor de estados iniciais  
AVA=eig(A); % autovalores do sistema a malha aberta  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Matrizes de Ponderacao %%%%%%%%%%%  
  
R=eye(2,2); % matriz de ponderacao associada as entradas do sistema  
Q=diag([1 1 0 0]); % matriz de ponderacao associada aos estados do sistema  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Lei de Controle %%%%%%%%%%%  
  
[K,S,E]=lqr(A,B,Q,R); % comando do matlab para calcular a matriz de ganhos otimos  
P=S; % solucao da equacao de riccati matricial algebrica  
Fc=-K; % matriz de ganhos centralizada  
AVAF=E; % autovalores do sistema a malha fechada  
Jc=x0'*P*x0; % indice de desempenho
```

Apêndice B

Programa de Controle Ótimo LQR: Exemplo 5.2

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%% Programa para Geracao da Matriz de Realimentacao Centralizada Otima do Exemplo 5.2 %%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
clear all; clc;  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Parametros inerciais e geometricos do rotor %%%%%%%%%%%%%%%  
  
a=-68.9*10^-3;b=82.8*10^-3;c=-148.0*10^-3;d=0.163;g=-218.0*10^-3;m=4.91;  
Iyy=50.30*10^-3;Ixx=Iyy;Izz=2.26*10^-6;  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Rigidez e amortecimento devido ao mancal axial %%%%%%%%%%%%%%%  
  
Kh=1368; Ch=2.89; % cooling height de 10 mm  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Numero de voltas equivalente %%%%%%%%%%%%%%%  
  
gama=0.6; n=165; ne=99;  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Geometria do gap %%%%%%%%%%%%%%%  
  
h=0.4*10^-3;Area=3.734*10^-3;I0=1.17;mi0=4*pi*10^-7;  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Parametros eletricos %%%%%%%%%%%%%%%  
  
L2=34.24*10^-3;Lm=350.43*10^-3;R2=13.97;tau2=2.45*10^-3;taum=25.08*10^-3;  
tau=tau2+taum;  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Velocidade angular de operacao, deslizamento de operacao e velocidade do rotor %%%%%%%%%%%%%%%
```

```

omega=240*pi;f=120;sigma=0.05;omegar=0.95*omega/2;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calculos iniciais associados a modelagem do mancal-motor %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Ganho de amplitude %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

alfa=sqrt((1+tau2^2*(sigma*omega)^2)/(1+(tau2+taum)^2*(sigma*omega)^2));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Deslocamento de fase %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

beta=atan((-sigma*omega)*taum/(1+(sigma*omega)^2*tau2*(tau2+taum)));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Constante de posicao %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Kp=2*(mi0*Area*ne^2*I0^2*alfa^2)/h^3;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Constante de corrente %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Ki=(mi0*Area*ne^2*I0*alfa^2)/h^2;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calculos associados a dinamica do sistema %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Definicoes
Kpa=Kp;Kpb=Kpa; % constante de posicao dos mancais a e b iguais a Kp
Kia=Ki;Kib=Kia; % constante de corrente dos mancais a e b iguais a Ki
KZ=diag([Kpa Kpb Kpa Kpb]);Ku=diag([Kia Kib Kia Kib]);
% Matrizes associadas ao mancal axial e matrizes de transformacao
S=Kh*[1 g 0 0;g g^2 0 0;0 0 1 g;0 0 g g^2]; % matriz relacionada a dureza
% horizontal do mancal axial
C=Ch*[1 g 0 0;g g^2 0 0;0 0 1 g;0 0 g g^2]; % matriz relacionada ao efeito
% de amortecimento do mancal axial

% Matrizes de transformacao
TB=(1/(b-a))*[b -a 0 0;-1 1 0 0;0 0 b -a;0 0 -1 1]; % matriz de transformacao de zB para z
TD=[1 c 0 0;1 d 0 0;0 0 1 c;0 0 1 d]; % matriz de transformacao de z para zS
TS=TD*TB; % matriz de transformacao de zB para zS

% Matrizes da equacao dinamica do rotor relacionado ao C G deste
M=[m 0 0 0;0 Ixx 0 0;0 0 m 0;0 0 0 Iyy]; % matriz de inercia
G=[0 0 0 0;0 0 0 Izz*omegar;0 0 0 0;0 -Izz*omegar 0 0]; % matriz giroscopica

% Matrizes da equacao dinamica do rotor em termos de zB
MB=TB'*M*TB;GB=TB'*G*TB;SB=TB'*S*TB;CB=TB'*C*TB;

% Matrizes da equacao dinamica do rotor em termos de zS
MS=TS*MB*inv(TS);GS=TS*GB*inv(TS);CS=TS*CB*inv(TS);KS=TS*KZ*inv(TS);
SS=TS*SB*inv(TS);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Geracao do modelo linear para o funcionamento em estado estacionario do %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% sistema de posicionamento do rotor %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

A11=zeros(4,4); % submatriz (4x4) de A
A12=eye(4,4); % submatriz (4x4) de A
A21=inv(MS)*(KS-SS); % submatriz (4x4) de A
A22=-inv(MS)*(GS+CS); % submatriz (4x4) de A
B1=zeros(4,4); % submatriz (4x4) de B
B2=inv(MS)*TS*Ku; % submatriz (4x4) de B
B=[B1;B2]; % matriz (8x4)
A=[[A11 A12];[A21 A22]]; % matriz (8x8)
x0=10^(-4)*[1 0 0 0 0 0 0 0]'; % vetor de estados iniciais

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Matrizes de Ponderacao %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

R=eye(4,4); % matriz de ponderacao associada aos entradas do sistema
Q=diag([1 1 1 1 0 0 0 0]); % matriz de ponderacao associada aos estados do sistema

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Lei de Controle %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[K,S,E]=lqr(A,B,Q,R); % comando do matlab para calcular a matriz de ganhos otimos
P=S; % solucao da equacao de riccati matricial algebrica
Fc=-K; % matriz de ganhos centralizada
AVAF=E; % autovalores do sistema a malha fechada
Jc=x0'*P*x0; % indice de desempenho

```

Apêndice C

Programa de Controle Ótimo Descentralizado: Exemplo 5.3

```
function algoritmolqrdmodificado4x4 (x0)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Programa para Geracao da Matriz de Realimentacao Descentralizada Otima do Exemplo 5.3 %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Matrices do Sistema Academico %%%%%%%%%
A21=[1 1;1 1]; A22=[1 1;0 1];A=[[zeros(2)] [eye(2)];[A21] [A22]];

B1=zeros(2,2);B2=[1 0;0 1];B=[B1;B2];

X0=x0*x0' % matriz associada aos estados iniciais

AVA=eig(A); % autovalores do sistema a malha aberta

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Matrices de Ponderacao %%%%%%%%%
R=eye(2,2); % matriz de ponderacao associada aos entradas do sistema
Q=diag([1 1 0 0]); % matriz de ponderacao associada aos estados do sistema

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Controle Centralizado %%%%%%%%%

[K,S,E]=lqr(A,B,Q,R); % comando do matlab para calcular a matriz de ganhos otimos
P=S; % solucao da equacao de riccati matricial algebrica
Fc=-K; % matriz de ganhos centralizada
AVAF=E; % autovalores do sistema a malha fechada
Jc=x0'*P*x0; % indice de desempenho
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Controle Descentralizado %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

r1=1;r2=1;b1=B(:,1);b2=B(:,2);          % elementos da diagonal principal de R e colunas de B

C1=[1 0 0 0;0 0 1 0];                  % matriz de insercao do subsistema 1

C2=[0 1 0 0;0 0 0 1];                  % matriz de insercao do subsistema 2

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Algoritmo para a geracao do Fdescentralizado %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% tol=1.3457e-006                       % valor do erro maximo admissivel (maximo valor singular)

% iteracao 1
disp('Solucao do Problema LQR Via Comando LQR do Matlab');
Fi=-lqr(A,B,Q,R);
Fcentralizado=Fi                        % estabilizadora inicial (passo 1)
autovalsdosistcentralizado=eig(A+B*Fi)
A0=A+B*Fi;                              % passo 2
X=lyap(A0,X0);                          % passo 3
Fr1=Fi(1,:);                            % quebra de Fi em linhas
Fr2=Fi(2,:);                            % quebra de Fi em linhas
%%%% Fri=Fi*Ci                          % relacao entre a i-esima
                                        % linha da matriz F e
                                        % Fi(1x2)
%%%% Fri'=Ci'*Fi'
N=Q+Fr1'*r1*Fr1+Fr2'*r2*Fr2;            % artificio para o comando lyap do matlab
P=lyap(A0',N);                          % passo 4
F1=-inv(r1)*b1'*P*X*C1'*inv(C1*X*C1'); % passo 5
F2=-inv(r2)*b2'*P*X*C2'*inv(C2*X*C2'); % passo 5
Fimu=[F1*C1;F2*C2];                    % passo 5
A0mu=A+B*Fimu; autovaloresdosist=eig(A0mu); V=autovaloresdosist;
Vr = real(autovaloresdosist); cont=0; Fimufinal=Fimu; tol =
1.3457e-6; lambda = autovaloresdosist; indice = find(Vr>=0);

disp('Algoritmo para a Solucao do Problema LQRd'); % mostra o texto no workspace do matlab

% LOGICA
if indice~=[];
    % disp('algoritmo de geracao do Lqrd falha:');
    cont=1;
    autovalsdaiteracaoidoalgoritmo=autovaloresdosist
else
    % disp('algoritmo de geracao do Lqrd funciona:');
    cont=0;
    autovalsdaiteracaoidoalgoritmo=autovaloresdosist
    Fdescentralizado=Fimufinal
    autovalsdosistdescentralizado=eig(A+B*Fdescentralizado)
    epsilon=Fdescentralizado-Fcentralizado;

```

```

        delta = norm(epsilon); % PRIMEIRA ITERACAO
end

while cont==0

    F2=Fimufinal; % passo 1
    A02=A+B*F2; % passo 2
    X2=lyap(A02,X0); % passo 3
    Fr12=F2(1,:); % quebra de Fi em linhas
    Fr22=F2(2,:); % quebra de Fi em linhas
    N2=Q+Fr12'*r1*Fr12+Fr22'*r2*Fr22; % artificio para o comando lyap
    P2=lyap(A02',N2) ; % passo 4
    F12=-inv(r1)*b1'*P2*X2*C1'*inv(C1*X2*C1'); % passo 5
    F22=-inv(r2)*b2'*P2*X2*C2'*inv(C2*X2*C2'); % passo 5
    Fimufinal=[F12*C1;F22*C2]; % passo 5
    A02novo=A+B*Fimufinal;
    lambda=[lambda eig(A02novo)];
    epsiloniteracao=F2-Fimufinal;
    deltadeiteracao=norm(epsiloniteracao);
    if deltadeiteracao <= tol
        cont = 1;
        Fimufinal
        EIGVALS_ABFimufinal = eig(A+B*Fimufinal)
    else
        cont = 0;
    end
end

end

% LOGICA
if indice~=[];
    disp('condicao inicial invalida, com isso o algoritmo de geracao do Lqrd falha');
    cont=1;
else
    disp('condicao inicial valida, com isso o algoritmo de geracao do Lqrd funciona');
    cont=0;
end

end

```

Apêndice D

Programa de Controle Ótimo Descentralizado: Exemplo 5.4

```
function algoritmolqrdmodificado (x0)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Programa para Geracao da Matriz de Realimentacao Descentralizada Otima do Exemplo 5.4 %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clc

% Parametros inerciais e geometricos do rotor
a=-68.9*10^-3;b=82.8*10^-3;c=-148.0*10^-3;d=0.163;g=-218.0*10^-3;m=4.91;
Iyy=50.30*10^-3;Ixx=Iyy;Izz=2.26*10^-6;
% Rigidez e amortecimento devido ao mancal axial
Kh=1368;Ch=2.89; %cooling height de 10 mm
% Numero de voltas equivalente
gama=0.6;n=165;ne=99;
% Geometria do gap
h=0.4*10^-3;Area=3.734*10^-3;I0=1.17;mi0=4*pi*10^-7;
% Parametros eletricos
L2=34.24*10^-3;Lm=350.43*10^-3;R2=13.97;tau2=2.45*10^-3;taum=25.08*10^-3;
tau=tau2+taum;
% Velocidade angular de operacao, deslizamento de operacao e velocidade do rotor
omega=240*pi;f=120;sigma=0.05;omegar=0.95*omega/2;

X0=x0'*x0 % matriz associada aos estados iniciais

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Calculos iniciais associados a modelagem do mancal-motor %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Ganho de amplitude
```



```

alfa=sqrt((1+tau2^2*(sigma*omega)^2)/(1+(tau2+taum)^2*(sigma*omega)^2));
% Deslocamento de fase
beta=atan((-sigma*omega)*taum)/(1+(sigma*omega)^2*tau2*(tau2+taum));
% Constante de posicao
Kp=2*(mi0*Area*ne^2*I0^2*alfa^2)/h^3;
% Constante de corrente
Ki=(mi0*Area*ne^2*I0*alfa^2)/h^2;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calculos associados a dinamica do sistema %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Definicoes
Kpa=Kp;Kpb=Kpa; % Constante de posicao dos mancais a e b iguais a Kp
Kia=Ki;Kib=Kia; % Constante de corrente dos mancais a e b iguais a Ki
KZ=diag([Kpa Kpb Kpa Kpb]);Ku=diag([Kia Kib Kia Kib]); % isto e o normal

% Matrizes associadas ao mancal axial e matrizes de transformacao
S=Kh*[1 g 0 0;g g^2 0 0;0 0 1 g;0 0 g g^2]; % matriz relacionada a dureza
% horizontal do mancal axial
C=Ch*[1 g 0 0;g g^2 0 0;0 0 1 g;0 0 g g^2]; % matriz relacionada ao efeito
% de amortecimento do mancal axial

% Matrizes de transformacao
TB=(1/(b-a))*[b -a 0 0;-1 1 0 0;0 0 b -a;0 0 -1 1]; % matriz de transformacao
% de zB para z
TD=[1 c 0 0;1 d 0 0;0 0 1 c;0 0 1 d]; % matriz de transformacao de z para zS
TS=TD*TB; % matriz de transformacao de zB para zS

% Matrizes da equacao dinamica do rotor relacionado ao C.M. deste
M=[m 0 0 0;0 Ixx 0 0;0 0 m 0;0 0 0 Iyy]; % matriz de inercia
G=[0 0 0 0;0 0 0 Izz*omegar;0 0 0 0;-Izz*omegar 0 0]; % matriz giroscopica

% Matrizes da equacao dinamica do rotor em termos de zB
MB=TB'*M*TB;GB=TB'*G*TB;SB=TB'*S*TB;CB=TB'*C*TB;

% Matrizes da equacao dinamica do rotor em termos de zS
MS=TS*MB*inv(TS);GS=TS*GB*inv(TS);CS=TS*CB*inv(TS);KS=TS*KZ*inv(TS);
SS=TS*SB*inv(TS);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Geracao do modelo linear para o funcionamento em estado estacionario do %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% sistema de posicionamento do rotor %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A11=zeros(4,4); % submatriz (4x4) de A
A12=eye(4,4); % submatriz (4x4) de A
A21=inv(MS)*(KS-SS); % submatriz (4x4) de A
A22=-inv(MS)*(GS+CS); % submatriz (4x4) de A
B1=zeros(4,4); % submatriz (4x4) de B
B2=inv(MS)*TS*Ku; % submatriz (4x4) de B
B=[B1;B2]; % matriz (8x4)

```

```

A=[[A11 A12];[A21 A22]]; % matriz (8x8)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Lei de Controle %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Controle centralizado
R=eye(4,4);Q=diag([1 1 1 1 0 0 0 0]); % matrizes de ponderacao

% Controle descentralizado
r1=1;r2=1;r3=1;r4=1; b1=B(:,1);b2=B(:,2);b3=B(:,3);b4=B(:,4); C1=[1
0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 1 0 0 0];C2=[0 1 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 1 0 0];
C3=[0 0 1 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 1 0];C4=[0 0 0 1 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0
0 1]; % elementos da diagonal de R, colunas de B e matrizes de insercao

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Algoritmo para a geracao do Fdescentralizado %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% tol=1.0e-006 % valor do erro maximo admissivel (maximo valor singular)

% iteracao 1
disp('Solucao do Problema LQR Via Comando LQR do Matlab');
Fi=-lqr(A,B,Q,R);
Fcentralizado=Fi % estabilizadora inicial (passo 1)
autovalsdosistcentralizado=eig(A+B*Fi)

A0=A+B*Fi; % passo 2
X=lyap(A0,X0); % passo 3
Fr1=Fi(1,:); % quebra de Fi em linhas
Fr2=Fi(2,:); % quebra de Fi em linhas
Fr3=Fi(3,:); % quebra de Fi em linhas
Fr4=Fi(4,:); % quebra de Fi em linhas
%%% Fri=Fi*Ci % relacao entre a i-esima
% linha da matriz F e
% Fi(1x2)

%%% Fri'=Ci'*Fi'

N=Q+Fr1'*r1*Fr1+Fr2'*r2*Fr2+Fr3'*r3*Fr3+Fr4'*r4*Fr4; % artifício para o lyap
P=lyap(A0',N); % passo 4
F1=-inv(r1)*b1'*P*X*C1'*inv(C1*X*C1'); % passo 5
F2=-inv(r2)*b2'*P*X*C2'*inv(C2*X*C2'); % passo 5
F3=-inv(r3)*b3'*P*X*C3'*inv(C3*X*C3'); % passo 5
F4=-inv(r4)*b4'*P*X*C4'*inv(C4*X*C4'); % passo 5
Fimu=[F1*C1;F2*C2;F3*C3;F4*C4]; % passo 5
A0mu=A+B*Fimu; autovaloresdosist=eig(A0mu); V=autovaloresdosist;
Vr=real(autovaloresdosist); cont=0; Fimufinal=Fimu; tol=1e-6;
lambda=[autovaloresdosist];

indice = find(Vr>=0);

```

```

disp('Algoritmo para a Solucao do Problema LQRd');

% LOGICA
if indice~=[];
    % disp('algoritmo de geracao do Lqrd falha:');
    cont=1;
    autovalsdaiteracaoidoalgoritmo=autovaloresdosist
else
    % disp('algoritmo de geracao do Lqrd funciona:');
    cont=0;
    autovalsdaiteracaoidoalgoritmo=autovaloresdosist
    Fdescentralizado=Fimufinal
    autovalsdosistdescentralizado=eig(A+B*Fdescentralizado)
    epsilon=Fdescentralizado-Fcentralizado;
    delta=norm(epsilon)
end

while cont==0 % ENTRA QUANDO FUNCIONA!
    F2=Fimufinal; % passo 1
    A02=A+B*F2; % passo 2
    X2=lyap(A02,X0); % passo 3
    Fr12=[1 0 0 0]*F2; % quebra de Fi em linhas
    Fr22=[0 1 0 0]*F2; % quebra de Fi em linhas
    Fr32=[0 0 1 0]*F2; % quebra de Fi em linhas
    Fr42=[0 0 0 1]*F2; % quebra de Fi em linhas
    N2=Q+Fr12'*r1*Fr12+Fr22'*r2*Fr22+Fr32'*r3*Fr32+Fr42'*r4*Fr42 ;
    P2=lyap(A02',N2) ; % passo 4
    F12=-inv(r1)*b1'*P2*X2*C1'*inv(C1*X2*C1'); % passo 5
    F22=-inv(r2)*b2'*P2*X2*C2'*inv(C2*X2*C2'); % passo 5
    F32=-inv(r3)*b3'*P2*X2*C3'*inv(C3*X2*C3'); % passo 5
    F42=-inv(r4)*b4'*P2*X2*C4'*inv(C4*X2*C4'); % passo 5
    Fimufinal=[F12*C1;F22*C2;F32*C3;F42*C4]; % passo 5
    A02novo=A+B*Fimufinal;
    lambda=[lambda eig(A02novo)];
    epsilonideiteracao=F2-Fimufinal;
    deltadeiteracao=norm(epsilonideiteracao);
    if deltadeiteracao<=tol
        cont=1;
    else
        cont=0;
    end
end

end

% LOGICA
if indice~=[];
    disp('condicao inicial invalida, assim o algoritmo do Lqrd falha');

```

```
    cont=1;
else
    disp('condicao inicial valida, assim o algoritmo do Lqrd funciona');
    cont=0;
end
```

Apêndice E

Programa de Geração de Pontos do Domínio de Estabilidade no Espaço de Parâmetros (p,d): Exemplos 6.1 e 6.2

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%% Programa de Geração de Pontos do Domínio de Estabilidade no Espaço de Parâmetros (p,d) %%  
%% Exemplos 6.1 e 6.2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PARTE I %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%% Codigo de criacao da funcao responsavel pela geracao do ponto pertencente ao contorno de RE %  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
function PV = buscabissecao (R, pontos, angle, A, B, DimensaodassubmatrizesdeF)  
  
angle = angle*pi/180;  
PV = [];  
TOL = 1e-6;  
distancia = 1e+2;  
  
xslinha = distancia*cos(angle) ; yslinha=distancia*sin(angle);  
xs = xslinha+R(1);  
ys = yslinha+R(2);  
S = [xs ys];  
  
% PRIMO PASSO :: testar estabilidade dos pontos iniciais  
p = R(1); v = R(2);
```

```

dim = DimensaodassubmatrizesdeF;
F = [eye(dim)*p eye(dim)*v];
AF = A + B*F;
Ee = eig (AF);

p = S(1); v = S(2);
F = [eye(dim)*p eye(dim)*v];
AF = A + B*F;
Ei = eig (AF);
% Testar a instabilidade do ponto S. Se S nao e instavel, deve fazer ser!

ESTAVEL = 1;
for index2=1:length(Ei)
    if real(Ei(index2)) >= 0
        ESTAVEL = 0;
    end
end
if ESTAVEL == 1
    S = S*1000;
end

FIM = 0;
while FIM == 0,
% PASSO II :: pegar ponto medio e verificar estabilidade
    Pmedio = (R+S)/2;
    F = [eye(dim)*Pmedio(1) eye(dim)*Pmedio(2)];
    AF = A + B*F;
    E = eig (AF);
    % - -
    ESTAVEL = 1;
    for index2=1:length(E)
        if real(E(index2)) >= 0
            ESTAVEL = 0;
        end
    end
    % - -
    if ESTAVEL == 1 % o ponto e estavel!
        R = Pmedio;
    else
        S = Pmedio;
    end
    % - -
    if norm(S-R) <= TOL
        frontier = (R+S)/2;
        FIM = 1;
    end
end % end while
PV = [PV frontier'];

```



```
xlabel('p'); ylabel('d');
```

```
title(['Regiao de Estabilidade em torno do ponto [ ',num2str(R(1)),'  
,num2str(R(2)),' ]. Variacao Angular de -45 a 180 graus'])
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```


Apêndice F

Programa de Controle Ótimo PD_{2p} - Caso II: Exemplos 6.3 e 6.4

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%% Programa para Geracao da Matriz de Realimentacao Descentralizada Otima para o Caso II: %%  
%% Exemplos 6.3 e 6.4 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
clear all; clc;  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Entrada de dados: sistema %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SISTEMA 4x4 (ACADEMICO) %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
A21=[1 1;1 1]; A22=[1 1;0 1];  
B2=eye(2);  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Entrada da dados: matrizes de ponderacao  
R=eye(2);  
Q1=eye(2); Q2=zeros(2); Q3=zeros(2);  
% % $$$$$$ OBS1: INICIAL NAO ESTABILIZADORA GERA PD2P ESTABILIZADORA  
% % $$$$$$ OBS2: ESTABILIZADORA LQR GERA PD2P ESTABILIZADORA  
% % $$$$$$ OBS3: O ALGORITMO SEMPRE CONVERGE !!!  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SISTEMA 6X6 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
% A21=[1 2 3 ; 3 2 -1 ; 0 1 1]; A22=[1 0 -1 ; 0 1 1 ; 2 5 -3];  
% B2=eye(3);  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Entrada da dados: matrizes de ponderacao  
% R=eye(3);  
% Q1=eye(3); Q2=zeros(3); Q3=zeros(3);  
% % $$$$$$ OBS1: INICIAL NAO ESTABILIZADORA GERA PD2P ESTABILIZADORA  
% % $$$$$$ OBS2: ESTABILIZADORA LQR GERA PD2P ESTABILIZADORA  
% % $$$$$$ OBS3: O ALGORITMO SEMPRE CONVERGE !!!  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SISTEMA 8X8 (REAL) %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
A21=100000*[2.7820 0.7067 0 0
```

```

1.0314    3.2966    0    0
0    0    2.7820    0.7067
0    0    1.0314    3.2966];
A22=[-2.9921    0.5497    -0.0077    0.0077
1.7801    -0.3270    0.0084    -0.0084
0.0077    -0.0077    -2.9921    0.5497
-0.0084    0.0084    1.7801    -0.3270];
B2=[66.3574    -6.5249    0    0
-3.2017    77.0673    0    0
0    0    66.3574    -6.5249
0    0    -3.2017    77.0673];
%%% Entrada da dados:  matrizes de ponderacao
R=eye(4); Q1=eye(4); Q2=zeros(4); Q3=zeros(4);
% % % % % OBS1: INICIAL NAO ESTABILIZADORA GERA PD2P NAO ESTABILIZADORA
% % % % % OBS2: ESTABILIZADORA LQR GERA PD2P ESTABILIZADORA
% % % % % OBS3: 0 ALGORITMO SEMPRE CONVERGE !!!

% % % % % SISTEMA 10X10 % % % % %
% A21=[1 2 3 4 5 ; 3 2 -1 -4 -5; 0 1 1 3 3; -2 -3 11 7 0; 3 3 1 1 0];
% A22=[1 0 -1 0 0 ; 0 1 1 7 7 ; 2 5 -3 1 5; 11 3 15 9 12; 7 7 1 1 0];
% B2=eye(5);
% % % % Entrada da dados:  matrizes de ponderacao
% R=eye(5);
% Q1=eye(5); Q2=zeros(5); Q3=zeros(5);
% % % % % OBS1: INICIAL NAO ESTABILIZADORA GERA PD2P ESTABILIZADORA
% % % % % OBS2: ESTABILIZADORA LQR GERA PD2P NAO ESTABILIZADORA
% % % % % OBS3: 0 ALGORITMO SEMPRE CONVERGE !!!

% % % % % SISTEMA 12X12 % % % % %
% A21=[1 2 3 4 5 6;3 2 -1 -4 -5 7;0 1 1 3 3 8;-2 -3 11 7 0 9;3 3 1 1 0 10;8 1 1 3 3 0];
% A22=[1 0 -1 0 0 11;0 1 1 7 7 12;2 5 -3 1 5 13;11 3 15 9 12 14;7 7 1 1 0 15;0 0 11 -1 0 1];
% B2=eye(6);
% % % % Entrada da dados:  matrizes de ponderacao
% R=eye(6);
% Q1=eye(6); Q2=zeros(6); Q3=zeros(6);
% % % % % OBS1: INICIAL NAO ESTABILIZADORA GERA PD2P ESTABILIZADORA
% % % % % OBS2: ESTABILIZADORA LQR GERA PD2P ESTABILIZADORA
% % % % % OBS3: 0 ALGORITMO SEMPRE CONVERGE !!!

% % % % % SISTEMA 14X14 % % % % %
% A21=[1 2 3 4 5 6 7;3 2 -1 -4 -5 7 8;0 1 1 3 3 8 9;-2 -3 1 7 0 9 10;3 3 1 1 0 1 1;
% 8 1 1 3 3 0 1;0 0 0 2 2 3 5];
% A22=[1 0 -1 0 0 1 2; 0 1 1 7 7 2 1; 2 5 -3 1 5 3 0; 1 3 5 9 1 4 9; 7 7 1 1 0 5 8;
% 0 0 1 -1 0 1 7; 8 1 7 7 1 1 0];
% B2=eye(7);
% % % % Entrada da dados:  matrizes de ponderacao
% R=eye(7);
% Q1=eye(7); Q2=zeros(7); Q3=zeros(7);

```

```

% % $$$$$$ OBS1: INICIAL NAO ESTABILIZADORA GERA PD2P ESTABILIZADORA
% % $$$$$$ OBS2: ESTABILIZADORA LQR GERA PD2P NAO ESTABILIZADORA
% % $$$$$$ OBS3: 0 ALGORITMO SEMPRE CONVERGE !!!

% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SISTEMA 16X16 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% A21=[1 2 3 4 5 6 7 7; 3 2 -1 -4 -5 7 8 8; 0 1 1 3 3 8 9 9; -2 -3 1 7 0 9 10 7;
%      3 3 1 1 0 1 1 5; 8 1 1 3 3 0 1 3; 0 0 0 2 2 3 5 1; 5 1 3 2 2 0 0 0];
% A22=[1 0 -1 0 0 1 2 0; 0 1 1 7 7 2 1 0; 2 5 -3 1 5 3 0 0; 1 3 5 9 1 4 9 1;
%      7 7 1 1 0 5 8 1; 0 0 1 -1 0 1 7 3; 8 1 7 7 1 1 0 4; 3 7 -1 0 1 0 1 0];
% B2=eye(8);
% %%%% Entrada da dados:  matrizes de ponderacao
% R=eye(8);
% Q1=eye(8); Q2=zeros(8); Q3=zeros(8);
% % $$$$$$ OBS1: INICIAL NAO ESTABILIZADORA GERA PD2P ESTABILIZADORA
% % $$$$$$ OBS2: ESTABILIZADORA LQR GERA PD2P ESTABILIZADORA
% % $$$$$$ OBS3: 0 ALGORITMO SEMPRE CONVERGE !!!

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% %%% Montagem das matrizes
p=size(A21,1); A11=zeros(p);A12=eye(p); A=[A11 A12 ; A21 A22];
B1=zeros(p); B=[B1 ; B2]; Q=[Q1 Q2 ; Q2' Q3];
% %%% Estabilizadoras iniciais
% %% estabilizadora pddp
r=0.03;
%F0=r*[-11668*eye(8) -19*eye(8)];
% %% estabilizadora pd comum
%F0=[diag([-4,-7]) diag([-9,-11])]
%F0=[diag([-11640,-11650,-11660,-11665]) diag([-10,-15,-20,-30])]
% %% estabilizadora lqr cheia
F0=-lqr(A,B,Q,R);
% %% estabilizadora lqr diagonalizada
%k=0.1;F0(1,2)=k*F0(1,2);F0(1,4)=k*F0(1,4);F0(2,1)=k*F0(2,1);F0(2,3)=k*F0(2,3);
% %% estabilizadora aleatoria
%F0=rand(p,2*p)
F0,autovalores_inicializadora = eig(A+B*F0), s0=[0 ; 0];

% %% Equacoes de Lyapunov
eps=100000000; niter=0; F=F0; while eps-0.000000001 > 0
    Af=A+B*F; K0=Q+F'*R*F;
    M=lyap(Af,eye(2*p)); P=lyap(Af',K0);
    M1=M(1:p,1:p);M2=M(1:p,p+1:2*p);M3=M(p+1:2*p,p+1:2*p);
    P1=P(1:p,1:p);P2=P(1:p,p+1:2*p);P3=P(p+1:2*p,p+1:2*p);
    alfa=[trace(R*M1) trace(R*M2') ; trace(R*M2) trace(R*M3)];
    beta=[trace(B2'*P2'*M1)+trace(B2'*P3*M2'); trace(B2'*P2'*M2)+trace(B2'*P3*M3)];
    s1=-inv(alfa)*beta;
    erro=s1-s0; eps=erro'*erro;
    s0=s1;niter=niter+1;
    F=[s0(1)*eye(p) s0(2)*eye(p)];

```

```

end
niter % numero de iteracoes.
F; % PD2p gerada.
s1'% vetor formado a partir dos parâmetros p e d gerados.
autovalores_PD2p_gerada = eig(A+B*F)          % autovalores do sistema a malha fechada formado
                                                % pela PD2p gerada
Jbarra=trace(P)/(2*p)                        % indice de desempenho associado a
                                                % matriz PD2p gerada

[K,S,E]=lqr(A,B,Q,R);
Jc=trace(S)/(2*p)                            % indice de desempenho associado a matriz LQR

```

Referências Bibliográficas

- Ahrens, M., Kucera, L. & Larsonneur, R. (1996), ‘Performance of a magnetically suspended flywheel energy storage device’, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **4**(5), 494–501.
- Anderson, B. & Moore, J. (1971), *Linear Optimal Control*, 1 edn, Prentice-Hall, Inc., Englewoodcliffs, N.J.
- Athans, M. & Falb, P. (1966), *Optimal Control*, McGraw-Hill, New York.
- Belegundu, A. D. & Chandrupatla, T. R. (1999), *Optimization Concepts and Applications in Engineering*, Prentice-Hall, Inc.
- Bellman, R. (1960), *Introduction to Matrix Analysis*, New York: McGraw-Hill.
- Bleuler, H. (1984), Decentralized Control of Magnetic Bearing Systems., Doctor of technical sciences dissertation, Swiss Federal Institute of Technology, Zürich.
- Chang, Y. & Chen, B. (2002), ‘Adaptive tracking control for nonholonomic caplygin systems.’, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **10**(1), 96–104.
- Charara, A., DeMiras, J. & Caron, B. (1996), ‘Nonlinear control of a magnetic levitation system without premagnetization.’, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **4**(5), 513–223.
- Chiba, A., Deido, T. & Rahman, T. F. M. (1994), ‘An analysis of bearingless ac motors.’, *IEEE Transactions on Energy Conversion* **9**(1), 61–68.
- David, D. (2000), Levitação de rotor por mancais-motores radiais magnéticos e mancal axial supercondutor auto-estável., Tese de d.sc., Programa de Engenharia Mecânica - COPPE / UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- David, D., Gomes, A., Santisteban, J., Ripper, A., Júnior, R. & Nicholsky, R. (2000), A hybrid levitating rotor system with radial electromagnetic motor-bearings and axial superconducting bearing, *in* ‘Proceedings of the Maglev’, Rio de Janeiro, pp. 441–446.
- David, D., Stephan, S., Ripper, A., Júnior, R., Gawalek, W., Habisreuther, T. & Strasser, T. (1999), ‘Superconducting axial bearing for induction machines with active radial magnetic bearings’, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* **9**(2), 964–967.

- DeQueiroz, M. & Dawson, D. (1996), ‘Nonlinear control of active magnetic bearings: a backstepping approach.’, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **4**(5), 545–552.
- Fittro, R. & Knospe, C. (2002), ‘Rotor compliance minimization via mi control of active magnetic bearings.’, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **10**(2), 238–248.
- Fitzgerald, A., JR, C. & Kusko, A. (1975), *Máquinas Elétricas*, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo.
- Gomes, A. C. D. N. (1999), ‘Controle linear quadrático - notas de aula’, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, COPPE / UFRJ.
- Hayt, W. (1983), *Eletromagnetismo*, 3 edn, Rio de Janeiro.
- Herzog, R., Bühler, P., Gähler, C. & Larssonneur, R. (1996), ‘Unbalance compensation using generalized notch filters in the multivariable feedback of magnetic bearings.’, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **4**(5), 580–586.
- Hsu, C. & Chen, S. (2002), ‘Exact linearization of a voltage-controlled 3-pole active magnetic bearing system.’, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **10**(4), 618–625.
- Júnior, R. N. (2005), Controle por tensão de velocidade em mancais-motores magnéticos, Tese de m.sc., Programa de Engenharia Elétrica - COPPE / UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Kleinman, D. L. (1966), On the linear regulator problem and the matrix riccati equation, Tech. Rept. ESL-R-271, M.I.T. Electronic Systems Lab., Cambridge, Mass.
- Knospe, C. & Collins, E. (1996), ‘Introduction to the special issue on magnetic bearing control.’, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **4**(5), 481–483.
- Knospe, C., Fedigan, S., Hope, R. & Williams, R. (1997), ‘A multitasking dsp implementation of adaptive magnetic bearing control.’, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **5**(2), 230–237.
- Levine, W. S. & Athans, M. (1970), ‘On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems.’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-15**(1), 44–48.
- Lindlau, J. & Knospe, C. (2002), ‘Feedback linearization of an active magnetic bearing with voltage control.’, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **10**(1), 21–30.
- Lum, K., Coppola, V. & Bernstein, D. (1996), ‘Adaptive autocentering control for an active magnetic bearing supporting a rotor with unknown mass imbalance.’, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **4**(5), 587–597.
- Lévine, J., Lottin, J. & Ponsart, J. (1996), ‘A nonlinear approach for the control of magnetic bearings.’, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **4**(5), 524–544.

- Reitz, R., Milford, F. & Christy, R. (1982), *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*, Editora Campus, Rio de Janeiro.
- Rundell, A., Drakunov, S. & Decarlo, R. (1996), ‘A sliding mode observer and controller for stabilization of rotational motion of a vertical shaft magnetic bearing.’, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **4**(5), 598–608.
- Salazar, A., Chiba, A. & Fukao, T. (2000), A review of developments in bearingless motors, *in* ‘Proceedings of the seventh international symposium on magnetic bearings’, Zürich, p. 335.
- Salazar, A. & Stephan, R. (1993), ‘A bearingless method for induction machines.’, *IEEE Transactions on Magnetism* **29**(6), 2965–2967.
- Santisteban, J., David, D., Noronha, R., Ripper, A. & Stephan, R. (1997), Controller design for a bearingless electric motor., *in* ‘Proc. of the Dyname-seventh INTL. Conf. on Dynamic Problems in Mechanics’, pp. 169–171.
- Santisteban, J., David, D., Stephan, R., Ripper, A., Júnior, R., Pereira, A. & Nicolsky, R. (2000), ‘Hybrid bearing for induction machine with controlled electromagnetic positioning and superconducting levitation.’, *IEEE Transactions on Magnetics* **36**(5), 3693–3695.
- Schob, R. & Bichsel, J. (1994), ‘Vector control of the bearingless motor.’, *ISMB* pp. 61–68.
- Schweitzer, G., Bleuler, H. & Traxler, A. (1994), *Active Magnetic Bearings*, 1 edn, vdf Hochschulverlag., ETH Zürich.
- Schweitzer, G. & Lange, R. (1976), Characteristics of a magnetic rotor bearing for active vibration control, *in* ‘Conf. on Vibrations in Rotating Machinery’, Inst. of Mech. Engrs - Cambridge, p. C239/76.
- Vidyasagar, M. (1978), *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Yudilevitch, G. (1994), Optimal Decoupling Control, Thesis report ph.d., University of Maryland.
- Zhou, K., Doyle, J. C. & Glover, K. (1995), *Robust and Optimal Control*, 1 edn, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.
- Zhuravlyov, Y. (2000), ‘On lq-control of magnetic bearing’, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **8**(2), 344–350.