

# CONTROLADORES ROBUSTOS $H_\infty$ NÃO FRÁGEIS

Marcos Vicente de Brito Moreira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

---

Prof. João Carlos dos Santos Basilio, D. Phil.

---

Prof. Amit Bhaya, Ph. D.

---

Prof. Carlos Emanuel de Souza, D. Ing.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

FEVEREIRO DE 2002

MOREIRA, MARCOS VICENTE DE BRITO

Controladores Robustos  $H_\infty$  Não Frágeis  
[Rio de Janeiro] 2002

XI, 112 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,  
Engenharia Elétrica, 2002)

Tese - Universidade Federal do Rio de Ja-  
neiro, COPPE

1. Controle Robusto
2. Fragilidade
3. Sistemas lineares
4. Domínio da frequência

I. COPPE/UFRJ II. Título ( série )

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus por tudo que conquistei em minha vida, pois sem Ele nada somos.

Gostaria de agradecer aos meus pais, Odelio e Sueli, pela dedicação e amor que sempre demonstraram ter por mim, e ao meu irmão Claudio pela amizade e apoio em todos os momentos em que precisei. Também gostaria de manifestar a minha gratidão à minha namorada Tatiana que com muito amor e carinho torna a minha vida muito feliz.

Agradeço sinceramente também a todos os meus amigos pelos debates e estudos em grupo que certamente foram de grande importância para minha formação profissional.

Por fim, gostaria de manifestar a minha gratidão a todos os professores da COPPE/UFRJ que contribuíram para a minha formação profissional de forma inestimável. Em especial agradeço ao professor e orientador João Carlos dos Santos Basilio pelos ensinamentos transmitidos e pela amizade.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## CONTROLADORES ROBUSTOS $H_\infty$ NÃO FRÁGEIS

Marcos Vicente de Brito Moreira

Fevereiro/2002

Orientador: João Carlos dos Santos Basilio

Programa: Engenharia Elétrica

Utilizando controle robusto  $H_\infty$  para o projeto de sistemas de controle lineares, controladores são projetados de forma a garantir a estabilidade e também alguma característica de desempenho do sistema em malha fechada, admitindo-se que o modelo da planta possui incertezas. Em geral, não há uma maior preocupação quanto à sensibilidade do sistema com respeito a variações nos coeficientes do próprio controlador projetado, supondo-se que este será implementado exatamente como projetado. Todavia, a implementação exata de controladores é impossível na prática, e em alguns casos uma baixa sensibilidade do sistema a variações nos parâmetros do controlador podem torná-los instáveis. Desta forma é necessário, então, que os controladores robustos projetados tenham alguma tolerância a incertezas nos seus coeficientes, ou seja, possam ser considerados ‘não-frágeis’.

Nesta tese o problema de fragilidade de controladores robustos  $H_\infty$  é abordado e métodos são propostos para tornar esses controladores menos frágeis sem comprometer significativamente o valor do custo  $H_\infty$  considerado. Além disso, uma análise é feita dos métodos utilizados para medir a fragilidade de controladores e uma nova medida de fragilidade é sugerida.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## NON-FRAGILE $H_\infty$ ROBUST CONTROLLERS

Marcos Vicente de Brito Moreira

February/2002

Advisor: João Carlos dos Santos Basilio

Department: Electrical Engineering

The  $H_\infty$  robust control theory is a linear control system synthesis methodology in which controllers are designed to provide stability and also a desired closed-loop performance, assuming uncertainties in the plant model. In general, system sensitivity with respect to variations in the controller parameters is not of great concern since it is supposed that the controller can be implemented exactly. However, the exact implementation of controllers is impossible in practice, and in some cases even a small variation in controller parameters can lead the closed-loop system to instability. Therefore, it is necessary that any controller which is part of a closed-loop system be able to tolerate some amount of uncertainty in its coefficients, namely that, it must be ‘non-fragile’.

In this thesis, the problem of fragility of  $H_\infty$  controllers is revisited and methods to reduce the fragility of these controllers, without affecting significantly the value of the  $H_\infty$  cost under consideration, are proposed. In addition current methods used to measure the fragility of controllers are analysed and a new method is proposed.

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Margem de estabilidade paramétrica</b>	<b>5</b>
2.1 O Teorema do Cruzamento da Fronteira . . . . .	5
2.2 Margem de estabilidade paramétrica . . . . .	11
2.2.1 Definição . . . . .	11
2.2.2 Cálculo da margem de estabilidade paramétrica . . . . .	14
2.2.3 Resultados adicionais sobre margem de estabilidade paramétrica . . . . .	19
2.3 Conclusões . . . . .	30
<b>3 Redução da ordem de controladores robustos <math>H_\infty</math></b>	<b>31</b>
3.1 Redução da ordem de modelos por truncamento balanceado . . . . .	31
3.2 Teoria de controle robusto $H_\infty$ . . . . .	33
3.2.1 Estabilidade interna . . . . .	34
3.2.2 Objetivos de projeto . . . . .	35
3.2.3 Parametrização de Youla-Kucera . . . . .	40
3.2.4 Problema de Nehari . . . . .	41
3.3 Controladores robustos $H_\infty$ . . . . .	46
3.3.1 Robustez (perturbação aditiva) . . . . .	47
3.3.2 Rastreamento de sinais e desempenho transitório . . . . .	53

3.3.3	Rejeição de perturbação . . . . .	59
3.3.4	Atenuação de ruído . . . . .	64
3.4	Redução da ordem de controladores robustos $H_\infty$ . . . . .	70
3.5	Conclusões . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Controle robusto <math>H_\infty</math> com objetivo de margem de estabilidade paramétrica relativa</b>	<b>77</b>
4.1	Melhoria da margem de estabilidade paramétrica relativa com o uso de redução por truncamento balanceado . . . . .	78
4.2	Controladores robustos $H_\infty$ com objetivo de margem de estabilidade paramétrica relativa . . . . .	84
4.3	Conclusões . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Análise crítica sobre margem de estabilidade paramétrica</b>	<b>93</b>
5.1	Exemplo motivador . . . . .	94
5.2	Margem de estabilidade paramétrica por Kharitonov . . . . .	95
5.3	Conclusões . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Conclusões e trabalhos futuros</b>	<b>108</b>

# Lista de Figuras

2.1	Perda de grau no caminho $C_1$ . . . . .	9
2.2	Sistema em malha fechada . . . . .	12
2.3	Caracterização para a margem de estabilidade paramétrica no espaço de parâmetros do controlador para o exemplo 2.2. . . . .	14
3.1	Diagrama de blocos de uma planta sujeita à perturbações . . . . .	34
3.2	Diagrama de blocos para análise de estabilidade interna . . . . .	35
3.3	Diagrama de blocos para uma planta com incerteza . . . . .	36
3.4	Representação gráfica do erro percentual $e(\%)$ para o exemplo 3.5. . .	73
3.5	(a) Representação gráfica do erro percentual $e(\%)$ para $\tau = 0,01$ ; (b) representação gráfica do erro percentual $e(\%)$ , para $\tau = 0,001$ . . . . .	74
3.6	Representação gráfica do erro percentual $e(\%)$ para o exemplo 3.7. . .	75
4.1	Ilustração mostrando uma variação específica sobre o controlador nominal com o objetivo de aumentar a margem de estabilidade paramétrica relativa. . . . .	87
5.1	Hiper-retângulo formado no espaço de parâmetros do controlador para a família de controladores $\Delta_K(s)$ . . . . .	97
5.2	Região $\Delta_S$ gerada a partir do hiper-retângulo $\mathcal{H}_K$ . . . . .	98
5.3	Hiper-retângulo $\mathcal{H}_S$ envolvendo toda a região $\Delta_S$ , utilizado para testar a estabilidade do sistema em malha fechada a partir do teorema de Kharitonov. . . . .	100

# Lista de Tabelas

3.1	Faixas de frequência para os diferentes objetivos de projeto . . . . .	40
3.2	Expressões analíticas para $K_\tau(s)$ e $K_{imp}(s)$ . . . . .	70
4.1	Controladores $H_\infty$ não-frágeis para o exemplo 4.5 . . . . .	89
4.2	Controladores $H_\infty$ para o exemplo 4.6 . . . . .	91
4.3	Controladores $H_\infty$ não-frágeis para o exemplo 4.7 obtidos utilizando-se o algoritmo 4.1 . . . . .	91

# Lista de Abreviaturas e Símbolos

$G(s)$	—	Função de transferência da planta
$\mathcal{H}_K$	—	Hiper-retângulo formado no espaço de parâmetros do controlador
$\mathcal{H}_S$	—	Hiper-retângulo formado no espaço gerado pelos coeficientes do polinômio característico do sistema em malha fechada
$K_{imp}(s)$	—	Controlador ótimo $H_\infty$ impróprio
$K_\tau(s)$	—	Controlador ótimo $H_\infty$ próprio
$K_{ban}(s)$	—	Controlador obtido por redução por truncamento balanceado de $K_\tau(s)$
$S_G$	—	Matriz de Silvester da planta $G(s)$
$S_G^+$	—	Matriz composta pelo módulo de cada elemento da matriz $S_G$
$\underline{p}^0$	—	Vetor cujos elementos são os coeficientes do controlador nominal
$\underline{p}_+^0$	—	Vetor composto pelo módulo de cada elemento de $\underline{p}^0$
$\gamma$	—	Custo $H_\infty$
$\delta(s)$	—	Polinômio característico do sistema em malha fechada
$\delta^0(s)$	—	Polinômio característico do sistema em malha fechada nominal
$\underline{\delta}$	—	Vetor formado pelos coeficientes de $\delta(s)$
$\underline{\delta}_p$	—	Vetor formado pelos intervalos de variação sobre os coeficientes de $\delta(s)$
$\Delta\underline{p}$	—	Vetor representativo da perturbação sobre o vetor de parâmetros nominal
$\kappa$	—	Margem de estabilidade paramétrica relativa por Kharitonov
$\mu$	—	Margem de estabilidade paramétrica relativa
$\rho^*$	—	Margem de estabilidade paramétrica

- $\Omega$  — Região no espaço de parâmetros do controlador representando controladores que estabilizam o sistema em malha fechada
- $|\cdot|$  — Módulo de um número complexo
- $\|\cdot\|_2$  — Norma Euclidiana
- $\|\cdot\|_\infty$  — Norma infinita

# Capítulo 1

## Introdução

A teoria de controle robusto  $H_\infty$  (Francis, 1987; Doyle et al., 1992; Zhou et al., 1996) consolidou-se nos últimos anos como uma maneira sistemática de projeto de controladores. Neste tempo, diversas técnicas para obtenção de sistemas de controle que fossem ótimos e robustos foram formuladas. Basicamente, o controle robusto  $H_\infty$  soluciona problemas relativos à estabilidade do sistema em malha fechada na presença de perturbação na função de transferência da planta, à atenuação de ruído, ao rastreamento e rejeição de perturbação, podendo todos os objetivos serem considerados simultaneamente. Para tanto, o que é feito é, a partir da parametrização de todos os controladores estabilizantes de Youla-Kucera, que fornece um parâmetro livre  $Q(s)$ , descrever os objetivos de controle como um problema de minimização de uma norma infinita apropriada. Para sistemas monovariáveis, Francis (1987) descreve um procedimento para obtenção de controladores robustos  $H_\infty$ . Este procedimento possui os seguintes passos: (i) utilizar a parametrização de Youla Kucera para se obter um problema de casamento de modelos; (ii) realizar fatoração ‘inner-outer’ para transformá-lo em um problema de Nehari e; (iii) solucioná-lo através de um algoritmo simples baseado em espaço de estados. A vantagem do método apresentado em Francis (1987) é a possibilidade de obtenção de expressões analíticas para os controladores ótimos que solucionam os problemas  $H_\infty$  de minimização que levam a problemas de 1-bloco.

As técnicas desenvolvidas para obtenção de controladores robustos sempre visaram garantir a estabilidade e o desempenho do sistema em malha fechada, le-

vando em consideração somente perturbações na função de transferência da planta, supondo que o controlador deveria ser implementado exatamente. Esta hipótese é válida uma vez que a incerteza nos parâmetros da planta é o tipo de incerteza mais importante de um sistema de controle, já que os controladores, em geral, são implementados através de Hardware de alta precisão. Porém, em um artigo recente, Keel e Bhattacharyya (1997) sugerem através de exemplos que a implementação de controladores tanto digital (Keel e Bhattacharyya, 1998) quanto analógica, encontrados através das mais diversas técnicas de controle robusto, introduziam determinadas perturbações nos coeficientes do controlador, o que poderia tornar os sistemas realimentados instáveis. Para demonstrar este fato, foi definida uma margem de estabilidade (baseada em funções polinomiais) denominada margem de estabilidade paramétrica (Bhattacharyya et al., 1995). Utilizando-se esta margem de estabilidade observou-se que, apesar do sistema admitir incertezas na função de transferência da planta, tornava-se instável mesmo com perturbações relativamente pequenas nos parâmetros do controlador. Por essa razão esses controladores foram denominados ‘frágeis’. Desde então, estudos sobre fragilidade de controladores robustos e ótimos começaram a ser desenvolvidos; em Dorato (1998) é possível se obter um resumo do problema de fragilidade de controladores, assim como um histórico da literatura sobre este tema.

Alguns esforços têm sido realizados na tentativa de solucionar o problema levantado por Keel e Bhattacharyya (1997), como por exemplo Haddad e Corrado (2000), Yang et al. (2000), Famularo et al. (2000), Yang e Wang (2001) e Ho et al. (2001). Basicamente o que é feito por estes pesquisadores é formular o problema de robustez do sistema realimentado em termos da perturbação nos parâmetros do controlador e, então, verificar a tolerância a perturbações em relação aos parâmetros da planta. Alguns trabalhos foram feitos na tentativa de mostrar falhas em Keel e Bhattacharyya (1997). Mäkilä (1998) afirma que os casos considerados em Keel e Bhattacharyya (1997) não são reais e que a ocorrência de controladores robustos frágeis é rara. Em Paattilammi e Mäkilä (2000) é também comentado que determinadas realizações como a forma companheira devem ser evitadas pois podem

tornar os sistemas em malha fechada instáveis no momento da implementação do controlador.

Diferentemente do enfoque dado pelos pesquisadores até então, neste trabalho a redução da fragilidade do controlador será realizada garantindo-se inicialmente que o controlador projetado (Francis, 1987) atenda a um dos objetivos de projeto representado pela minimização de uma norma infinita apropriada e, em seguida, perturbando-se os coeficientes deste controlador adequadamente, admitir uma pequena perda no valor do custo  $H_\infty$  considerado, porém com considerável redução da sensibilidade do sistema a variações nos parâmetros desse controlador. Para tanto, em um primeiro estágio, sempre que possível, a ordem do controlador será reduzida, utilizando-se redução por truncamento balanceado (Garcia e Basilio, 2000; Zhou et al., 1999). Em seguida, o controlador robusto reduzido encontrado será considerado nominal, e os coeficientes do numerador e denominador de  $K(s)$  formaram um vetor  $\underline{p}^0$ . A partir do vetor  $\underline{p}^0$  e adotando a margem de estabilidade paramétrica como indicador da fragilidade do controlador, um método será apresentado. Este método consiste em se encontrar no espaço gerado pelos parâmetros do controlador a melhor direção na qual os parâmetros do controlador podem ser perturbados para maximizar a sua margem de estabilidade paramétrica relativa, supondo que esta perturbação sobre os coeficientes do controlador seja relativamente pequena e não deteriore demasiadamente o valor do custo  $H_\infty$  considerado.

Trabalhos anteriores questionaram a fragilidade dos controladores  $H_\infty$  apontada por Keel e Bhattacharyya (1997) relacionando-a a problemas de determinados tipos de implementação. De fato, ao se implementar controladores, tem-se em geral, imprecisões em relação aos parâmetros do controlador, porém, essas imprecisões podem ser estimadas a priori (precisão numérica no caso de implementação digital e tolerância dos componentes eletrônicos implementados analogicamente). Desta forma, neste trabalho será questionado se realmente a fragilidade dos controladores pode ser atribuída a uma determinada forma de implementação, bem como se é adequada a utilização da margem de estabilidade paramétrica relativa, definida em Keel e Bhattacharyya (1997), como forma de rotular um controlador como frágil.

Além disso, uma nova caracterização para a margem de estabilidade paramétrica, baseada no teorema de Kharitonov, será apresentada.

Para atingir os objetivos propostos, este trabalho está estruturado da seguinte forma: no capítulo 2 a margem de estabilidade paramétrica é revista e alguns resultados originais são apresentados. O capítulo 3 trata da redução por truncamento balanceado dos controladores, e, para tanto, apresenta fundamentos da teoria de controle robusto  $H_\infty$  e determina expressões analíticas para os controladores obtidos pelo método descrito em Francis (1987). Ainda no capítulo 3 alguns exemplos são utilizados para mostrar a eficiência da redução da ordem do controlador utilizada. No capítulo 4 mostra-se como a redução da ordem do controlador pode melhorar a margem de estabilidade paramétrica relativa do mesmo, e sugere uma maneira sistemática de, partindo do controlador nominal, obter um controlador que minimize uma norma infinita apropriada e que tenha ao mesmo tempo boa margem de estabilidade paramétrica. No capítulo 5 a utilização da margem de estabilidade paramétrica definida por Keel e Bhattacharyya (1997) como medida de fragilidade de controladores é avaliada, e uma nova caracterização para esta é feita utilizando-se o teorema de Kharitonov. Por fim, no capítulo 6, são apresentadas as conclusões e sugestões de futuros trabalhos a serem desenvolvidos sobre o mesmo tema.

# Capítulo 2

## Margem de estabilidade paramétrica

Neste capítulo será feito um estudo introdutório sobre margem de estabilidade paramétrica (Bhattacharyya et al., 1995) e, para tanto, serão revistos alguns resultados fundamentais baseados na teoria de estabilidade. Dentre estes destacam-se o teorema do cruzamento da fronteira e o princípio de exclusão da origem que serão amplamente utilizados neste trabalho. Serão também apresentados alguns resultados originais.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 2.1 o teorema do cruzamento da fronteira e outros resultados importantes para a compreensão do conceito de margem de estabilidade paramétrica são revistos; na seção 2.2 a margem de estabilidade paramétrica é definida e um método simples para a sua obtenção, baseado no teorema do cruzamento da fronteira, é apresentado. Ainda nesta seção, alguns importantes resultados adicionais sobre margem de estabilidade paramétrica são apresentados.

### 2.1 O Teorema do Cruzamento da Fronteira ("Boundary Crossing Theorem")

Antes de considerar o teorema do cruzamento da fronteira e outros importantes resultados, é conveniente revisar o princípio dos argumentos da teoria de variáveis complexas.

#### **Teorema 2.1 (Princípio dos Argumentos)**

*Seja  $\mathcal{C}$  um contorno simples fechado no plano complexo e  $w = f(z)$  uma função da*

variável complexa  $z$  analítica no contorno  $\mathcal{C}$  e no interior de  $\mathcal{C}$  exceto em um número finito de pólos. Sejam  $Z$  e  $P$ , o número de zeros e pólos, respectivamente, da função  $f(z)$  contidos no interior do contorno  $\mathcal{C}$  e  $\Delta_c \arg[f(z)]$  a variação da fase de  $f(z)$  quando  $z$  completa uma volta sobre o contorno  $\mathcal{C}$  em sentido horário. Então

$$\Delta_c \arg[f(z)] = 2\pi(Z - P) \quad (2.1)$$

□

A partir do princípio dos argumentos, um resultado, importante conhecido como teorema de Rouché, é obtido.

**Teorema 2.2 (Teorema de Rouché)**

Sejam  $f(z)$  e  $g(z)$  duas funções analíticas sobre e dentro de um contorno simples fechado  $\mathcal{C}$  no plano complexo. Se

$$|g(z)| < |f(z)|$$

para todo  $z$  em  $\mathcal{C}$ , então  $f(z)$  e  $f(z) + g(z)$  têm o mesmo número de zeros (incluindo multiplicidade) no interior de  $\mathcal{C}$ .

**Prova.** Ver Bhattacharyya et al. (1995).

Uma consequência imediata do teorema de Rouché é que, como, por hipótese,  $|g(z)| < |f(z)|$  em  $\mathcal{C}$  então  $f(z) \neq 0$  para todo  $z \in \mathcal{C}$ , isto é  $f(z)$  não possui zeros em  $\mathcal{C}$ . Assim, como  $|f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > |f(z)| - |f(z)| = 0$ , então  $f(z) + g(z)$  também não possui zeros em  $\mathcal{C}$ .

O teorema de Rouché trata de funções de variáveis complexas incluindo as funções polinomiais, que serão o objetivo principal de estudo neste trabalho. Desta forma, a seguir, será vista uma aplicação do teorema 2.2 para o caso polinomial.

**Teorema 2.3** *Sejam*

$$P(s) = p_0 + p_1 s + \dots + p_n s^n = \prod_{j=1}^m (s - s_j)^{t_j}, p_n \neq 0,$$

$$Q(s) = (p_0 + \epsilon_0) + (p_1 + \epsilon_1) s + \dots + (p_n + \epsilon_n) s^n,$$

e considere um círculo  $\mathcal{C}_k$ , de raio  $r_k$ , centrado na raiz  $s_k$  de multiplicidade  $t_k$  de  $P(s)$ . Suponha  $r_k$  fixo tal que

$$0 < r_k < \min |s_k - s_j|, \text{ para } j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, m.$$

Então, existe um número positivo  $\epsilon$ , tal que  $|\epsilon_i| \leq \epsilon$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , para o qual  $Q(s)$  tem  $t_k$  zeros no interior do círculo  $\mathcal{C}_k$ .

**Prova.** Ver Bhattacharyya et al. (1995). □

A partir do teorema 2.3 é possível enunciar ainda os seguintes corolários:

**Corolário 2.1** Escolha  $m$  círculos  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m$ , disjuntos e centrados em  $s_1, s_2, \dots, s_m$ , respectivamente. Então, aplicando repetidamente o teorema 2.3 é sempre possível encontrar  $\epsilon > 0$  tal que para qualquer conjunto de valores  $\{\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  satisfazendo  $|\epsilon_i| \leq \epsilon$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $Q(s)$  tem precisamente  $t_j$  zeros no interior de cada círculo  $\mathcal{C}_j$ . □

**Corolário 2.2** Seja

$$P(s) = p_0 + p_1s + \dots + p_{n_1}s^{n_1} + 0s^{n_1+1} + \dots + 0s^n = \prod_{j=1}^{n_1} (s - s_j)^{t_j}, \quad (n_1 < n),$$

$$Q(s) = (p_0 + \epsilon_0) + (p_1 + \epsilon_1)s + \dots + (p_{n_1} + \epsilon_{n_1})s^{n_1} + \epsilon_{n_1+1}s^{n_1+1} + \dots + \epsilon_n s^n.$$

Então para cada uma das  $n_1$  raízes distintas de  $P(s)$  é possível escolher um círculo  $\mathcal{C}_k$  de raio  $r_k$  ( $0 < r_k < \min |s_k - s_j|$ ,  $j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n_1$ ) centrado na raiz  $s_k$  de multiplicidade  $t_k$  de tal sorte que existe um  $\epsilon$ , tal que  $|\epsilon_i| \leq \epsilon$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , para o qual  $Q(s)$  tem  $t_k$  zeros no interior de  $\mathcal{C}_k$ .

**Prova.** Basta notar que na prova do teorema 2.3, todos os passos continuam verdadeiros para as hipóteses do corolário. □

Para o estudo do teorema do cruzamento da fronteira será considerado o caso em que  $P(s)$  não perde grau, ou seja,  $p_n \neq 0$ . Para tanto, considere o plano complexo  $\mathbb{C}$  e seja  $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto definindo uma região de estabilidade (normalmente para sistemas contínuos no tempo,  $\mathcal{S}$  é escolhida como o semi-plano

da esquerda do plano complexo  $\mathbb{C}$ ). Observe que  $\mathcal{S}$ , sua fronteira  $\partial\mathcal{S}$  e o interior  $\mathcal{S}^0$  do conjunto fechado  $\bar{\mathcal{S}} = \mathbb{C} - \mathcal{S}$  formam uma partição do plano complexo, isto é,

$$\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^0 = \mathbb{C}, \quad \mathcal{S} \cap \mathcal{S}^0 = \mathcal{S} \cap \partial\mathcal{S} = \partial\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^0 = \emptyset$$

onde  $\mathcal{S}$ ,  $\partial\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}^0$  são conjuntos não-vazios. O teorema do cruzamento da fronteira pode então ser enunciado.

**Teorema 2.4 (Teorema do cruzamento da fronteira)**

*Suponha que  $P(\lambda, s)$  seja uma família de polinômios tal que:*

1.  *$P(\lambda, s)$  tenha grau fixo  $n$  e  $P(\lambda, s)$  seja contínua com respeito a  $\lambda$  em um intervalo  $I = [a, b]$ , ou seja, um típico elemento de  $P(\lambda, s)$  seria:*

$$P(\lambda, s) = p_0(\lambda) + p_1(\lambda)s + \dots + p_n(\lambda)s^n,$$

*onde  $p_0(\lambda), p_1(\lambda), \dots, p_n(\lambda)$  são funções contínuas de  $\lambda$  em  $I$  e  $p_n(\lambda) \neq 0$  para todo  $\lambda \in I$ ;*

2.  *$P(a, s)$  tem todas as suas raízes na região de estabilidade  $\mathcal{S}$  e  $P(b, s)$  tem ao menos uma raiz em  $\bar{\mathcal{S}}$ .*

*Então, existe ao menos um  $\tilde{\lambda}$  em  $(a, b]$  tal que:*

1.  *$P(\tilde{\lambda}, s)$  tenha todas as suas raízes em  $\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$ ;*
2.  *$P(\tilde{\lambda}, s)$  tenha ao menos uma raiz em  $\partial\mathcal{S}$ .*

**Prova.** Ver Bhattacharyya et al. (1995) □

O teorema anterior mostra que, ao considerar uma família de polinômios  $P(\lambda, s)$  de grau fixo  $n$ , o conjunto formado pelas raízes de  $P(\lambda, s)$  ao passar de uma região de estabilidade  $\mathcal{S}$  para o interior de sua região complementar  $\bar{\mathcal{S}}$  deve inicialmente cruzar a fronteira  $\partial\mathcal{S}$ . Porém, para os casos onde os elementos de  $P(\lambda, s)$  perdem grau, as suas raízes não necessariamente cruzarão a fronteira de estabilidade antes de tornarem-se instáveis. Isto pode ser facilmente observado através do seguinte exemplo.

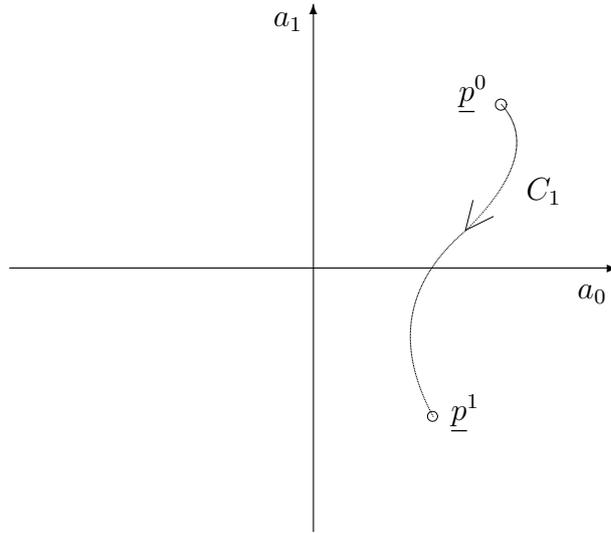


Figura 2.1: Perda de grau no caminho  $C_1$ .

**Exemplo 2.1** Considere o polinômio estável  $a_1s + a_0$ ,  $a_0 > 0$  e  $a_1 > 0$ . Defina  $\underline{p} = [a_0, a_1]$  e  $\underline{p}^0$  e  $\underline{p}^1$  de acordo com a figura 2.1. Note que o polinômio é estável para  $\underline{p} = \underline{p}^0$ . Considere agora o vetor de parâmetros caminhando sobre  $C_1$  até alcançar o ponto instável  $\underline{p}^1$ . Como pode ser facilmente observado nenhum polinômio neste caminho tem uma raiz sobre o eixo  $j\omega$ , isto é, não ocorre o cruzamento da fronteira. Note, porém, que  $a_1$  diminui até anular-se, isto é, no caminho  $C_1$  há perda de grau. A perda de grau pode então ser entendida como um limite para a estabilidade, pois perturbando-se o coeficiente de maior grau de  $\underline{p}^0$  em direção a  $\underline{p}^1$ , pouco o suficiente além do necessário para perda de grau, este cruza o eixo de  $a_0$  e muda de sinal, tornando-se instável.  $\square$

O exemplo anterior pode ser generalizado para polinômios de ordem maior que um, uma vez que qualquer perturbação sobre um polinômio estável que ocasione a mudança de sinal de um de seus coeficientes causará também a instabilidade do polinômio perturbado. O exemplo 2.1 também mostra que o teorema 2.4 não pode ser diretamente utilizado quando houverem polinômios em  $P(\lambda, s)$  que percam grau. Para estes casos o teorema deve ser adequadamente modificado de forma a que os caminhos entre  $P(a, s)$  e  $P(b, s)$  sejam tais que uma das seguintes condições

ocorra: (i) zeros na fronteira  $\partial\mathcal{S}$ ; (ii) perda de grau. Desta forma, a análise não fica comprometida e o teorema 2.4 pode ser aplicado.

O teorema a seguir é uma outra forma de apresentar o teorema do cruzamento da fronteira. Este teorema, conhecido por princípio da exclusão da origem, é de fundamental importância para obtenção da margem de estabilidade paramétrica e visa detectar a presença de polinômios instáveis dentro de uma determinada família de polinômios de grau fixo  $n$ . Para entender este princípio, inicialmente suponha que  $\delta(s, \underline{c})$  denote um polinômio cujos coeficientes dependem continuamente do vetor de parâmetros  $\underline{c} \in \mathbb{R}^l$  que varia em um conjunto  $\Theta \subset \mathbb{R}^l$ , e, portanto, gera a família de polinômios

$$\Delta(s) = \{\delta(s, \underline{c}) : \underline{c} \in \Theta\}. \quad (2.2)$$

Para verificar se algum polinômio da família  $\Delta(s)$  é instável, suponha que existe ao menos um polinômio Hurwitz  $\delta(s, \underline{c}_a)$  na família de polinômios  $\Delta(s)$  e que  $\delta(s, \underline{c}_b)$  seja um polinômio instável. Então, de acordo com o teorema do cruzamento da fronteira, para todo caminho contínuo entre  $\underline{c}_a$  e  $\underline{c}_b$  existe um ponto  $\underline{c}_c$  tal que o polinômio  $\delta(s, \underline{c}_c)$  possui raízes na fronteira  $\partial\mathcal{S}$ . Se este caminho puder ser construído inteiramente em  $\Theta$ , ou seja, se  $\Theta$  é conexo por caminhos, então o ponto  $\underline{c}_c \in \Theta$ . Neste caso, a presença de polinômios instáveis implica na presença de polinômios em  $\Delta(s)$  com raízes na fronteira  $\partial\mathcal{S}$ . Este fato leva a uma maneira simples de determinar a existência de polinômios instáveis em  $\Delta(s)$ , isto é: para  $s^* \in \partial\mathcal{S}$  verificar se  $0 \in \Delta(s^*)$ , caso não pertença então a família é toda Hurwitz. O resultado anterior pode ser enunciado formalmente no seguinte teorema.

**Teorema 2.5 (Princípio da exclusão da origem)**

*Suponha que a família de polinômios (2.2) possui grau constante e contém ao menos um polinômio estável. Suponha também que  $\Theta$  é conexa por caminhos. Então toda a família é estável se e somente se*

$$0 \notin \Delta(s^*), \quad \text{para todo } s^* \in \partial\mathcal{S}.$$

□

## 2.2 Margem de estabilidade paramétrica

Nesta seção, a margem de estabilidade paramétrica será definida e um método matemático para sua obtenção, baseado no teorema do cruzamento da fronteira, mais precisamente na sua formulação como o princípio da exclusão da origem, será apresentado.

### 2.2.1 Definição

Antes de definir a margem de estabilidade paramétrica será necessário fazer algumas hipóteses. Desta forma, considere o sistema realimentado da figura 2.2. Neste sistema  $G(s, \underline{x})$  representa a função de transferência da planta e  $K(s, \underline{p})$  representa a função de transferência do controlador. Suponha que o vetor de parâmetros  $\underline{x}$  e  $\underline{p}$  são reais e seus elementos são os coeficientes do numerador e denominador da função de transferência da planta e do controlador, respectivamente. Um problema interessante a ser formulado é, dado um controlador  $K(s, \underline{p}^0)$  que estabiliza uma planta cujos parâmetros  $\underline{x}$  são considerados fixos, encontrar o quanto podem ser perturbados os elementos de  $\underline{p}^0$  tal que o sistema em malha fechada permaneça estável. Isto leva à seguinte definição:

**Definição 2.1** *Seja  $\Delta \underline{p} = \underline{p} - \underline{p}^0$ , um vetor representativo da perturbação dos parâmetros do controlador. Então a margem de estabilidade paramétrica pode ser definida como o módulo da menor perturbação que faz com que o polinômio característico em malha fechada se torne instável.*  $\square$

Uma importante caracterização para este problema seria encontrar a maior bola de estabilidade no espaço de parâmetros do controlador, centrada no valor nominal  $\underline{p}^0$ . Esta caracterização leva a uma forma simples e sistemática para a obtenção da margem de estabilidade paramétrica para o caso linear. Considere  $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$  a região de estabilidade e  $\underline{p}$  um vetor real de parâmetros,

$$\underline{p} = [p_1, p_2, \dots, p_l]^T.$$

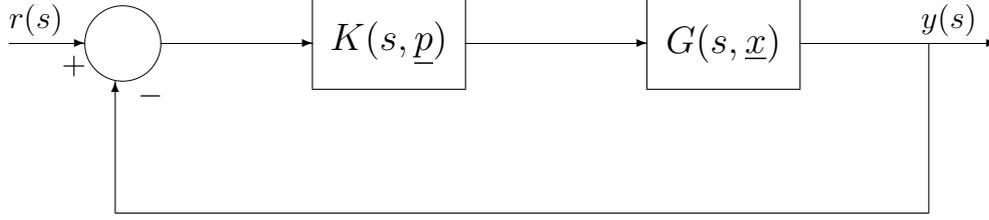


Figura 2.2: Sistema em malha fechada

Então o polinômio característico em malha fechada pode ser escrito como:

$$\delta(s, \underline{p}) = \delta_n(\underline{p})s^n + \delta_{n-1}(\underline{p})s^{n-1} + \dots + \delta_0(\underline{p}). \quad (2.3)$$

Considere que  $\delta(s, \underline{p}_0)$ , onde  $\underline{p} = \underline{p}_0$  é o vetor de parâmetros nominal, é estável com respeito a  $\mathcal{S}$ . Denote

$$\Delta \underline{p} := \underline{p} - \underline{p}_0 = [p_1 - p_1^0, p_2 - p_2^0, \dots, p_l - p_l^0]^T$$

como o vetor de perturbações sobre os parâmetros do controlador nominal e introduza uma norma  $\|\cdot\|$  no espaço dos vetores  $\underline{p}$  (neste trabalho será utilizada a norma Euclidiana). Pode-se, então, definir:

1. Bola de raio  $\rho$  centrada em  $\underline{p}^0$ :

$$\mathcal{B}(\rho, \underline{p}^0) = \{\underline{p} : \|\underline{p} - \underline{p}^0\| < \rho\},$$

que pode ser associada à família de polinômios

$$\Delta_\rho(s) := \{\delta(s, \underline{p}^0 + \Delta \underline{p}) : \|\Delta \underline{p}\| < \rho\};$$

2. Hipersfêra de raio  $\rho$ :

$$\mathcal{H}(\rho, \underline{p}^0) = \{\underline{p} : \|\underline{p} - \underline{p}^0\| = \rho\}.$$

Por esta nova formulação, a margem de estabilidade paramétrica no espaço de parâmetros é então definida como o raio,  $\rho^*(\underline{p}^0)$ , da maior bola centrada em  $\underline{p}^0$  para o

qual  $\delta(s, \underline{p})$  permanece estável para  $\underline{p} \in \mathcal{B}(\rho^*(\underline{p}^0), \underline{p}^0)$  (para simplificar a notação de agora em diante será escrito  $\rho^*$  ao invés de  $\rho^*(\underline{p}^0)$ ). A seguir um teorema que define a margem de estabilidade paramétrica será apresentado.

**Teorema 2.6** *Sob as hipóteses acima, a margem de estabilidade paramétrica  $\rho^*$  é caracterizada por:*

1. *Existe uma bola maior  $\mathcal{B}(\rho^*, \underline{p}^0)$  centrada em  $\underline{p}^0$ , tal que:*
  - (a) *Para todo  $\underline{p}'$  contido na bola, o polinômio característico  $\delta(s, \underline{p}')$  é estável e de grau  $n$ .*
  - (b) *Ao menos um ponto  $\underline{p}''$  na hiperesfera  $\mathcal{H}(s, \underline{p}^0)$  é tal que  $\delta(s, \underline{p}'')$  é instável ou de grau inferior a  $n$  (perde grau).*
2. *Além disso se  $\underline{p}''$  é algum ponto na hiperesfera  $\mathcal{H}(\rho^*, \underline{p}^0)$  tal que  $\delta(s, \underline{p}'')$  é instável, então os zeros instáveis de  $\delta(s, \underline{p}'')$  podem somente estar na fronteira de estabilidade.*

**Prova.** Ver Bhattacharyya et al. (1995). □

Para ilustrar a caracterização dada no teorema 2.6 para a margem de estabilidade paramétrica,  $\rho^*$ , um exemplo será apresentado a seguir.

**Exemplo 2.2** *Suponha que as funções de transferência da planta e do controlador sejam dadas por:*

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2} \quad e \quad K(s, [K_P^0 \ K_I^0]) = K_P^0 + \frac{K_I^0}{s},$$

*e considere que  $K(s, \underline{p}^0) = K(s, [K_P^0 \ K_I^0])$  estabiliza  $G(s)$ . Pelo critério de Routh-Hurwitz o sistema realimentado será estável se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:*

$$K_P > K_I + 2 \quad e \quad K_I > 0. \tag{2.4}$$

*A partir da equação (2.4), é possível obter uma região de estabilidade  $\Omega$ , definida no espaço de parâmetros do controlador. Esta região está representada na figura 2.3. A margem de estabilidade paramétrica  $\rho^*$ , de acordo com o teorema 2.6, pode ser então*

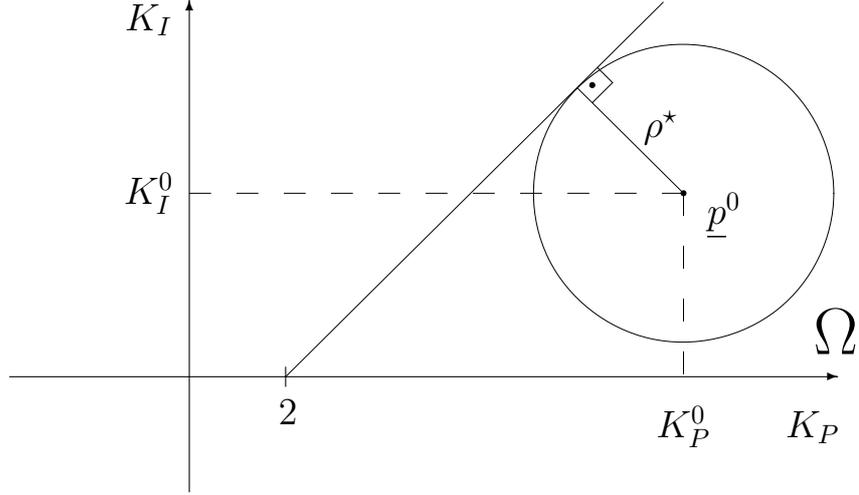


Figura 2.3: Caracterização para a margem de estabilidade paramétrica no espaço de parâmetros do controlador para o exemplo 2.2.

definida como o raio da maior bola centrada em  $\underline{p}^0$ ,  $\mathcal{B}(\rho^*, \underline{p}^0)$ , tal que todos os pontos  $\underline{p} \in \mathcal{B}(\rho^*, \underline{p}^0)$  representem controladores que estabilizam o sistema realimentado, isto é,  $\underline{p} \in \Omega$ , e ao menos um ponto na hipersfera correspondente,  $\mathcal{H}(\rho^*, \underline{p}^0)$ , representa um controlador que não estabiliza o sistema realimentado, como mostrado na figura 2.3. É importante ressaltar que para este exemplo não há a possibilidade de perda de grau do polinômio característico em malha fechada.  $\square$

### 2.2.2 Cálculo da margem de estabilidade paramétrica

A margem de estabilidade paramétrica é obtida utilizando a imagem da família de polinômios  $\Delta_\rho(s)$  no plano complexo  $\mathbb{C}$ , calculada em cada ponto da fronteira da região de estabilidade  $\partial\mathcal{S}$ . Para tanto, considere que  $\delta(s, \underline{p}^0)$  seja um polinômio estável, isto é, os zeros de  $\delta(s, \underline{p}^0) \in \mathcal{S}$ , e suponha que a família de polinômios  $\Delta_\rho(s)$  tenha grau constante  $n$  e possui ao menos um polinômio instável. Então, pelo princípio de exclusão da origem, teorema 2.5, para detectar a existência do polinômio instável deve-se gerar o conjunto imagem da família de polinômios de grau  $n$  em cada ponto da fronteira  $\partial\mathcal{S}$  e determinar se a origem está incluída, ou seja, definindo  $s^*$  um ponto pertencente à fronteira de estabilidade  $\partial\mathcal{S}$ , deve-se verificar se  $0 \in \Delta_\rho(s^*)$  para algum  $s^* \in \partial\mathcal{S}$ . Para o caso onde existem polinômios em  $\Delta_\rho(s)$  que

percam grau, deve-se considerar também, de acordo com o teorema 2.6, o raio da maior bola tal que todos os polinômios contidos nesta bola tenham grau constante. Este procedimento leva a uma forma sistemática para determinação da margem de estabilidade paramétrica  $\rho^*$ , e será apresentado pelo seguinte procedimento.

**Procedimento 2.1** *Para calcular a margem de estabilidade paramétrica  $\rho^*$  deve-se seguir os seguintes passos:*

1. *definindo  $s^*$  como um ponto na fronteira  $\partial\mathcal{S}$ , determine  $\rho(s^*) := \inf\{\rho : 0 \in \Delta_\rho(s^*)\}$  em cada ponto  $s^*$ ;*
2. *minimize a função  $\rho(s^*)$  sobre toda a fronteira  $\partial\mathcal{S}$  e então determine*

$$\rho_b = \inf_{s^* \in \partial\mathcal{S}} \rho(s^*);$$

3. *calcule o maior raio  $\rho_d$  tal que todo polinômio contido na bola  $\mathcal{B}(\rho_d, \underline{p}^0)$  seja de grau constante  $n$ , ou seja,*

$$\rho_d := \inf\{\rho : \delta_n(\underline{p}^0 + \Delta\underline{p}) = 0, \|\Delta\underline{p}\| < \rho\};$$

4. *determine  $\rho^* = \min\{\rho_b, \rho_d\}$ .* □

Um fato interessante a ser notado é que a direção do vetor de perturbação  $\Delta\underline{p}$ , encontrado através do cálculo de  $\rho^*$ , pode ser entendida como a pior direção de perturbação sobre o vetor nominal de parâmetros  $\underline{p}^0$ , quanto à estabilidade do sistema em malha fechada. Isto permite concluir então que existem direções no espaço de parâmetros que permitem uma variação maior do que a calculada pela margem de estabilidade paramétrica.

Para o caso linear e considerando a norma a ser utilizada a norma-2,  $\|\cdot\|_2$ , fórmulas simples podem ser obtidas para o cálculo de  $\rho^*$  (Bhattacharyya et al., 1995; Garcia, 2000). Para tanto, suponha que as funções de transferência da planta e do controlador sejam, respectivamente, dadas por:

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m_1} \alpha_i s^i}{\sum_{j=0}^{n_1} \beta_j s^j} \quad (2.5)$$

$$K(s) = \frac{N_K(s, \underline{p})}{D_K(s, \underline{p})} = \frac{\sum_{k=0}^{m_2} \epsilon_k s^k}{\sum_{q=0}^{n_2} \phi_q s^q} \quad (2.6)$$

Defina  $\underline{p} = [p_1 p_2 \dots p_l]^T$  o vetor de parâmetros nominal formado por um subconjunto do conjunto  $\mathcal{P} = \{\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{m_2}, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n_2}\}$  de parâmetros do controlador ( $l \leq m_2 + n_2 + 2$ ) e que são escolhidos entre aqueles que podem sofrer alguma perturbação. Não é difícil verificar que

$$\begin{aligned} \delta(s, \underline{p}) &= N_G(s)N_K(s, \underline{p}) + D_G(s)D_K(s, \underline{p}) \\ &= \sum_{i=1}^l a_i(s)p_i + b(s). \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde  $a_i(s)$  e  $b(s)$  são polinômios independentes de  $\underline{p}$ . Por exemplo, fazendo

$$\underline{p} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_l]^T = [\epsilon_0 \ \dots \ \epsilon_{m_2} \ \phi_0 \ \dots \ \phi_{n_2}]^T, \quad l = m_2 + n_2 + 2$$

então

$$\delta(s, \underline{p}) = N_G(s)\epsilon_0 + \dots + N_G(s)s^{m_2}\epsilon_{m_2} + D_G(s)\phi_0 + \dots + D_G(s)s^{n_2}\phi_{n_2} \quad (2.8)$$

e portanto, neste caso,

$$a_i(s) = \begin{cases} N_G(s)s^{i-1}, & i = 1, \dots, m_2 + 1 \\ D_G(s)s^{i-m_2-2}, & i = m_2 + 2, \dots, m_2 + n_2 + 2 \end{cases} \quad (2.9)$$

e  $b(s) = 0$ . Um fato importante a ser notado neste exemplo é que para  $s = 0$ , os únicos elementos  $a_i(0)$  que poderão ser diferentes de zero de acordo com a equação (2.9) são  $a_1(0)$  e  $a_{m_2+2}(0)$ .

Considere novamente a equação (2.7). Fazendo  $\Delta \underline{p} = \underline{p} - \underline{p}^0$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta(s, \underline{p}) &= \delta(s, \underline{p}^0 + \Delta \underline{p}) = \sum_{i=1}^l a_i(s)(p_i^0 + \Delta p_i) + b(s) \\ &= \delta(s, \underline{p}^0) + \sum_{i=1}^l a_i(s)\Delta p_i. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Seja  $s^*$  um ponto pertencente à fronteira de estabilidade  $\partial \mathcal{S}$ . Então, para que  $s^*$  seja uma raiz de  $\delta(s, \underline{p}^0 + \Delta \underline{p})$ , deve-se ter:

$$\delta(s^*, \underline{p}) = \delta(s^*, \underline{p}^0 + \Delta \underline{p}) = \delta(s^*, \underline{p}^0) + \sum_{i=1}^l a_i(s^*)\Delta p_i = 0. \quad (2.11)$$

Como a região de estabilidade  $\mathcal{S}$  que está sendo considerada neste trabalho é o semi-plano esquerdo do plano complexo  $\mathbb{C}$ , a fronteira de estabilidade  $\partial\mathcal{S}$  é o eixo imaginário, e portanto,  $s^* = j\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ . Assim sendo,

$$\delta(j\omega, \underline{p}^0 + \Delta\underline{p}) = \delta(j\omega, \underline{p}^0) + \sum_{i=1}^l a_i(j\omega)\Delta p_i = 0, \quad (2.12)$$

que pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_1(j\omega) & a_2(j\omega) & \dots & a_l(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_l \end{bmatrix} = -\delta(j\omega, \underline{p}^0). \quad (2.13)$$

Separando cada polinômio  $a_k(j\omega)$  em suas partes real,  $a_{kR}(j\omega)$ , e imaginária,  $a_{kI}(j\omega)$ , onde  $a_{kR}(j\omega)$ ,  $a_{kI}(j\omega) \in \mathbb{R}$  e separando o polinômio característico para cada  $\omega \in \mathbb{R}$  como

$$\delta(j\omega, \underline{p}^0) = \delta_R(j\omega, \underline{p}^0) + j\delta_I(j\omega, \underline{p}^0),$$

pode-se reescrever a equação (2.13) como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1R}(j\omega) & a_{2R}(j\omega) & \dots & a_{lR}(j\omega) \\ a_{1I}(j\omega) & a_{2I}(j\omega) & \dots & a_{lI}(j\omega) \end{bmatrix}}_{A(j\omega)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_l \end{bmatrix}}_{\Delta\underline{p}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_R(j\omega, \underline{p}^0) \\ \delta_I(j\omega, \underline{p}^0) \end{bmatrix}}_{\underline{y}(j\omega)}, \quad (2.14)$$

$$A(j\omega)\Delta\underline{p} = -\underline{y}(j\omega). \quad (2.15)$$

Quando  $\omega = 0$ , a equação (2.13) é toda real e pode ser escrita como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1(0) & a_2(0) & \dots & a_l(0) \end{bmatrix}}_{\underline{a}(0)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_l \end{bmatrix}}_{\Delta\underline{q}} = - \underbrace{\delta(0, \underline{p}^0)}_{y(0)}, \quad (2.16)$$

$$\underline{a}(0)\Delta\underline{q} = -y(0). \quad (2.17)$$

Definidas as equações (2.14) e (2.16) e seguindo os passos 1 e 2 do procedimento 2.1 deve-se inicialmente encontrar o raio  $\rho_b$ . Para tanto, é necessário obter as soluções de norma-2 mínima para as equações acima para cada  $\omega \in \mathbb{R}$  e, em seguida, determinar o menor valor obtido. Porém, para determinação destas soluções, deve-se

anteriormente observar em qual dos seguintes casos a equação (2.14) incorre:

Caso 1:  $\text{Posto}[A(j\omega)] = 2$ . Neste caso, a equação (2.14) admite solução de norma-2 mínima dada por:

$$\rho(j\omega) = \|\Delta \underline{p}\|_2 = \|A^T(j\omega)[A(j\omega)A^T(j\omega)]^{-1}\underline{y}(j\omega)\|_2. \quad (2.18)$$

Caso 2:  $\text{Posto}[A(j\omega)] = 1$ . Neste caso, a equação (2.14) será consistente se e somente se  $\text{posto}[A(j\omega), \underline{y}(j\omega)] = 1$ . Caso esta condição de posto seja satisfeita substitui-se as duas linhas da equação (2.14) por uma única linha, para a qual determina-se a solução de norma-2 mínima por mínimos quadrados. Se a condição de posto não for satisfeita então a equação (2.14) não terá solução e  $\rho(j\omega) = \infty$ .

Caso 3:  $\text{Posto}[A(j\omega)] = 0$ . Neste caso a equação (2.14) é inconsistente e  $\rho(j\omega) = \infty$ .

Denotanto

$$\rho_{b_1} = \inf_{\omega \neq 0} \rho(j\omega) \text{ e } \rho(0) = \|\Delta \underline{q}\|_2,$$

conclui-se portanto que:

$$\rho_b = \min\{\rho_{b_1}, \rho(0)\}. \quad (2.19)$$

Resta agora, considerando a possibilidade de perda de grau de  $\delta(s, \underline{p})$ , definir  $\rho_d$ . Assim sendo, considere novamente a equação (2.10). Tem-se, que  $\delta(s, \underline{p}) = \delta(s, \underline{p}^0 + \Delta \underline{p})$  pode ser escrito como:

$$\delta(s, \underline{p}) = \delta(s, \underline{p}^0 + \Delta \underline{p}) = \delta_n(\underline{p}^0 + \Delta \underline{p})s^n + \delta_{n-1}(\underline{p}^0 + \Delta \underline{p})s^{n-1} + \dots + \delta_0(\underline{p}^0 + \Delta \underline{p}) \quad (2.20)$$

Note que a perda de grau de  $\delta(s, \underline{p}^0 + \Delta \underline{p})$  corresponde a  $\delta_n(\underline{p}^0 + \Delta \underline{p}) = 0$ . Denotando  $a_{in}$  como o coeficiente do termo de n-ésimo grau do polinômio  $a_i(s)$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , obtém-se:

$$\delta_n(\underline{p}^0 + \Delta \underline{p}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^l a_{in} \Delta p_i + \delta_n(\underline{p}^0) = 0 \quad (2.21)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{ln} \end{bmatrix}}_{\underline{a}_n} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_l \end{bmatrix} = -\delta_n(\underline{p}^0) \quad (2.22)$$

$$\underline{a}_n \Delta \underline{p} = -\delta_n(\underline{p}^0) \Rightarrow \rho_d = \|\underline{a}_n^T (\underline{a}_n \underline{a}_n^T)^{-1} \delta_n(\underline{p}^0)\|_2. \quad (2.23)$$

Desta forma está completo o passo 3 do procedimento 2.1 e a margem de estabilidade paramétrica é dada por  $\rho^* = \min\{\rho_b, \rho_d\}$ .

O valor encontrado para o raio  $\rho^*$  da maior bola centrada em  $\underline{p}^0$  tal que a família de polinômios  $\Delta_\rho(s)$  tenha somente polinômios estáveis e de grau  $n$ , em termos absolutos, é de difícil interpretação. Por este motivo é mais interessante representar a margem de estabilidade paramétrica por um valor relativo, ou seja, calcular  $\rho^*$  da forma desenvolvida anteriormente e em seguida obter uma margem de estabilidade paramétrica relativa,  $\mu$ , da seguinte forma:

$$\mu = \frac{\rho^*}{\|\underline{p}^0\|_2}, \quad (2.24)$$

onde  $\underline{p}^0$  é o vetor de parâmetros do controlador nominal. Esta nova representação é mais conveniente e mostra a variação normalizada que o vetor de parâmetros  $\underline{p}^0$  pode sofrer antes de tornar o sistema realimentado instável.

### 2.2.3 Resultados adicionais sobre margem de estabilidade paramétrica

Para o cálculo da margem de estabilidade paramétrica,  $\rho^*$ , inicialmente foi necessário definir o polinômio característico  $\delta(s, \underline{p}^0)$  da seguinte forma:

$$\delta(s, \underline{p}^0) = \sum_{i=1}^l a_i(s) p_i^0 + b(s), \quad (2.25)$$

onde  $b(s)$  é um termo independente dos parâmetros  $p_i^0$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ . Note que este termo  $b(s)$  é igual a zero se for considerado que todos os parâmetros do controlador podem variar. Em algumas aplicações, o coeficiente de maior grau do denominador do controlador é feito fixo e nesses casos  $b(s)$  é diferente de zero. Surge, portanto, a seguinte questão: qual a relação entre a margem de estabilidade paramétrica considerando-se o denominador de  $K(s)$  mônico com o coeficiente de maior grau fixo,  $\hat{\rho}^*$ , e a margem de estabilidade paramétrica,  $\rho^*$ , onde todos os parâmetros podem variar? Esta relação é apresentada no teorema a seguir.

**Teorema 2.7** *Suponha que o controlador  $K(s) = n_K(s)/d_K(s)$ ,  $d_K(s)$  mônico, estabiliza a planta  $G(s) = n_G(s)/d_G(s)$  e sejam  $\rho^*$  e  $\hat{\rho}^*$  as margens de estabilidade*

paramétrica do sistema realimentado calculadas permitindo-se ou não que o coeficiente da potência de  $s$  de maior grau de  $d_K(s)$  varie. Então  $\hat{\rho}^* \geq \rho^*$ .

**Prova.** Observe que quando  $G(s)$  é estritamente própria não ocorre a perda de grau do polinômio característico em malha fechada no caso onde não é permitida a variação do coeficiente de potência de  $s$  de maior grau de  $d_K(s)$ . Desta forma a margem de estabilidade paramétrica  $\hat{\rho}^*$  é obtida somente calculando-se  $\hat{\rho}_b$ . Por outro lado, para obtenção da margem de estabilidade paramétrica  $\rho^*$  é necessário calcular tanto  $\rho_b$  quanto  $\rho_d$  e encontrar o menor entre os dois. Desta forma, uma comparação entre  $\rho_b$  e  $\hat{\rho}_b$  é suficiente para provar o teorema pois a possibilidade de perda de grau pode apenas tornar a margem de estabilidade paramétrica  $\rho^*$  ainda menor. Para os casos em que  $G(s)$  é biprópria é necessário calcular tanto  $\hat{\rho}_b$  e  $\hat{\rho}_d$  quanto  $\rho_b$  e  $\rho_d$ , uma vez que, neste caso, a condição do coeficiente da potência de  $s$  de maior grau de  $d_K(s)$  não poder variar não implica mais na impossibilidade do polinômio característico em malha fechada perder grau.

Assim sendo, suponha que a matriz  $A$  definida em (2.14) tenha posto igual a dois (posto cheio por linha). Denotando  $\Delta \underline{p} = [\Delta p_1 \ \Delta p_2 \ \dots \ \Delta p_l]^T$  e  $\Delta \underline{\hat{p}} = [\Delta \hat{p}_1 \ \Delta \hat{p}_2 \ \dots \ \Delta \hat{p}_{l-1}]^T$  e definindo  $\hat{A}$  a matriz cujas colunas são as  $l - 1$  primeiras colunas de  $A$  em (2.14), isto é,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{1R}(j\omega) & a_{2R}(j\omega) & \dots & a_{(l-1)R}(j\omega) \\ a_{1I}(j\omega) & a_{2I}(j\omega) & \dots & a_{(l-1)I}(j\omega) \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

então, é fácil verificar que:<sup>1</sup>

$$\Delta \underline{p} = -A^T(AA^T)^{-1} \underline{y} \Rightarrow \|\Delta \underline{p}\|_2^2 = \underline{y}^T(AA^T)^{-1} \underline{y} \quad (2.27)$$

$$\Delta \underline{\hat{p}} = -\hat{A}^T(\hat{A}\hat{A}^T)^{-1} \underline{y} \Rightarrow \|\Delta \underline{\hat{p}}\|_2^2 = \underline{y}^T(\hat{A}\hat{A}^T)^{-1} \underline{y} \quad (2.28)$$

Além disso, pela definição de  $A$ , dada na equação (2.14), e de  $\hat{A}$ , é possível escrever:

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= \begin{bmatrix} \hat{A}(j\omega) & \begin{bmatrix} \hat{v}_R^T(j\omega) \\ \hat{v}_I^T(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{d}_G \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{A}(j\omega) & V(j\omega) \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{d}_G \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Para facilitar a notação, a dependência de  $j\omega$  será omitida em algumas partes da prova.

onde  $\hat{u}_R^T(j\omega)$  e  $\hat{u}_I^T(j\omega)$  são as partes real e imaginária de  $\underline{v}^T(j\omega) = [1 \dots (j\omega)^{n+m}]$  onde  $n$  e  $m$  são os ordens de  $G(s)$  e  $K(s)$ , respectivamente. Utilizando a relação acima na equação (2.27) resulta:

$$\|\Delta \underline{p}\|_2^2 = \underline{y}^T \left\{ \hat{A}\hat{A}^T + V \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{d}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0}^T & \underline{d}_G^T \end{bmatrix} V^T \right\}^{-1} \underline{y}.$$

Portanto,  $\|\Delta \hat{\underline{p}}\|_2^2 \geq \|\Delta \underline{p}\|_2^2$  se e somente se

$$\underline{y}^T \left\{ (\hat{A}\hat{A}^T)^{-1} - \left[ \hat{A}\hat{A}^T + V \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{d}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0}^T & \underline{d}_G^T \end{bmatrix} V^T \right]^{-1} \right\} \underline{y} \geq 0. \quad (2.29)$$

Definindo

$$\bar{A} = (\hat{A}\hat{A}^T) \text{ e } \bar{B} = \left( V \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{d}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0}^T & \underline{d}_G^T \end{bmatrix} V^T \right)$$

pode-se observar que  $\bar{A}$  é positiva definida enquanto que  $\bar{B}$  é positiva semidefinida.

Então a condição expressa pela equação (2.29) pode ser reescrita como:

$$\underline{y}^T [\bar{A}^{-1} - (\bar{A} + \bar{B})^{-1}] \underline{y} \geq 0. \quad (2.30)$$

Note que, para todo  $\underline{y}$  existe  $\underline{x}$  tal que  $\underline{y} = (\bar{A} + \bar{B})\underline{x}$ , uma vez que  $(\bar{A} + \bar{B})$  é, por construção, simétrica positiva definida. Então a inequação (2.30) é equivalente a:

$$\underline{x}^T (\bar{A} + \bar{B}) [\bar{A}^{-1} - (\bar{A} + \bar{B})^{-1}] (\bar{A} + \bar{B})\underline{x} \geq 0. \quad (2.31)$$

Se for mostrado que a expressão acima é sempre verdadeira para todo  $\underline{x}$ , então a expressão (2.29) é verdadeira também para todo  $\underline{y}$ . Desenvolvendo a inequação (2.31) obtém-se:

$$\underline{x}^T [(\bar{A} + \bar{B})(I + \bar{A}^{-1}\bar{B} - I)] \underline{x} \geq 0 \quad (2.32)$$

$$\underline{x}^T \bar{B}\underline{x} + \underline{x}^T \bar{B}\bar{A}^{-1}\bar{B}\underline{x} \geq 0. \quad (2.33)$$

Como

$$\underline{x}^T \bar{B}\underline{x} \geq 0 \quad \text{e} \quad \underline{x}^T \bar{B}\bar{A}^{-1}\bar{B}\underline{x} \geq 0,$$

então a matriz

$$(\hat{A}(j\omega)\hat{A}(j\omega)^T)^{-1} - \left[ \hat{A}(j\omega)\hat{A}(j\omega)^T + V(j\omega) \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{d}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0}^T & \underline{d}_G^T \end{bmatrix} V(j\omega)^T \right]^{-1}$$

é positiva semidefinida para todo  $\omega > 0$ . Para o caso em que  $\omega = 0$ , denote  $\Delta \underline{q} = [\Delta p_1 \ \Delta p_2 \ \dots \ \Delta p_l]^T$  e  $\Delta \underline{\hat{q}} = [\Delta p_1 \ \Delta p_2 \ \dots \ \Delta p_{l-1}]^T$  e defina  $\underline{\hat{a}}(0)$  o vetor linha cujos elementos são os  $l - 1$  primeiros elementos de  $\underline{a}(0)$  em (2.16), logo, é fácil verificar que:

$$\Delta \underline{q} = -\underline{a}^T(0) [\underline{a}(0)\underline{a}^T(0)]^{-1} \underline{y}(0) \Rightarrow \|\Delta \underline{q}\|_2^2 = \underline{y}^T(0) [\underline{a}(0)\underline{a}^T(0)]^{-1} \underline{y}(0) \quad (2.34)$$

$$\Delta \underline{\hat{q}} = -\underline{\hat{a}}^T(0) [\underline{\hat{a}}(0)\underline{\hat{a}}^T(0)]^{-1} \underline{y}(0) \Rightarrow \|\Delta \underline{\hat{q}}\|_2^2 = \underline{y}^T(0) [\underline{\hat{a}}(0)\underline{\hat{a}}^T(0)]^{-1} \underline{y}(0). \quad (2.35)$$

Como  $\underline{a}(0)\underline{a}^T(0) = \underline{\hat{a}}(0)\underline{\hat{a}}^T(0)$  e notando que, de acordo com a equação (2.9),  $a_l(0) = 0$ , então  $\|\Delta \underline{q}\|_2^2 = \|\Delta \underline{\hat{q}}\|_2^2$ , ou seja,  $\rho(0) = \hat{\rho}(0)$ . Para os casos em que  $G(s)$  é estritamente própria a prova do teorema está concluída. Porém, quando  $G(s)$  é biprópria deve-se ainda considerar a possibilidade de perda de grau do polinômio característico em malha fechada, conforme anteriormente ressaltado. Assim sendo, definindo  $\underline{\hat{a}}_n$  o vetor linha formado pelos  $l - 1$  primeiros elementos de  $\underline{a}_n$  em (2.22) e procedendo de maneira idêntica às anteriores, obtém-se:

$$\rho_d = -\delta_n(\underline{p}^0) [\underline{a}_n \underline{a}_n^T]^{-1} \delta_n(\underline{p}^0) \quad (2.36)$$

$$\hat{\rho}_d = -\delta_n(\underline{p}^0) [\underline{\hat{a}}_n \underline{\hat{a}}_n^T]^{-1} \delta_n(\underline{p}^0). \quad (2.37)$$

Como  $\underline{a}_n \underline{a}_n^T > \underline{\hat{a}}_n \underline{\hat{a}}_n^T$ , pois  $a_{ln}$  é necessariamente diferente de zero, então  $\hat{\rho}_d > \rho_d$ , concluindo a prova do teorema também para o caso em que  $G(s)$  é biprópria.  $\square$

Este teorema mostra que permitir uma variação no coeficiente de maior grau do denominador do controlador pode piorar a sua margem de estabilidade paramétrica. A seguir será enunciado um corolário para a apresentação de um resultado, agora quanto à margem de estabilidade paramétrica relativa.

**Corolário 2.3** *Sob as mesmas condições do teorema (2.7) sejam  $\mu$  e  $\hat{\mu}$  as margens de estabilidade paramétrica relativas do sistema realimentado calculadas permitindo-se a variação do coeficiente de maior grau de  $d_K(s)$  e não permitindo, respectivamente. Então  $\hat{\mu} > \mu, \omega \in [0, \infty)$ .*

**Prova.** Pela definição de margem de estabilidade paramétrica relativa (equação 2.24) e considerando que pode haver variação no coeficiente de maior grau de  $d_K(s)$ ,

tem-se:

$$\mu = \frac{\rho^*}{\|\underline{p}^0\|_2}.$$

De forma análoga, a margem de estabilidade paramétrica relativa, considerando  $d_K(s)$  mônico com o coeficiente da potência de  $s$  de maior grau fixo, é obtida fazendo-se:

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\rho}^*}{\|\hat{\underline{p}}^0\|_2}$$

onde  $\hat{\underline{p}}^0$  é o vetor de parâmetros formado pelos coeficientes do numerador e denominador de  $K(s, \underline{p}^0)$  exceto pelo coeficiente da potência de  $s$  de maior grau do denominador  $d_K(s)$ . Pelo teorema 2.7  $\hat{\rho}^* \geq \rho^*$ . Além disso

$$\|\underline{p}^0\|_2^2 = \|\hat{\underline{p}}^0\|_2^2 + 1 \Rightarrow \|\underline{p}^0\|_2 > \|\hat{\underline{p}}^0\|_2.$$

Então,

$$\mu = \frac{\rho^*}{\|\underline{p}^0\|_2} \leq \frac{\hat{\rho}^*}{\|\underline{p}^0\|_2} < \frac{\hat{\rho}^*}{\|\hat{\underline{p}}^0\|_2} = \hat{\mu}.$$

□

O corolário 2.3 mostra que a margem de estabilidade paramétrica relativa, considerando fixo o coeficiente da potência de  $s$  de maior grau do denominador de  $K(s)$  é sempre maior do que a obtida quando este pode variar. Portanto neste trabalho quando houver a necessidade de se comparar controladores quanto à margem de estabilidade paramétrica relativa, será adotada  $\mu$  ou  $\hat{\mu}$  para ambos os controladores, visando assim uma comparação mais justa.

Um outro resultado interessante sobre margem de estabilidade paramétrica pode ser obtido se o problema a ser formulado for diferente da determinação de  $\mu$ . Suponha agora que somente importa saber se, para dado um  $\mu_0 > 0$ , um determinado ponto no espaço de parâmetros do controlador possui margem de estabilidade paramétrica relativa  $\mu$  maior ou igual que  $\mu_0$ . Este problema, quando resolvido calculando-se diretamente a margem de estabilidade paramétrica relativa  $\mu$  e, em seguida, verificando se  $\mu \geq \mu_0$ , requer um esforço computacional maior do que se for aplicado o resultado do seguinte teorema.

**Teorema 2.8** *Suponha que o polinômio do denominador de  $K(s)$  seja mônico e que o coeficiente do termo de maior grau não pode variar. Suponha também que  $G(s)$  é estritamente própria. Então o sistema em malha fechada tem margem de estabilidade paramétrica relativa maior ou igual a  $\hat{\mu}_0 > 0$  se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:*

$$(a) \quad \underline{p}^{0T} \left\{ \hat{\mu}_0^2 I - A^T(j\omega) \left[ \hat{A}(j\omega) \hat{A}^T(j\omega) \right]^{-1} A(j\omega) \right\} \underline{p}^0 \leq \hat{\mu}_0^2, \quad \forall \omega > 0 \quad (2.38)$$

$$(b) \quad \underline{\hat{p}}^{0T} \left\{ \hat{\underline{a}}^T(0) \left[ \hat{\underline{a}}(0) \hat{\underline{a}}^T(0) \right]^{-1} \hat{\underline{a}}(0) - \hat{\mu}_0^2 \right\} \underline{\hat{p}}^0 \geq 0, \quad \omega = 0. \quad (2.39)$$

**Prova.** Uma vez que o coeficiente do termo de maior grau do polinômio do denominador de  $K(s)$  não pode, por hipótese, variar, então a equação (2.13) pode ser reescrita como:

$$\left[ a_1(j\omega) \quad a_2(j\omega) \quad \dots \quad a_{l-1}(j\omega) \right] \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_{l-1} \end{bmatrix} = -\delta(j\omega, \underline{p}^0). \quad (2.40)$$

Note também que o polinômio  $\delta(j\omega, \underline{p}^0)$  pode ser escrito como:

$$\delta(j\omega, \underline{p}^0) = \left[ a_1(j\omega) \quad a_2(j\omega) \quad \dots \quad a_l(j\omega) \right] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_l \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Substituindo (2.41) em (2.40) e em seguida, equacionando as partes real e imaginária, obtém-se:

$$\hat{A}(j\omega) \Delta \underline{\hat{p}} = -A(j\omega) \underline{p}^0, \quad \omega > 0 \quad (2.42)$$

e, portanto

$$\Delta \underline{\hat{p}} = -\hat{A}^T(j\omega) \left[ \hat{A}(j\omega) \hat{A}^T(j\omega) \right]^{-1} A(j\omega) \underline{p}^0. \quad (2.43)$$

Note que, como  $\hat{\mu} = \frac{\hat{\rho}^*}{\|\underline{\hat{p}}^0\|_2} = \frac{\min \|\Delta \underline{\hat{p}}\|_2}{\|\underline{\hat{p}}^0\|_2}$  então, dado  $\hat{\mu}_0 > 0$  a margem de estabilidade paramétrica relativa  $\hat{\mu}$  será maior ou igual a  $\hat{\mu}_0$  somente se:

$$\|\Delta \underline{\hat{p}}\|_2^2 \geq \hat{\mu}_0^2 \|\underline{\hat{p}}^0\|_2^2, \quad \forall \omega > 0.$$

Utilizando a equação (2.43) tem-se uma condição equivalente a dada pela expressão acima, qual seja:

$$\underline{p}^{0T} \left\{ A^T(j\omega) \left[ \hat{A}(j\omega) \hat{A}^T(j\omega) \right]^{-1} A(j\omega) \right\} \underline{p}^0 \geq \hat{\mu}_0^2 \underline{\hat{p}}^{0T} \underline{\hat{p}}^0, \quad \forall \omega > 0$$

$$\begin{aligned}
\underline{p}^{0T} \left\{ A^T(j\omega) \left[ \hat{A}(j\omega) \hat{A}^T(j\omega) \right]^{-1} A(j\omega) \right\} \underline{p}^0 &\geq \hat{\mu}_0^2 \underline{p}^{0T} \hat{p}^0 + \hat{\mu}_0^2 - \hat{\mu}_0^2, \quad \forall \omega > 0 \\
\underline{p}^{0T} \left\{ A^T(j\omega) \left[ \hat{A}(j\omega) \hat{A}^T(j\omega) \right]^{-1} A(j\omega) \right\} \underline{p}^0 &\geq \hat{\mu}_0^2 \underline{p}^{0T} \underline{p}^0 - \hat{\mu}_0^2, \quad \forall \omega > 0 \\
\underline{p}^{0T} \left\{ \hat{\mu}_0^2 I - A^T(j\omega) \left[ \hat{A}(j\omega) \hat{A}^T(j\omega) \right]^{-1} A(j\omega) \right\} \underline{p}^0 &\leq \hat{\mu}_0^2, \quad \forall \omega > 0.
\end{aligned}$$

que representa a condição imposta pela inequação (2.38).

Para completar a prova é necessário considerar o caso em que  $\omega = 0$ . Neste caso, a equação (2.40) pode ser escrita como:

$$\left[ a_1(0) \quad a_2(0) \quad \dots \quad a_{l-1}(0) \right] \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_{l-1} \end{bmatrix} = -\delta(0, \underline{p}^0), \quad (2.44)$$

e o polinômio característico em malha fechada pode ser escrito como:

$$\delta(0, \underline{p}^0) = \left[ a_1(0) \quad a_2(0) \quad \dots \quad a_l(0) \right] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_l \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Porém, conforme visto anteriormente o termo  $a_l(0)$  é igual a zero e a equação (2.45) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\delta(0, \underline{p}^0) = \left[ a_1(0) \quad a_2(0) \quad \dots \quad a_{l-1}(0) \right] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{l-1} \end{bmatrix} = \hat{\underline{a}}(0) \hat{\underline{p}}^0. \quad (2.46)$$

Portanto, de acordo com a equação (2.16):

$$\hat{\underline{a}}(0) \Delta \hat{\underline{q}} = -\hat{\underline{a}}(0) \hat{\underline{p}} \Rightarrow \Delta \hat{\underline{q}} = -\hat{\underline{a}}^T(0) \left[ \hat{\underline{a}}(0) \hat{\underline{a}}^T(0) \right]^{-1} \hat{\underline{a}}(0) \hat{\underline{p}}^0. \quad (2.47)$$

Então, a margem de estabilidade paramétrica relativa  $\hat{\mu}$  será maior ou igual que um dado  $\hat{\mu}_0 > 0$  somente se

$$\|\Delta \hat{\underline{q}}\|_2^2 \geq \hat{\mu}_0^2 \|\hat{\underline{p}}^0\|_2^2, \quad \omega = 0, \quad (2.48)$$

ou equivalentemente,

$$\underline{\hat{p}}^{0T} \left\{ \hat{\underline{a}}^T(0) \left[ \hat{\underline{a}}(0) \hat{\underline{a}}^T(0) \right]^{-1} \hat{\underline{a}}(0) - \hat{\mu}_0^2 \right\} \underline{\hat{p}}^0 \geq 0, \quad \omega = 0. \quad (2.49)$$

□

O teorema 2.8 será útil no momento em que for necessário definir se um vetor pertencente à uma região de estabilidade no espaço de parâmetros do controlador possui margem de estabilidade paramétrica relativa maior ou igual que um dado  $\hat{\mu}_0$ . Para ilustrar a sua utilidade a seguir um exemplo será apresentado.

**Exemplo 2.3** *Considere as funções de transferência da planta e do controlador, respectivamente, dadas por:*

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2}$$

e

$$K(s) = \frac{12s + 12}{s - 7}.$$

*Suponha que se deseja saber se o controlador  $K(s)$  possui margem de estabilidade paramétrica relativa maior ou igual a  $\hat{\mu}_0 = 0,049$ . Realizando o cálculo da margem de estabilidade paramétrica relativa obtém-se  $\hat{\mu} \approx 0,04865$  e um tempo médio gasto para a sua obtenção de 3,63 segundos. Aplicando o resultado do teorema 2.8 para a mesma quantidade de frequências o tempo obtido foi de 0,05 segundos, i.e., 72,6 vezes menor que o tempo necessário para calcular a margem de estabilidade paramétrica relativa.* □

Para os casos em que  $G(s)$  é biprópria é necessário, para cálculo da margem de estabilidade paramétrica, ainda considerar a possibilidade de perda de grau do polinômio característico em malha fechada, o que leva ao teorema a seguir.

**Teorema 2.9** *Suponha válidas as hipóteses do teorema 2.8 e considere  $G(s)$ , a função de transferência da planta, biprópria. Então o sistema em malha fechada tem margem de estabilidade paramétrica relativa  $\hat{\mu}$  maior ou igual a  $\hat{\mu}_0 > 0$  se e somente se as três condições forem verificadas:*

$$(a) \quad \underline{p}^{0T} \left\{ \hat{\mu}_0^2 I - A^T(j\omega) \left[ \hat{A}(j\omega) \hat{A}^T(j\omega) \right]^{-1} A(j\omega) \right\} \underline{p}^0 \leq \hat{\mu}_0^2, \quad \forall \omega > 0 \quad (2.50)$$

$$(b) \quad \underline{\hat{p}}^{0T} \left\{ \hat{\underline{a}}^T(0) \left[ \hat{\underline{a}}(0) \hat{\underline{a}}^T(0) \right]^{-1} \hat{\underline{a}}(0) - \hat{\mu}_0^2 \right\} \underline{\hat{p}}^0 \geq 0, \quad \omega = 0. \quad (2.51)$$

$$(c) \quad \underline{p}^{0T} \left[ \hat{\mu}_0^2 - \underline{a}_n^T \left( \hat{\underline{a}}_n \hat{\underline{a}}_n^T \right)^{-1} \underline{a}_n \right] \underline{p}^0 \leq \hat{\mu}_0^2 \quad (2.52)$$

**Prova.** As demonstrações das inequações (2.50) e (2.51) são idênticas às obtidas no teorema 2.8. O fato de  $G(s)$  ser biprópria insere mais um condição para que a margem de estabilidade paramétrica relativa  $\hat{\mu}$  seja maior ou igual a  $\hat{\mu}_0$ , expressa pela condição (2.52), que representa a possibilidade de perda de grau do polinômio característico em malha fechada. Para provar esta nova condição basta seguir os passos para o caso em que  $\omega > 0$  no teorema 2.8, substituir  $A(j\omega)$  por  $\underline{a}_n$  obtido na equação (2.22) e definir  $\hat{\underline{a}}_n$  o vetor composto dos  $l - 1$  primeiros elementos de  $\underline{a}_n$ .  $\square$

Nos casos em que todos os coeficientes de  $K(s)$  podem variar, a solução para o problema é similar ao caso em que o coeficiente de maior grau do denominador de  $K(s)$  é fixo, conforme mostrado a seguir.

**Teorema 2.10** *Considere que todos os coeficientes de  $K(s)$  podem variar. Então o sistema em malha fechada tem margem de estabilidade paramétrica relativa  $\mu$  maior ou igual que um dado  $\mu_0 > 0$  se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

$$(a) \quad \underline{p}^{0T} \left\{ A^T(j\omega) [A(j\omega)A^T(j\omega)]^{-1} A(j\omega) - \mu_0^2 I \right\} \underline{p}^0 \geq 0, \quad \omega > 0. \quad (2.53)$$

$$(b) \quad \underline{p}^{0T} \left\{ \underline{a}^T(0) [\underline{a}(0)\underline{a}^T(0)]^{-1} \underline{a}(0) - \mu_0^2 \right\} \underline{p}^0 \geq 0, \quad \omega = 0. \quad (2.54)$$

$$(c) \quad \underline{p}^{0T} \left[ \underline{a}_n^T (\underline{a}_n \underline{a}_n^T)^{-1} \underline{a}_n - \mu_0^2 \right] \underline{p}^0 \geq 0. \quad (2.55)$$

**Prova.** Procedendo de maneira idêntica às provas dos teoremas 2.8 e 2.9, facilmente encontra-se as condições expressas pelas inequações (2.53), (2.54) e (2.55).  $\square$

Através do cálculo da margem de estabilidade paramétrica é possível encontrar a perturbação de menor módulo que ocasiona a perda de estabilidade do sistema em malha fechada. Este fato sugere então que qualquer outra perturbação sobre o vetor de parâmetros nominal do controlador,  $\underline{p}^0$ , que também ocasione a perda de estabilidade do sistema realimentado terá maior módulo que a obtida no cálculo da margem de estabilidade paramétrica. Isto significa que o controlador nominal pode sofrer ajustes, maiores do que aquele fornecido pela margem de estabilidade paramétrica, desde que perturbado em direções diferentes daquela que leva à margem de estabilidade paramétrica. Portanto, um resultado significativo seria encontrar o quanto pode-se perturbar  $\underline{p}^0$  em uma dada direção sem perda de estabilidade. Este é o propósito do teorema a seguir.

**Teorema 2.11** *Seja  $K(s, \underline{p}^0)$  um controlador que estabiliza uma dada planta  $G(s)$  e defina  $\Delta \underline{p}_i = \underline{p}_i \alpha$ , onde  $\|\underline{p}_i\|_2 = 1$ , o vetor representativo da perturbação sobre  $\underline{p}^0$ . Então, o valor máximo de  $\alpha$ , denotado por  $\alpha^*$ , tal que o sistema realimentado permanece estável é determinado como  $\alpha^* = \min\{\alpha, \alpha_0, \alpha_d\}$ , onde  $\alpha$  satisfaz a equação  $y(j\omega) + A(j\omega)\underline{p}_i \alpha = 0$  para algum  $\omega > 0$ ,  $\alpha_0$  satisfaz  $\delta(0, \underline{p}^0) + \underline{a}(0)\underline{p}_i \alpha_0 = 0$  e  $\alpha_d$  é tal que  $\delta_n(\underline{p}^0) + \underline{a}_n \underline{p}_i \alpha_d = 0$ .*

**Prova.** Note que, ao vetor de perturbação  $\Delta \underline{p}_i$  sempre se pode associar um vetor de coordenadas  $\underline{p}_i$  especificando uma determinada direção no espaço de parâmetros multiplicado por um valor constante positivo  $\alpha$ . Isto é,

$$\Delta \underline{p}_i = \underline{p}_i \alpha, \|\underline{p}_i\|_2 = 1. \quad (2.56)$$

Desta forma, o objetivo deste teorema é encontrar o maior valor de  $\alpha$ , denotado por  $\alpha^*$ , para um vetor de coordenadas fixo  $\underline{p}_i$ , tal que o sistema em malha fechada seja estável. Para resolver este problema note que, substituindo a equação (2.56) em (2.15) obtém-se:

$$A(j\omega)\Delta \underline{p} = A(j\omega)\underline{p}_i \alpha = -\underline{y}(j\omega) \quad (2.57)$$

e, portanto,

$$y(j\omega) + A(j\omega)\underline{p}_i \alpha = 0, \quad (2.58)$$

deve ser satisfeita para perda de estabilidade do sistema realimentado. Desta forma, crescendo gradativamente  $\alpha$  até satisfazer (2.58) para algum  $\omega > 0$  e para um dado vetor  $\underline{p}_i$ , é possível determinar  $\alpha$ . Observe que para os casos em que o vetor  $\underline{p}_i$  pertence ao espaço nulo da matriz  $A(j\omega_0)$  para uma dada frequência  $\omega_0$ , a equação (2.58) é inconsistente e  $\alpha(j\omega_0) \rightarrow +\infty$ .

Procedendo de maneira análoga para os casos em que  $\omega = 0$  e em que há possibilidade de perda de grau do polinômio característico em malha fechada, obtém-se, respectivamente,  $\alpha_0$  e  $\alpha_d$ . O valor de  $\alpha^*$  é então determinado como  $\alpha^* = \min\{\alpha, \alpha_0, \alpha_d\}$ .  $\square$

Para ilustrar o resultado dado pelo teorema 2.11, será apresentado a seguir um exemplo em que a região de estabilidade no espaço de parâmetros do controlador pertence a  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemplo 2.4** *Seja a função de transferência da planta  $G(s)$  dada por:*

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2},$$

*e seja também  $K(s)$  um controlador arbitrário que estabiliza este sistema (Keel e Bhattacharyya, 1997, exemplo 2) dado por:*

$$K(s) = \frac{11,44974739s + 11,24264066}{s - 7,03553383}.$$

*Encontre o quanto podem ser variados os parâmetros do controlador  $K(s)$ , considerando o coeficiente de maior grau do denominador do controlador fixo, na direção dada pelo seguinte vetor:*

$$p_i = [ 0,9802 \quad 0,14 \quad -0,14 ].$$

*Construindo o vetor  $\hat{p}^0$ , com os coeficientes do numerador e denominador de  $K(s)$ , obtém-se:*

$$\hat{p}^0 = [ 11,24264066 \quad 11,44974739 \quad -7,03553383 ].$$

*Seguindo os passos do procedimento 2.1 a margem de estabilidade paramétrica relativa para o controlador acima é dada por:*

$$\hat{\mu} = 0,07219317556675,$$

*e o correspondente vetor representativo da perturbação sobre  $\hat{p}^0$ ,  $\Delta\hat{p}$ , é:*

$$\Delta\hat{p} = [ 0,5656854 \quad 0 \quad 1,1313708 ].$$

*Variando-se  $\alpha$  gradativamente até que a equação (2.58) seja satisfeita e procedendo de maneira análoga para  $\omega = 0$  obtém-se:*

$$\alpha^* = 4,03880381.$$

*Desta forma, o vetor  $\Delta p_i$ , da perturbação na direção dada por  $p_i$  encontrado foi:*

$$\Delta p_i = [ 3,95881958 \quad 0,56554565 \quad -0,56554565 ],$$

*que corresponde a uma variação relativa percentual nos parâmetros do controlador de aproximadamente 23,05% que é muito maior que a dada pela margem de estabilidade paramétrica relativa (aproximadamente 7,22%).* □

## 2.3 Conclusões

O objetivo principal deste capítulo foi apresentar um estudo detalhado sobre a margem de estabilidade paramétrica, além de mostrar alguns resultados interessantes e originais que serão úteis no decorrer deste trabalho.

## Capítulo 3

# Redução da ordem de controladores robustos $H_\infty$

A proposta deste capítulo é mostrar que a redução da ordem de controladores  $H_\infty$ , obtidos via Youla-Kucera na resolução de problemas de 1-bloco, pode ser em alguns casos satisfatoriamente feita por truncamento balanceado. Para tanto, alguns fundamentos da teoria de controle robusto são revistos e um método para obtenção destes controladores, descrito em Francis (1987) será considerado com maior detalhe.

O presente capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 3.1 um algoritmo robusto (Garcia e Basilio, 2000) para a realização de redução por truncamento balanceado de modelos é revisto; na seção 3.2 fundamentos básicos da teoria de controle robusto são apresentados e é descrito um método para obtenção destes controladores; na seção 3.3 expressões analíticas para os controladores são obtidas e amplamente analisadas; finalmente, na seção 3.4 é mostrado que a redução por truncamento balanceado pode ser satisfatoriamente feita para os controladores obtidos para plantas com funções de transferência estritamente próprias.

### 3.1 Redução da ordem de modelos por truncamento balanceado

A redução de modelos por truncamento balanceado é uma forma padrão de redução de modelos e a sua realização consiste em se medir os graus de controlabilidade e observabilidade dos modos de um sistema e, em seguida, eliminar aqueles modos pouco controláveis ou pouco observáveis. Para sistemas monovariáveis, que será

o caso dos problemas considerados neste trabalho, modos pouco controláveis ou observáveis são aqueles praticamente canceláveis do numerador e denominador do modelo.

Um método para obtenção da redução da ordem de um modelo por truncamento balanceado, para uma realização por espaço de estados não-mínima é apresentado em Garcia e Basilio (2000). Neste método duas matrizes retangulares são construídas tais que a menor dimensão de ambas corresponde ao número de valores singulares de Hankel a serem mantidos no modelo de ordem reduzida. Um procedimento para a obtenção dessas matrizes é descrito no seguinte algoritmo (Garcia e Basilio, 2000).

**Algoritmo 3.1** *Seja  $G(s)$  uma função de transferência racional, própria e estável, com realização por espaço de estados não-mínima dada por:*

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline \underline{c} & d \end{array} \right].$$

*Então, o modelo de ordem reduzida  $\tilde{G}(s)$  pode ser obtido da seguinte forma:*

PASSO 1: *Calcule os gramianos de controlabilidade e observabilidade,  $W_c$  e  $W_o$ , respectivamente, mediante a resolução das equações de Lyapunov:*

$$AW_c + W_cA^T = -\underline{b}\underline{b}^T$$

$$A^TW_o + W_oA = -\underline{c}^T\underline{c}.$$

PASSO 2: *Obtenha a decomposição em valores singulares de  $W_c$  e  $W_o$ ,*

$$W_c = U_c\Lambda_cU_c^T \quad e \quad W_o = U_o\Lambda_oU_o^T$$

*respectivamente, e encontre*

$$W_c^{1/2} = U_c\Lambda_c^{1/2}U_c^T \quad e \quad W_o^{1/2} = U_o\Lambda_o^{1/2}U_o^T.$$

PASSO 3: *Calcule a decomposição por valores singulares do produto  $W_o^{1/2}W_c^{1/2}$  e a particione da seguinte forma:*

$$W_o^{1/2}W_c^{1/2} = \begin{bmatrix} X_L & X_S & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_L & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_L^T \\ Y_S^T \\ Y_2^T \end{bmatrix}$$

onde  $\Sigma_L = \text{diag}\{\sigma_1 I_{m_1}, \sigma_2 I_{m_2}, \dots, \sigma_{\bar{r}} I_{m_{\bar{r}}}\}$  e  $\Sigma_S = \text{diag}\{\sigma_{\bar{r}+1} I_{m_{\bar{r}+1}}, \sigma_{\bar{r}+2} I_{m_{\bar{r}+2}}, \dots, \sigma_{\bar{k}} I_{m_{\bar{k}}}\}$  são formados pelos valores singulares de Hankel a serem mantidos e descartados, respectivamente.

PASSO 4: Calcule

$$T_L = \Sigma_L^{-1/2} X_L^T W_o^{1/2} \quad e \quad T_L^\dagger = W_c^{1/2} Y_L \Sigma_L^{-1/2}.$$

PASSO 5: Obtenha o modelo de ordem reduzida  $\tilde{G}(s)$ :

$$\tilde{G}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} T_L A T_L^\dagger & T_L \underline{b} \\ \hline \underline{c} T_L^\dagger & d \end{array} \right]. \quad (3.1)$$

□

Este algoritmo além de ser uma maneira simples de se realizar a redução de ordem para um modelo, ainda é uma maneira robusta, uma vez que é baseado em decomposições por valores singulares. Outro importante fato a ser considerado é que o erro entre o modelo de ordem reduzida  $\tilde{G}(s)$  e a planta  $G(s)$  é menor ou igual a  $2(\sigma_{\bar{r}+1} + \sigma_{\bar{r}+2} + \dots + \sigma_{\bar{k}})$ , ou seja,

$$e = \|G - \tilde{G}\|_\infty \leq 2(\sigma_{\bar{r}+1} + \sigma_{\bar{r}+2} + \dots + \sigma_{\bar{k}}),$$

onde  $(\sigma_{\bar{r}+1}, \sigma_{\bar{r}+2}, \dots, \sigma_{\bar{k}})$  são os valores singulares de Hankel a serem descartados. Portanto, para modos pouco controláveis ou observáveis a serem eliminados,  $\tilde{G}(s)$  e  $G(s)$  têm resposta em frequência próximas. Esta é uma das principais motivações para a utilização da redução por truncamento balanceado.

**Observação 3.1** Conforme descrito em Zhou et al. (1999) o algoritmo 3.1 pode ser usado em funções de transferência instáveis desde que aplicado aos pólos estáveis.

□

## 3.2 Teoria de controle robusto $H_\infty$

Nesta seção alguns fundamentos da teoria de controle robusto  $H_\infty$  são revistos e um método para obtenção destes controladores, descrito em Francis (1987) será considerado com maior detalhe.

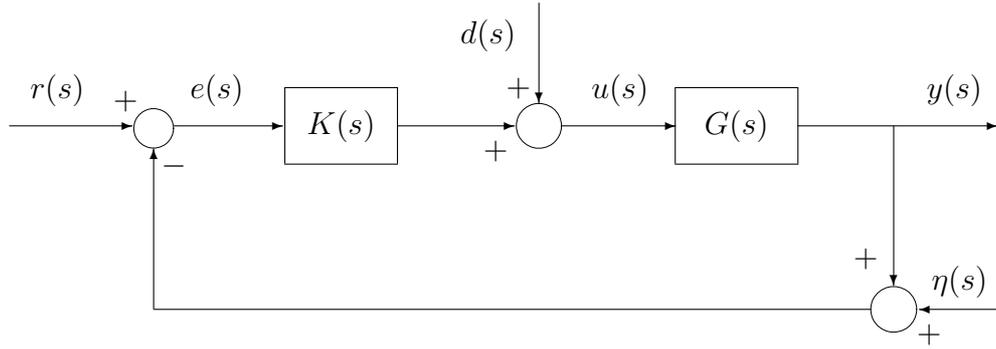


Figura 3.1: Diagrama de blocos de uma planta sujeita à perturbações

### 3.2.1 Estabilidade interna

Considere o sistema realimentado da figura 3.1, onde  $r(s)$  é o sinal de referência,  $d(s)$  é o sinal de perturbação,  $\eta(s)$  é o sinal de ruído introduzido pelo sensor,  $y(s)$  é o sinal de saída e  $G(s)$  e  $K(s)$  são as funções de transferência da planta e do controlador, respectivamente. Suponha inicialmente que se deseja obter condições para a estabilidade deste sistema. Para tanto, considere o sistema da figura 3.2.

**Definição 3.1** *Sejam*

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline \underline{c} & d \end{array} \right] \quad e \quad K(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{\underline{b}} \\ \hline \hat{\underline{c}} & \hat{d} \end{array} \right] \quad (3.2)$$

realizações de ordem mínima e  $(\underline{x}, \hat{\underline{x}})$  o vetor de estados da planta e do controlador, respectivamente. Então, o sistema da figura 3.2 é internamente estável se e somente se os estados  $(\underline{x}, \hat{\underline{x}}) \rightarrow 0$  a partir de qualquer condição inicial  $(\underline{x}_0, \hat{\underline{x}}_0)$  dada quando  $u_1(t) = 0$  e  $u_2(t) = 0$ .  $\square$

O sistema realimentado da figura 3.2 pode também ser descrito em termos de matrizes de transferência por

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ G & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Portanto, se o sistema realimentado da figura 3.2 é internamente estável, então  $(\underline{x}, \hat{\underline{x}}) \rightarrow 0$  quando  $u_1(t) = 0$  e  $u_2(t) = 0$  e portanto para todas entradas limitadas  $(u_1, u_2)$  as saídas  $(e_1, e_2)$  serão limitadas. Desta forma, pode-se enunciar o

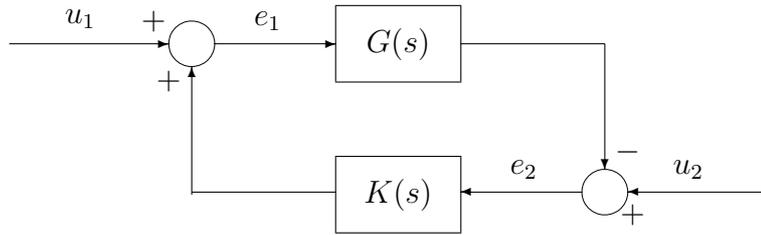


Figura 3.2: Diagrama de blocos para análise de estabilidade interna

seguinte resultado definindo estabilidade interna para a representação por matrizes de transferência.

**Lema 3.1** *O sistema da figura 3.2 é internamente estável se e somente se a matriz de transferência*

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ G & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I - K(I + GK)^{-1}G & K(I + GK)^{-1} \\ -(I + GK)^{-1}G & (I + GK)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

que relaciona  $(u_1, u_2)$  a  $(e_1, e_2)$  pertence a  $RH_\infty$ .

**Prova.** Ver Zhou et al. (1996, pag.122).  $\square$

Portanto, pelo lema 3.1, para verificar a estabilidade interna do sistema da figura 3.2 deve-se verificar se as quatro matrizes de transferência da equação (3.4) pertencem a  $RH_\infty$ . O lema anterior também implica no importante resultado a seguir.

**Teorema 3.1** *O sistema realimentado da figura 3.2 será internamente estável se e somente se o sistema da figura 3.1 for internamente estável.*

**Prova.** Basta notar que  $u_2(s) = r(s) - \eta(s)$  e  $u_1(s) = d(s)$ .  $\square$

Com o conceito de estabilidade interna desenvolvido é conveniente agora estudar outros objetivos de projeto de controladores robustos  $H_\infty$ .

### 3.2.2 Objetivos de projeto

Os objetivos de projeto constituem os requisitos que uma função de transferência em malha fechada deve atender. Estes objetivos são, além da estabilidade, (i) baixa sensibilidade a perturbação nos parâmetros da função de transferência da planta

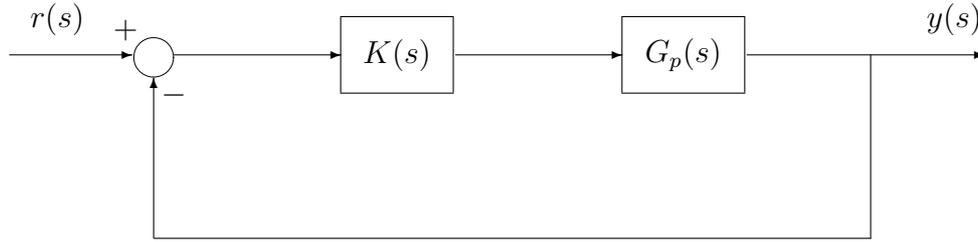


Figura 3.3: Diagrama de blocos para uma planta com incerteza

(robustez); (ii) rastreamento de sinais e desempenho transitório; (iii) rejeição de perturbação; (iv) e atenuação de ruído. A seguir cada um destes objetivos será apresentado.

**(i) Robustez**

Considere o sistema realimentado da figura 3.3, onde  $G_p(s)$  representa a função de transferência da planta com perturbação e  $K(s)$  a função de transferência do controlador a ser calculada. Considere também que  $G(s)$  é a função de transferência da planta nominal e que a perturbação sobre  $G(s)$  pode ser de dois tipos: (i) aditiva onde  $G_p(s) = G(s) + \Delta_a(s)$ ; (ii) ou multiplicativa onde  $G_p(s) = [I + \Delta_m(s)] G(s)$  (neste trabalho somente será considerado o problema de perturbação aditiva). Portanto, supondo que  $G(s)$  e  $G_p(s)$  possuem o mesmo número de pólos instáveis e definindo  $\delta(j\omega)$  uma função real não-negativa tal que  $\delta(j\omega) \geq \bar{\sigma}[\Delta_a(j\omega)]$ ,  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ , o problema de estabilidade robusta pode ser formulado da seguinte forma: encontre  $K(s)$  tal que o sistema em malha fechada da figura 3.3 seja internamente estável para  $G_p(s)$  pertencente a uma família de plantas  $\mathcal{P}$  definida como

$$\mathcal{P} = \{G_p(s) = G(s) + \Delta_a(s) : |\Delta_a(j\omega)| \leq \delta(j\omega), \omega \in \mathbb{R}\}. \quad (3.5)$$

Para solucionar este problema é necessário apresentar o seguinte resultado:

**Teorema 3.2 (Teorema do pequeno ganho)**

Um controlador  $K(s)$  estabiliza todas as plantas  $G_p(s) \in \mathcal{P}$  se e somente se  $K(s)$

estabiliza  $G(s)$  e

$$\|\Delta_a K (I + GK)^{-1}\|_\infty < 1. \quad (3.6)$$

**Prova.** Ver Doyle e Stein (1981) e Vidyasagar (1985).  $\square$

Supondo agora que  $\|\Delta_a\|_\infty \leq \delta_M$  e utilizando o teorema do pequeno ganho pode-se formular o problema de estabilidade robusta como um problema de maximização da tolerância a incertezas no modelo. Isto pode ser feito a partir da seguinte condição suficiente:

$$\|\Delta_a K (I + GK)^{-1}\|_\infty \leq \|\Delta_a\|_\infty \|K (I + GK)^{-1}\|_\infty \leq \delta_M \|K (I + GK)^{-1}\|_\infty < 1,$$

e, portanto, um problema  $H_\infty$  para a estabilidade robusta pode ser enunciado da seguinte forma:

**Problema 1:**

$$\max_{K(s) \text{ est } G(s)} \delta_M = \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|K (I + GK)^{-1}\|_\infty = \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|KS\|_\infty, \quad (3.7)$$

onde  $S(s) = (I + GK)^{-1}$  é a função de sensibilidade.

## (ii) Rastreamento de sinais e desempenho transitório

Considere o sistema realimentado da figura 3.1 e suponha que os sinais de ruído,  $\eta(t)$ , produzido pelos sensores e de perturbação,  $d(t)$ , sejam ambos identicamente nulos, isto é,  $\eta(t) = 0$  e  $d(t) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ . Desta forma, o objetivo de rastreamento de uma classe de sinais  $r(t) \in l_2$  pode ser considerado a partir do seguinte problema de otimização:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \max_{\|r\|_2=1} \frac{\|e\|_2}{\|r\|_2}. \quad (3.8)$$

Como a função de transferência entre a entrada  $r(s)$  e a saída  $e(s)$  é igual a

$$T_{re}(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1}, \quad (3.9)$$

então a equação (3.8) pode ser reescrita como

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \max_{\|r\|_2=1} \frac{\|T_{re}r\|_2}{\|r\|_2}. \quad (3.10)$$

Pela propriedade da norma induzida, a equação (3.10) é equivalente a

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|T_{re}\|_{\infty}. \quad (3.11)$$

Portanto, o problema de controle ótimo  $H_{\infty}$  para rastreamento de sinais e desempenho transitório pode ser formulado como:

**Problema 2:**

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|(I + GK)^{-1}\|_{\infty} = \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|S\|_{\infty}, \quad (3.12)$$

onde  $S(s)$  é a função de sensibilidade.

### (iii) Rejeição de perturbação

Suponha agora que no sistema da figura 3.1 tem-se  $r(t) = 0$  e  $\eta(t) = 0$ . Então o objetivo de rejeição de perturbação para a classe dos sinais  $l_2$  pode ser considerado a partir do seguinte problema de otimização:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \max_{\|d\|_2=1} \frac{\|y\|_2}{\|d\|_2}. \quad (3.13)$$

A solução deste problema é semelhante à do caso anterior, e portanto, uma vez que a equação (3.13) pode ser reescrita como:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \max_{\|d\|_2=1} \frac{\|T_{dy}d\|_2}{\|d\|_2} \quad (3.14)$$

onde

$$T_{dy}(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1} G(s). \quad (3.15)$$

Assim sendo, o problema de otimização  $H_{\infty}$  para rejeição de perturbação é dado por:

**Problema 3:**

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|(I + GK)^{-1}G\|_{\infty} = \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|SG\|_{\infty}. \quad (3.16)$$

### (iv) Atenuação de ruído

Supondo que  $r(t) = 0$  e  $d(t) = 0$ , então o objetivo de atenuação de ruído para a classe de sinais  $l_2$  pode ser resolvido através do seguinte problema de otimização:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \max_{\|\eta\|_2=1} \frac{\|y\|_2}{\|\eta\|_2} \quad (3.17)$$

Como a função de transferência de  $\eta(s)$  para  $y(s)$  é dada por

$$T_{\eta y}(s) = -[I + G(s)K(s)]^{-1} G(s)K(s), \quad (3.18)$$

e, utilizando a propriedade da norma induzida, a equação (3.17) pode ser reescrita como:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \max_{\|\eta\|_2=1} \frac{\|T_{\eta y}\eta\|_2}{\|\eta\|_2} = \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|T_{\eta y}\|_{\infty}. \quad (3.19)$$

Desta forma o problema  $H_{\infty}$  de atenuação de ruído é formulado como:

**Problema 4:**

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|(I + GK)^{-1} GK\|_{\infty} = \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|T\|_{\infty}. \quad (3.20)$$

onde  $T(s)$  é denominada função de sensibilidade complementar, uma vez que  $T(s) + S(s) = I$ .

Sabe-se, da teoria de controle robusto, que os quatro objetivos de projeto, representados pela minimização de  $\|KS\|_{\infty}$ ,  $\|S\|_{\infty}$ ,  $\|SG\|_{\infty}$  e  $\|T\|_{\infty}$ , são conflitantes. Desta forma, para os casos em que há a necessidade de simultaneamente considerar mais de um objetivo de projeto é usual a introdução de funções de ponderação. Esta medida pode ser tomada pois os problemas de controle robusto  $H_{\infty}$  ocorrem em faixas de frequência distintas conforme apresentado na tabela 3.1. Para exemplificar este fato considere o problema de simultaneamente atenuar o ruído introduzido pelo sensor e rastrear o sinal de referência e melhorar o desempenho transitório. Este problema pode ser formulado em termos do seguinte problema de otimização:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \left\| \begin{bmatrix} W_1 T \\ W_2 S \end{bmatrix} \right\|_{\infty},$$

onde  $W_1(s)$  e  $W_2(s)$  são as funções de ponderação conforme a tabela 3.1.

Objetivo	Faixa de frequência
Rastreamento	Baixa
Rejeição de perturbação	Baixa
Atenuação de ruído	Alta
Estabilidade Robusta	Alta

Tabela 3.1: Faixas de frequência para os diferentes objetivos de projeto

### 3.2.3 Parametrização de Youla-Kucera

Nesta subseção será obtida uma parametrização de todos os controladores estabilizantes. Para tanto, sejam

$$G(s) = N(s)M^{-1}(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \quad (3.21)$$

e

$$K(s) = U(s)V^{-1}(s) = \tilde{V}^{-1}(s)\tilde{U}(s) \quad (3.22)$$

fatorações duplamente coprimas de  $G(s)$  e  $K(s)$  em  $RH_\infty$ . Então o seguinte resultado pode ser enunciado.

#### Teorema 3.3 (Parametrização de Youla-Kucera)

Sejam  $X(s)$ ,  $Y(s)$ ,  $\tilde{X}(s)$  e  $\tilde{Y}(s)$  matrizes de transferência pertencentes a  $RH_\infty$  e que satisfazem a identidade de Bezout generalizada:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) \\ \tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & Y(s) \\ -N(s) & X(s) \end{bmatrix} = I. \quad (3.23)$$

Então, a classe de todos os controladores  $K(s)$  que estabilizam  $G(s)$  pode ser descrita como:

$$\begin{aligned} K(s) &= U(s)V^{-1}(s) = \tilde{V}^{-1}(s)\tilde{U}(s) \\ &= [Y(s) + M(s)Q(s)][X(s) - N(s)Q(s)]^{-1} \\ &= [\tilde{X}(s) - Q(s)\tilde{N}(s)]^{-1} [\tilde{Y}(s) + Q(s)\tilde{M}(s)] \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde  $Q(s) \in RH_\infty$ .

**Prova.** Ver Francis (1987, pag. 37). □

Uma vez obtida a parametrização de todos os controladores estabilizantes  $K(s)$  é necessário apresentar agora uma metodologia de projeto de controladores robustos  $H_\infty$  que atendam aos objetivos apresentados na subseção 3.2.2.

### 3.2.4 Problema de Nehari

Para resolver os problemas de controle robusto  $H_\infty$  apresentados na subseção 3.2.2 é necessário inicialmente reduzi-los a um problema de ajuste de modelos e, em seguida, transformá-lo em um problema de Nehari de 1-, 2- ou 4-blocos. O problema de casamento de modelos consiste em, dados  $T'_1(s)$ ,  $T'_2(s)$  e  $T'_3(s) \in RH_\infty$ , encontrar  $Q(s) \in RH_\infty$  tal que  $\|T'_1 - T'_2QT'_3\|_\infty$  seja mínima, isto é,

$$\min_{Q(s) \in RH_\infty} \|T'_1 - T'_2QT'_3\|_\infty.$$

Neste trabalho, de agora em diante, apenas sistemas monovariáveis como aqueles apresentados em Keel e Bhattacharyya (1997) serão abordados e portanto, o problema de casamento de modelos pode ser reescrito como:

$$\min_{Q(s) \in RH_\infty} \|T'_1 - T'_2QT'_3\|_\infty = \min_{Q(s) \in RH_\infty} \|T_1 - T_2Q\|_\infty,$$

onde  $T_1(s) = T'_1(s)$  e  $T_2(s) = T'_2(s)T'_3(s)$ . Além disso, para o caso monovariável  $\tilde{M}(s) = M(s)$ ,  $\tilde{N}(s) = N(s)$ ,  $\tilde{X}(s) = X(s)$  e  $\tilde{Y}(s) = Y(s)$ .

Para reduzir os quatro objetivos de projeto da subseção 3.2.2 na forma de problemas de ajuste de modelos é preciso antes obter expressões para a função de sensibilidade  $S(s)$  e para a função de sensibilidade complementar  $T(s)$  em função do parâmetro  $Q(s)$ . Após manipulações algébricas envolvendo a equação (3.24) obtém-se:

$$S(s) = [X(s) - N(s)Q(s)] M(s) \tag{3.25}$$

e

$$T(s) = Y(s)N(s) + N(s)Q(s)M(s). \tag{3.26}$$

Desta forma, os problemas de otimização transformam-se em:

**(i) Robustez (perturbação aditiva)**

Considerando  $K(s) = [Y(s) + M(s)Q(s)][X(s) - N(s)Q(s)]^{-1}$  (equação 3.24) então

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|W_1 K S\|_\infty = \min_{Q(s) \in RH_\infty} \|W_1 (Y + M Q) M\|_\infty = \min_{Q(s) \in RH_\infty} \|T_1 - T_2 Q\|_\infty,$$

onde

$$T_1(s) = W_1(s)Y(s)M(s) \text{ e } T_2(s) = -W_1 M^2(s). \quad (3.27)$$

**(ii) Rastreamento de sinais e desempenho transitório**

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|W_2 S\|_\infty = \min_{Q(s) \in RH_\infty} \|W_2 X M - W_2 N M Q\|_\infty = \min_{Q(s) \in RH_\infty} \|T_1 - T_2 Q\|_\infty,$$

onde

$$T_1(s) = W_2(s)X(s)M(s) \text{ e } T_2(s) = W_2(s)N(s)M(s). \quad (3.28)$$

**(iii) Rejeição de perturbação**

$$\begin{aligned} \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|W_3 S G\|_\infty &= \min_{Q(s) \in RH_\infty} \|W_3 (X M - N Q M) M^{-1} N\|_\infty \\ &= \min_{Q(s) \in RH_\infty} \|W_3 X N - W_3 N^2 Q\|_\infty \\ &= \min_{Q(s) \in RH_\infty} \|T_1 - T_2 Q\|_\infty, \end{aligned}$$

onde

$$T_1(s) = W_3(s)X(s)N(s) \text{ e } T_2(s) = W_3(s)N^2(s). \quad (3.29)$$

**(iv) Atenuação de ruído**

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|W_4 T\|_\infty = \min_{Q(s) \in RH_\infty} \|W_4 Y N + W_4 N M Q\|_\infty = \min_{Q(s) \in RH_\infty} \|T_1 - T_2 Q\|_\infty,$$

onde

$$T_1(s) = W_4(s)Y(s)N(s) \text{ e } T_2(s) = -W_4(s)N(s)M(s). \quad (3.30)$$

Uma vez obtidas as expressões acima é possível descrever estes problemas como problemas de Nehari de 1-, 2- ou 4-blocos. Neste trabalho somente serão considerados problemas de 1-bloco. Para transformar o problema de casamento de modelos em um problema de Nehari de 1-bloco é necessário antes apresentar algumas definições.

**Definição 3.2** Uma função  $T_i(s) \in RH_\infty$  é denominada *inner* se  $T_i^*(s)T_i(s) = 1$ , ou seja,  $T_i(-s)T_i(s) = 1$  □

Uma propriedade interessante das funções *inner* é que a norma- $\infty$  do produto de uma função  $G(s)$  qualquer pertencente a  $RL_\infty$  por uma função *inner*  $T_i(s)$  é igual a norma- $\infty$  de  $G(s)$ , isto é,  $\|G\|_\infty = \|T_i G\|_\infty$ .

**Definição 3.3** Uma função  $T_o(s) \in RH_\infty$  é *outer* se não possui zeros com parte real maior do que zero. □

Note que funções *inner* tem simetria entre pólos e zeros com relação ao eixo imaginário, ou seja, se  $z_0$  é um zero então  $p_0 = -z_0$  é um pólo. Observe também que os zeros de uma função *inner* estão todos contidos no semi-plano da direita do plano complexo  $s$ . Por outro lado, os zeros de uma função *outer* estão todos no semi-plano fechado da esquerda do plano complexo  $s$ .

Apresentadas as definições de funções *inner* e *outer*, é possível enunciar o resultado a seguir.

**Lema 3.2** Toda função monovariável  $T(s)$  em  $RH_\infty$  possui uma fatoração *inner-outer*  $T(s) = T_i(s)T_o(s)$ , onde  $T_i(s)$  representa uma função *inner* e  $T_o(s)$  representa uma função *outer*.

**Prova.** Ver Francis (1987, pag. 65). □

Assim sendo, retornando ao problema de ajuste de modelos e realizando uma fatoração *inner-outer* em  $T_2(s)$  obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \|T_1 - T_2 Q\|_\infty &= \|T_1 - T_{2_i} T_{2_o} Q\|_\infty \\
 &= \|T_{2_i} (T_{2_i}^* T_1 - T_{2_o} Q)\|_\infty \\
 &= \|T_{2_i}^* T_1 - T_{2_o} Q\|_\infty \\
 &= \|R - X_S\|_\infty,
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

onde

$$R(s) := T_{2_i}^*(s)T_1(s) \tag{3.32}$$

e

$$X_S(s) := T_{2_o}(s)Q(s). \quad (3.33)$$

O problema de minimizar a equação (3.31) é conhecido como problema de Nehari de 1- bloco. Para tanto, seja  $R(s) \in RL_\infty$  e considere o problema de se determinar a distância de  $R(s)$  ao subespaço  $RH_\infty$ , isto é,

$$\text{dist}(R, RH_\infty) := \inf\{\|R - X_S\|_\infty : X_S \in RH_\infty\}. \quad (3.34)$$

A solução desse problema é dada pelo seguinte teorema.

**Teorema 3.4 (Teorema de Nehari)**

*Existe uma função  $X_S(s) \in RH_\infty$ , tal que*

$$\inf_{X_S(s) \in RH_\infty} \|R - X_S\|_\infty = \|R\|_H,$$

onde  $\|R\|_H$  é a norma de Hankel de  $R(s)$ , cujo cálculo será apresentado no decorrer do texto a seguir.

**Prova.** Ver Francis (1987, pag. 58). □

Pelo teorema 3.4 fica claro que deve-se inicialmente encontrar  $X_S(s) \in RH_\infty$ , ótimo, e, em seguida, utilizando a equação (3.33) obter  $Q(s) \in RH_\infty$ . Neste trabalho, será seguido o método apresentado em Francis (1987), que consiste dos seguintes passos:  
(i) fatore

$$R(s) = R_+(s) + R_-(s),$$

onde  $R_+(s)$  é estritamente própria e anti-estável, e  $R_-(s) \in RH_\infty$ , e, em seguida obtenha uma realização por espaço de estados de ordem mínima para  $R_+(s)$ :

$$R_+(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline \underline{c} & 0 \end{array} \right],$$

onde  $A$  é anti-estável; (ii) encontre os gramianos de controlabilidade,  $L_c$ , e observabilidade,  $L_o$ , resolvendo-se as equações de Lyapunov:

$$AL_c + L_cA^T = BB^T$$

$$A^TL_o + L_oA = C^TC;$$

(iii) obtenha o máximo autovalor  $\lambda_{max}$  de  $L_c L_o$  e o autovetor correspondente  $\underline{w}$  e defina  $\lambda = \lambda_{max}^{1/2}(L_c L_o)$ . Um importante fato a ser observado é que  $\|R\|_H = \lambda$ ; (iv) forme as seguintes funções de transferência:

$$f(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & \underline{w} \\ \underline{c} & 0 \end{array} \right] \quad (3.35)$$

$$g(s) = \left[ \begin{array}{c|c} -A^T & \lambda^{-1} L_o \underline{w} \\ \underline{b}^T & 0 \end{array} \right] \quad (3.36)$$

onde  $f \in RH_2^\perp$  e  $g \in RH_2$ . A definição de  $f(s)$  e de  $g(s)$  acima leva ao seguinte resultado.

**Teorema 3.5** *O menor valor para a solução do problema de ajuste de modelos é dado por  $\|R\|_H = \lambda_{max}^{1/2}(L_c L_o) = \lambda$ , o único e ótimo  $X_S(s) = R(s) - \lambda \frac{f(s)}{g(s)}$ , e, para  $Q(s)$  ótimo,  $|T_1(j\omega) - T_2(j\omega)Q(j\omega)| = \lambda \forall \omega$ .*

**Prova.** Ver Francis (1987, pag. 68). □

Assim sendo, uma vez obtidas as funções  $f(s)$  e  $g(s)$ ,  $X_S(s)$  pode ser diretamente determinada aplicando-se o teorema 3.5. A seguir será apresentado um algoritmo que resume todo o procedimento necessário para solucionar o problema de Nehari de 1-bloco.

### Algoritmo 3.2

PASSO 1: *Faça uma fatoração inner-outer em  $T_2(s)$*

$$T_2(s) = T_{2_i}(s)T_{2_o}(s).$$

PASSO 2: *Defina*

$$R(s) := T_{2_i}^*(s)T_1(s).$$

PASSO 3: *Fatore  $R(s)$  como:*

$$R(s) = R_+(s) + R_-(s),$$

*onde  $R_+(s)$  estritamente própria e anti-estável.*

PASSO 4: *Encontre uma realização de ordem mínima para  $R_+(s)$ :*

$$R_+(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \underline{c} & 0 \end{array} \right].$$

PASSO 5: Resolva as equações de Lyapunov

$$AL_c + L_cA^T = \underline{b}\underline{b}^T$$

$$A^TL_o + L_oA = \underline{c}^T\underline{c}.$$

PASSO 6: Ache o maior autovalor  $\lambda_{max}$  do produto  $L_cL_o$  e o correspondente autovetor  $\underline{w}$ .

PASSO 7: Defina

$$f(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & \underline{w} \\ \hline \underline{c} & 0 \end{array} \right]$$

$$g(s) = \left[ \begin{array}{c|c} -A^T & \lambda^{-1}L_o\underline{w} \\ \hline \underline{b}^T & 0 \end{array} \right]$$

onde  $\lambda = \lambda_{max}^{1/2}(L_cL_o)$ .

PASSO 8:  $X_S(s) = R(s) - \lambda f(s)/g(s)$  e  $Q(s) = T_{2_o}^{-1}(s)X_S(s)$ . □

**Observação 3.2** Obtido  $Q(s)$  ótimo pelo método descrito no algoritmo 3.2 e utilizando a equação (3.24), obtém-se a função de transferência do controlador estabilizante  $K(s)$ . Note que para os casos em que  $T_{2_o}(s)$  é estritamente própria,  $Q(s)$  obtido pelo algoritmo 3.2 é impróprio e  $Q(s) = Q_{imp}(s)$ . Consequentemente  $Q_{imp}(s) \notin RH_\infty$  e a função de transferência do controlador  $K(s)$  é imprópria. Logo, para estes casos é necessário dividir  $Q_{imp}(s)$  por um fator  $(\tau s + 1)^\nu$  para se obter  $Q_\tau(s)$ , onde  $\nu$  é escolhido tal que  $Q_\tau(s)$  seja próprio. Deve ser ressaltado que  $\tau$  é positivo, sendo seu valor escolhido de forma que o fator  $\frac{1}{(\tau s + 1)^\nu}$  abranja a maior faixa de frequência possível; portanto  $\tau$  deve ser feito o menor possível. □

Uma das principais vantagens do método apresentado é a possibilidade de se obter expressões analíticas detalhadas para cada um dos controladores projetados para atender os objetivos da subseção 3.2.2. Este será o assunto da próxima seção.

### 3.3 Controladores robustos $H_\infty$

Nesta seção expressões analíticas para os controladores robustos  $H_\infty$  serão apresentadas para cada objetivo de projeto separadamente. É importante ressaltar que as

expressões analíticas que serão obtidas para os controladores são para os casos em que a solução do problema de Nehari de 1-bloco não é trivial, ou seja,  $R(s)$  não é estável. Definindo  $K_{imp}(s)$  e  $K_\tau(s)$  os controladores obtidos via parametrização de Youla-Kucera (equação 3.24) para  $Q_{imp}(s)$  e  $Q_\tau(s)$ , respectivamente, será mostrado que  $K_{imp}(s)$  tem cancelamentos exatos de pólos e zeros, porém estes cancelamentos não mais ocorrem para  $K_\tau(s)$ , o que torna a ordem de  $K_\tau(s)$  demasiadamente grande.

Para obter as expressões para os controladores  $K_\tau(s)$  e  $K_{imp}(s)$  inicialmente reescreva  $N(s)$  e  $M(s)$ , como:

$$N(s) = \frac{n_n(s)}{d_n(s)} = \frac{n_n^+(s)n_n^-(s)}{d_n(s)} \quad \text{e} \quad M(s) = \frac{n_m(s)}{d_m(s)} = \frac{n_m^+(s)n_m^-(s)}{d_m(s)},$$

onde o sinal de + na parte superior do polinômio significa que ele tem somente zeros instáveis e o sinal de – na parte superior do polinômio significa que ele tem somente zeros estáveis. Sejam também

$$Y(s) = \frac{n_y(s)}{d_y(s)} \quad \text{e} \quad X(s) = \frac{n_x(s)}{d_x(s)},$$

as funções de transferência bipróprias obtidas pela identidade de Bezout (equação 3.23), e

$$f(s) = \frac{n_f(s)}{d_f(s)} \quad \text{e} \quad g(s) = \frac{n_g(s)}{d_g(s)}$$

as funções de transferência definidas pelas equações (3.35) e (3.36). Para simplificar as demonstrações, a dependência das funções em  $s$  será omitida em algumas partes.

### 3.3.1 Robustez (perturbação aditiva)

Para encontrar o controlador ótimo  $K(s)$  que resolve o problema de robustez é necessário inicialmente escrever  $T_1(s)$  e  $T_2(s)$ , de acordo com as equações (3.27), na forma de fração. Fazendo  $W_1(s) = \frac{n_{w_1}(s)}{d_{w_1}(s)}$ , então  $T_1(s)$  e  $T_2(s)$  podem, respectivamente, ser escritos como:

$$T_1(s) = \frac{n_{w_1}n_y n_m^+ n_m^-}{d_{w_1}d_y d_m} \quad \text{e} \quad T_2(s) = -\frac{n_{w_1}(n_m^+)^2(n_m^-)^2}{d_{w_1}d_m^2}. \quad (3.37)$$

O passo seguinte é obter uma fatoração ‘inner-outer’ para  $T_2(s)$ . Lembrando que  $W_1(s)$  é estável e de fase mínima, tem-se:

$$T_2(s) = -\frac{n_{w_1}}{d_{w_1}} \frac{(n_m^+)^2 (n_m^-)^2}{d_m^2} = \underbrace{\frac{(n_m^+)^2}{[(n_m^+)^*]^2}}_{T_{2_i}} (-1) \underbrace{\frac{[(n_m^+)^*]^2 (n_m^-)^2 n_{w_1}}{d_m^2 d_{w_1}}}_{T_{2_o}}$$

e, portanto,

$$T_{2_i}(s) = \frac{(n_m^+)^2}{[(n_m^+)^*]^2} \quad \text{e} \quad T_{2_o}(s) = (-1) \frac{[(n_m^+)^*]^2 (n_m^-)^2 n_{w_1}}{d_m^2 d_{w_1}}. \quad (3.38)$$

Note que, como  $W_1(s)$  e  $M(s)$  são bipróprias então  $T_2(s)$  é biprópria. Portanto,  $T_{2_o}(s)$  é biprópria e  $Q(s)$ , obtida utilizando o algoritmo 3.2, também será própria.

O passo seguinte é obter uma expressão para  $R(s)$ ,

$$R(s) = T_{2_i}^*(s) T_1(s) = \frac{[(n_m^+)^*]^2 n_{w_1} n_y n_m^+ n_m^-}{(n_m^+)^2 d_{w_1} d_y d_m} = \frac{[(n_m^+)^*]^2 n_{w_1} n_y n_m^-}{n_m^+ d_{w_1} d_y d_m}. \quad (3.39)$$

Fatorando  $R(s) = R_+(s) + R_-(s)$ , tal que  $R_+(s)$  seja anti-estável e  $R_-(s)$  seja estável encontra-se:

$$R(s) = R_+(s) + R_-(s) = \frac{n_{r_+}}{n_m^+} + \frac{n_{r_-}}{d_{w_1} d_y d_m}, \quad (3.40)$$

onde  $n_{r_+}(s)$  é o numerador de  $R_+(s)$  e  $n_{r_-}(s)$  é o numerador de  $R_-(s)$ . A partir da expressão para  $R_+(s)$ ,  $f(s)$  e  $g(s)$  podem ser definidas da forma a seguir:

$$f(s) = \frac{n_f}{n_m^+} \quad \text{e} \quad g(s) = (-1)^p \frac{n_g}{(n_m^+)^*},$$

onde  $p$  é o grau de  $n_m^+(s)$ . Uma vez encontradas as funções de transferência acima, a expressão para o controlador  $K(s)$ , fatorado de acordo com a equação (3.22), pode ser obtida encontrando-se expressões para  $U(s)$  e  $V(s)$ . Para tanto, note que

$$X_S = T_{2_o} Q$$

e, como pelo teorema 3.5,  $X_S = R - \lambda f/g$ , tem-se:

$$T_{2_o} Q = R - \lambda \frac{f}{g} = T_{2_i}^* T_1 - \lambda \frac{f}{g}. \quad (3.41)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (3.41) por  $T_{2_i}(s)$  obtém-se:

$$\lambda T_{2_i} \frac{f}{g} = T_1 - T_2 Q.$$

Como  $T_1 - T_2Q = W_1(Y + MQ)M = W_1UM$ , então

$$\lambda T_{2_i} \frac{f}{g} = W_1UM.$$

Assim sendo, uma expressão para  $U(s)$  será:

$$\begin{aligned} U &= W_1^{-1}M^{-1}\lambda T_{2_i} \frac{f}{g} \\ &= (-1)^p \lambda \frac{d_{w_1} d_m n_f}{n_{w_1} n_m^- (n_m^+)^* n_g}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

Uma vez obtido  $U(s)$  deve-se agora encontrar  $V(s)$ . Observe que de acordo com a equação (3.24)

$$V = X - QN. \quad (3.43)$$

Multiplicando-se ambos os termos da equação (3.43) por  $T_{2_o}$  e usando a equação (3.41) obtém-se:

$$T_{2_o}V = T_{2_o}X - \left[ T_{2_i}^* T_1 - \lambda \frac{f}{g} \right] N. \quad (3.44)$$

Em seguida, multiplicando-se ambos os membros de (3.44) por  $T_{2_i}$ , resulta em:

$$T_2V = T_2X - T_1N + \lambda \frac{f}{g} T_{2_i}N. \quad (3.45)$$

Lembrando que  $T_1 = W_1YM$  e  $T_2 = -W_1M^2$  e substituindo-os na equação (3.45), tem-se:

$$\begin{aligned} -W_1M^2V &= -M^2XW_1 - MYW_1N + \lambda \frac{f}{g} T_{2_i}N. \\ &= -MW_1(MX + NY) + \lambda \frac{f}{g} T_{2_i}N. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Pela identidade de Bezout (3.23) sabe-se que  $MX + NY = 1$ , e portanto a equação (3.46) pode ser reescrita como:

$$W_1M^2V = MW_1 - \lambda \frac{f}{g} T_{2_i}N.$$

Desta forma  $V(s)$  será dada por:

$$V = W_1^{-1}M^{-2} \left[ MW_1 - \lambda \frac{f}{g} T_{2_i}N \right]. \quad (3.47)$$

Utilizando-se as definições de  $N(s)$ ,  $M(s)$ ,  $W_1(s)$  na equação acima, tem-se, após algumas manipulações algébricas, que:

$$V = \frac{d_{w_1} d_m}{n_{w_1} n_m^+ (n_m^-)^2} \left[ \frac{n_m^- n_{w_1} n_g (n_m^+)^* - \lambda (-1)^p n_f n_n d_{w_1}}{d_{w_1} n_g (n_m^+)^*} \right]. \quad (3.48)$$

O controlador  $K(s)$  pode então ser obtido a partir das expressões para  $U(s)$  e  $V(s)$  dadas pelas equações (3.42) e (3.48), respectivamente:

$$K(s) = U(s)V^{-1}(s) = \frac{\lambda (-1)^p n_f n_m d_{w_1}}{n_m^- n_{w_1} n_g (n_m^+)^* - \lambda (-1)^p n_f n_n d_{w_1}}. \quad (3.49)$$

A fórmula apresentada na equação (3.49) pode ainda ser reduzida. Para tanto, note que

$$R - X_S = \lambda \frac{f}{g} = \frac{\lambda (-1)^p n_f (n_m^+)^*}{n_g n_m^+},$$

e, portanto, substituindo  $R(s)$  de acordo com a equação (3.39) e após algumas manipulações algébricas, tem-se:

$$X_S = \frac{[(n_m^+)^*]^2 n_{w_1} n_y n_m^- n_g - \lambda (-1)^p n_f (n_m^+)^* d_{w_1} d_y d_m}{n_g n_m^+ d_{w_1} d_y d_m}, \quad (3.50)$$

que, para ser solução do problema de Nehari, deve ser estável, ou seja, o numerador de  $X_S(s)$  descrito pela equação (3.50) deve possuir um zero definido por  $n_m^+(s)$ . A partir desta observação conclui-se então que:

$$(n_m^+)^* n_{w_1} n_y n_m^- n_g - \lambda (-1)^p n_f d_{w_1} d_y d_m = n_m^+ \chi, \quad (3.51)$$

onde  $\chi(s)$  é um polinômio. Note que para a obtenção da expressão acima foi usado o fato de que  $n_m^+(s) \neq [n_m^+(s)]^*$ . A partir da identidade de Bezout (equação 3.23) e fazendo os denominadores de  $X(s)$  e de  $Y(s)$  iguais, e os denominadores de  $M(s)$  e de  $N(s)$  iguais, sabe-se que:

$$n_m n_x + n_n n_y = d_m d_y. \quad (3.52)$$

e, então, substituindo-se o termo  $d_y(s)d_m(s)$  da equação (3.51) de acordo com a equação (3.52) tem-se que:

$$(n_m^+)^* n_{w_1} n_y n_m^- n_g - \lambda (-1)^p n_f d_{w_1} (n_m n_x + n_n n_y) = n_m^+ \chi. \quad (3.53)$$

Separando-se todos os termos dependentes de  $n_m^+(s)$  à direita encontra-se:

$$(n_m^+)^* n_{w_1} n_y n_m^- n_g - \lambda(-1)^p n_f d_{w_1} n_n n_y = n_m^+ \chi + \lambda(-1)^p n_f d_{w_1} n_m^+ n_m^- n_x = n_m^+ \bar{\chi}. \quad (3.54)$$

Uma importante observação a ser feita é que  $n_y(s)$  e  $n_m^+(s)$  são polinômios coprimos. Para provar este fato considere que seja possível escrever  $n_y(s) = \alpha(s)\bar{n}_y(s)$  e  $n_m^+(s) = \alpha(s)\bar{n}_m^+(s)$ , onde  $\alpha(s) \neq 1$  tem somente zeros no semi-plano da direita do plano complexo- $s$ . Desta forma, o fator  $\alpha(s)$  poderia ser posto em evidência na equação (3.52), resultando em:

$$\alpha(s)[\bar{n}_m^+(s)n_m^-(s)n_x(s) + n_n(s)\bar{n}_y(s)] = d_m(s)d_y(s),$$

o que seria uma contradição uma vez que  $d_m(s)d_y(s)$  é um polinômio de Hurwitz. Portanto, como  $n_y(s)$  e  $n_m^+(s)$  são coprimos, a equação (3.54) pode ser escrita como:

$$n_m^- n_{w_1} n_g (n_m^+)^* - \lambda(-1)^p n_f n_n d_{w_1} = n_m^+ \tilde{\chi}_1.$$

Logo, o denominador de  $K(s)$  na equação (3.49) pode ser substituído por  $n_m^+ \tilde{\chi}_1$ , e finalmente a expressão para o controlador que minimiza  $\|W_1 K S\|_\infty$  é

$$K(s) = \frac{(-1)^p \lambda n_f n_m^- d_{w_1}}{\tilde{\chi}_1}. \quad (3.55)$$

Note que o desenvolvimento de uma fórmula para o controlador estabilizante  $K(s)$ , a partir da aplicação do algoritmo 3.2, mostrou ser uma forma simples de se obtê-lo. Além disso a ordem do controlador  $K(s)$  é menor que a ordem da planta  $G(s)$  mais a ordem da função de ponderação  $W_1(s)$ .

Para verificar os resultados obtidos nesta subseção, um exemplo será apresentado a seguir.

**Exemplo 3.1** *Considere o problema de encontrar um controlador  $K(s)$  para o sistema realimentado da figura 3.3 onde*

$$G(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}.$$

*e  $K(s)$  deve ser tal que maximize a tolerância do sistema realimentado a perturbação aditiva na planta. Este problema, conforme anteriormente visto, pode ser formulado*

da seguinte forma: encontre  $K(s)$  tal que a  $\|W_1KS\|_\infty$  seja mínima. Para simplificar a solução, a função de ponderação  $W_1(s)$  será considerada igual a um. Portanto, inicialmente devem-se determinar as funções  $N(s)$  e  $M(s) \in RH_\infty$ , bem como as funções  $X(s)$  e  $Y(s) \in RH_\infty$  que satisfazem a identidade de Bezout (3.23). Assim sendo, considere

$$N(s) = \frac{n_n(s)}{d_n(s)} = \frac{s-1}{(s+1)^2} \quad e \quad M(s) = \frac{n_m(s)}{d_m(s)} = \frac{(s-2)(s+1)}{(s+1)^2}.$$

Em seguida calculando-se os valores de  $X(s)$  e  $Y(s) \in RH_\infty$  que satisfazem a identidade de Bezout obtém-se:

$$X(s) = \frac{n_x(s)}{d_x(s)} = \frac{s-5}{s+1} \quad e \quad Y(s) = \frac{n_y(s)}{d_y(s)} = 9.$$

Seguindo os passos do algoritmo 3.2, deve-se determinar agora  $T_1(s)$  e  $T_2(s)$ , de acordo com (3.37):

$$T_1(s) = 9 \frac{s-2}{s+1} \quad e \quad T_2(s) = -\frac{(s-2)^2}{(s+1)^2}.$$

Realizando fatoração ‘inner-outer’ em  $T_2(s)$ , utilizando para tanto (3.38), encontra-se:

$$T_{2_i}(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+2)^2} \quad e \quad T_{2_o}(s) = -\frac{(s+2)^2}{(s+1)^2}.$$

A função  $R(s)$ , dada por (3.39), é então:

$$R(s) = T_{2_i}^*(s)T_1(s) = \frac{(s+2)^2 9(s-2)}{(s-2)^2 (s+1)} = 9 \frac{(s+2)^2}{(s-2)(s+1)}.$$

Fatorando  $R(s) = R_+(s) + R_-(s)$  conforme (3.40) encontra-se:

$$R_+ = \frac{48}{s-2},$$

e procedendo de acordo com os passos do algoritmo 3.2 obtém-se:

$$\lambda = 12, \quad f(s) = \frac{n_f(s)}{d_f(s)} = \frac{1}{s-2} \quad e \quad g(s) = \frac{n_g(s)}{d_g(s)} = \frac{1}{s+2}.$$

Aplicando diretamente a fórmula (3.49) é possível obter  $K(s)$ :

$$\begin{aligned} K(s) &= \frac{\lambda(-1)^p n_f n_m d_{w_1}}{n_m^- n_{w_1} n_g (n_m^+)^* - \lambda(-1)^p n_f n_n d_{w_1}} \\ &= \frac{-12(s+1)(s-2)}{(s+1)(-s-2) + 12(s-1)} \\ &= \frac{12(s+1)}{s-7}. \end{aligned}$$

Note que o termo  $n_m^+(s) = (s-2)$  foi cancelado como era esperado. □

### 3.3.2 Rastreamento de sinais e desempenho transitório

O problema de rastreamento do sinal de referência e melhoria do desempenho transitório foi formulado em termos da minimização de  $\|W_2S\|_\infty$  (equação 3.12 e tabela 3.1), onde  $W_2(s)$  é uma função de ponderação estável e de fase mínima e  $S(s)$  é a função de sensibilidade. Para solucionar este problema foi visto que  $T_1(s)$  e  $T_2(s)$  correspondente ao problema de casamento de modelos (equação 3.28) são expressos por:

$$T_1(s) = W_2(s)X(s)M(s) \quad \text{e} \quad T_2(s) = W_2(s)N(s)M(s). \quad (3.56)$$

Escrevendo as expressões acima na forma fracional, utilizando a mesma notação da subseção anterior, obtém-se:

$$T_1(s) = \frac{n_{w_2}n_xn_m}{d_{w_2}d_xd_m} \quad \text{e} \quad T_2(s) = \frac{n_{w_2}n_nn_m}{d_{w_2}d_nd_m}. \quad (3.57)$$

Realizando fatoraçoão ‘inner-outer’ para  $T_2(s)$  encontra-se:

$$T_2(s) = T_{2_i}(s)T_{2_o}(s) = \frac{n_n^+n_m^+}{(n_n^+)^*(n_m^+)^*} \frac{n_{w_2}(n_n^+)^*(n_m^+)^*n_n^-n_m^-}{d_{w_2}d_nd_m},$$

onde

$$T_{2_i}(s) = \frac{n_n^+n_m^+}{(n_n^+)^*(n_m^+)^*} \quad \text{e} \quad T_{2_o}(s) = \frac{n_{w_2}(n_n^+)^*(n_m^+)^*n_n^-n_m^-}{d_{w_2}d_nd_m}. \quad (3.58)$$

Note que  $T_{2_o}(s)$  é estritamente própria se a função de transferência da planta for também estritamente própria. Este fato faz com que  $Q(s)$  que minimiza  $\|W_2S\|_\infty$  seja imprópria, isto é:  $Q_{opt}(s) = Q_{imp}(s)$  e, portanto, o controlador obtido via parametrização de Youla-Kucera para  $Q_{imp}(s)$  será também impróprio. Desta forma, nesta subseção serão obtidas expressões analíticas para os controladores impróprios, obtidos via parametrização de Youla-Kucera utilizando  $Q_{imp}(s)$ , e para os controladores próprios, obtidos também por Youla-Kucera, porém para  $Q(s) = Q_\tau(s)$  próprio, onde  $Q_\tau(s) = \frac{Q_{imp}(s)}{(\tau s + 1)^\nu}$  (conforme observação 3.2). Em ambos os casos, o próximo passo é a obtenção de uma expressão para  $R(s)$ , sendo dada por:

$$R(s) = T_{2_i}^*T_1 = \frac{(n_n^+)^*(n_m^+)^*n_xn_m^-n_{w_2}}{n_n^+d_xd_md_{w_2}}. \quad (3.59)$$

Da mesma forma que para o caso da robustez, deve-se fatorar  $R(s) = R_+(s) + R_-(s)$ :

$$R(s) = R_+(s) + R_-(s) = \frac{n_{r+}}{n_n^+} + \frac{n_{r-}}{d_xd_md_{w_2}}, \quad (3.60)$$

onde  $n_{r_+}(s)$  e  $n_{r_-}(s)$  representam os numeradores de  $R_+(s)$  e  $R_-(s)$ , respectivamente. Em seguida, deve-se obter expressões para  $f(s)$  e  $g(s)$ :

$$f(s) = \frac{n_f}{n_n^+} \quad \text{e} \quad g(s) = (-1)^p \frac{n_g}{(n_n^+)^*},$$

onde  $p$  é o grau de  $n_n^+$ . Uma vez obtidas equações para  $f(s)$  e  $g(s)$  é necessário agora obter expressões para  $V(s)$  e  $U(s)$  para então encontrar  $K(s) = U(s)V^{-1}(s)$ . Como serão considerados tanto o controlador impróprio  $K_{imp}(s)$  quanto o controlador próprio  $K_\tau(s)$ , inicialmente será obtida uma expressão analítica para  $K_\tau(s)$ , e em seguida, fazendo  $\tau = 0$  será obtida uma expressão para o controlador impróprio  $K_{imp}(s)$ . Desta forma, considere a equação (3.41) reescrita abaixo considerando-se a aproximação sobre  $Q_{imp}(s)$  para torná-la própria:

$$T_{2_o} \frac{Q_{imp}}{(\tau s + 1)^\nu} = T_{2_o} Q_\tau = \left( R - \lambda \frac{f}{g} \right) \frac{1}{(\tau s + 1)^\nu}. \quad (3.61)$$

Observe que

$$\frac{1}{(\tau s + 1)^\nu} = 1 - \frac{(\tau s + 1)^\nu - 1}{(\tau s + 1)^\nu} = 1 - \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu}, \quad (3.62)$$

onde

$$f(s, \tau) = (\tau s + 1)^\nu - 1. \quad (3.63)$$

Note que  $f(s, \tau) = 0$  para  $\tau = 0$ . Utilizando (3.62) e lembrando que  $R(s) = T_{2_i}^* T_1$ , tem-se que:

$$T_{2_o} Q_\tau = \left( R - \lambda \frac{f}{g} \right) \left( 1 - \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu} \right) = \left( T_{2_i}^* T_1 - \lambda \frac{f}{g} \right) \left( 1 - \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu} \right). \quad (3.64)$$

Multiplicando-se ambos os membros da equação acima por  $T_{2_i}$  e reorganizando-a obtém-se:

$$T_1 - T_2 Q_\tau = \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} + \left( T_1 - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} \right) \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu}. \quad (3.65)$$

Note ainda que, de acordo com as equações (3.56),  $T_1 - T_2 Q_\tau$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 Q_\tau &= W_2 X M - W_2 N M Q_\tau \\ &= W_2 M (X - N Q_\tau) \\ &= W_2 M V. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Igualando-se as equações (3.65) e (3.66) tem-se que:

$$W_2MV = \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} + \left( T_1 - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} \right) \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu}.$$

Após algumas manipulações algébricas simples, porém tediosas, encontra-se a seguinte expressão para  $V(s)$ :

$$V = \frac{d_{w_2} d_m}{n_{w_2} n_m^-} \left[ \frac{(-1)^p \lambda n_f d_{w_2} d_x d_m (\tau s + 1)^\nu + [n_{w_2} n_x n_m^- (n_m^+)^* n_g - \lambda (-1)^p n_f d_{w_2} d_x d_m] f(s, \tau)}{(n_m^+)^* n_g d_{w_2} d_x d_m (\tau s + 1)^\nu} \right]. \quad (3.67)$$

Utilizando a expressão (3.63)  $V(s)$  pode ser reescrito como:

$$V = \frac{d_{w_2} d_m}{n_{w_2} n_m^-} \left[ \frac{\lambda (-1)^p n_f d_{w_2} d_x d_m + n_{w_2} n_x n_m^- (n_m^+)^* n_g f(s, \tau)}{(n_m^+)^* n_g d_{w_2} d_x d_m (\tau s + 1)^\nu} \right] \quad (3.68)$$

O próximo passo é a obtenção de  $U(s)$ . Note que:

$$U = Y + MQ_\tau,$$

e que multiplicando-se ambos os membros da equação acima por  $T_{2_o}(s)$  tem-se:

$$T_{2_o}U = T_{2_o}Y + MT_{2_o}Q_\tau.$$

Substituindo na expressão acima  $T_{2_o}Q_\tau$  de acordo com a equação (3.64) resulta em:

$$T_{2_o}U = T_{2_o}Y + M \left( T_{2_i}^* T_1 - \lambda \frac{f}{g} \right) \left( 1 - \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu} \right).$$

Multiplicando-se ambos os termos da expressão acima por  $T_{2_i}(s)$  e fazendo  $T_1(s) = W_2(s)X(s)M(s)$  e  $T_2(s) = W_2(s)N(s)M(s)$  tem-se que:

$$W_2NU = W_2(NY + XM) - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} - \left( W_2XM - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} \right) \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu}. \quad (3.69)$$

Note, pela identidade de Bezout, que  $NY + XM = 1$  e, portanto, a equação (3.69) acima pode ser reescrita como:

$$W_2NU = W_2 - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} - \left( W_2XM - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} \right) \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu}. \quad (3.70)$$

A partir da equação (3.70), uma expressão para  $U(s)$  pode ser finalmente obtida, e após algumas manipulações algébricas encontra-se:

$$U = \frac{d_{w_2} d_n}{n_{w_2} n_n} \left[ \frac{(n_{w_2} (n_m^+)^* n_g d_x d_m - \lambda (-1)^p n_m^+ n_f d_{w_2} d_x d_m) (\tau s + 1)^\nu}{d_{w_2} (n_m^+)^* n_g d_x d_m (\tau s + 1)^\nu} + \frac{(\lambda (-1)^p n_m^+ n_f d_{w_2} d_x d_m - n_{w_2} n_x n_m (n_m^+)^* n_g) f(s, \tau)}{d_{w_2} (n_m^+)^* n_g d_x d_m (\tau s + 1)^\nu} \right]. \quad (3.71)$$

Uma vez encontradas expressões para  $U(s)$  e  $V(s)$ , uma expressão analítica para o controlador  $K_\tau(s)$ , próprio, pode ser escrita como:

$$K_\tau(s) = U(s)V^{-1}(s) = \frac{n_{K_\tau}(s)}{d_{K_\tau}(s)}, \quad (3.72)$$

onde

$$\begin{aligned} n_{K_\tau} &= n_m^- \{ [n_{w_2}(n_m^+)^* n_g d_x d_m - \lambda(-1)^p n_m^* n_f d_{w_2} d_x d_m] (\tau s + 1)^\nu + \\ &+ [\lambda(-1)^p n_m^+ n_f d_{w_2} d_x d_m - n_{w_2} n_x n_m (n_m^+)^* n_g] f(s, \tau) \} \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$d_{K_\tau} = n_n \{ \lambda(-1)^p n_f d_{w_2} d_x d_m + n_{w_2} n_x n_m^- (n_m^+)^* n_g f(s, \tau) \}. \quad (3.74)$$

Para obter a expressão para o controlador impróprio  $K_{imp}(s)$  basta fazer  $\tau = 0$  nas equações (3.73) e (3.74). Procedendo desta forma, obtém-se:

$$K_{imp}(s) = \frac{n_m^-}{n_n} \left[ \frac{n_{w_2}(n_m^+)^* n_g d_x d_m - \lambda(-1)^p n_m^+ n_f d_{w_2} d_x d_m}{\lambda(-1)^p n_f d_{w_2} d_x d_m} \right]. \quad (3.75)$$

Observe que para o controlador impróprio  $K_{imp}(s)$  há o cancelamento exato do polinômio de Hurwitz ( $d_x d_m$ ) resultando em:

$$K_{imp}(s) = \frac{n_m^-}{n_n} \left[ \frac{n_{w_2}(n_m^+)^* n_g - \lambda(-1)^p n_m^+ n_f d_{w_2}}{\lambda(-1)^p n_f d_{w_2}} \right]. \quad (3.76)$$

É importante ressaltar que o mesmo não ocorre para o controlador próprio  $K_\tau(s)$ , o que faz com que este tenha ordem significativamente maior que  $K_{imp}(s)$ . Além do cancelamento de ( $d_x d_m$ ), tanto o controlador próprio,  $K_\tau(s)$ , quanto o impróprio,  $K_{imp}(s)$ , possuem um cancelamento pouco evidente de  $n_n^+$ . Considere inicialmente o cancelamento de  $n_n^+(s)$  no controlador impróprio  $K_{imp}(s)$ . Para tanto, note que  $X_S(s)$ , solução do problema de Nehari correspondente a  $\min \|W_2 S\|_\infty$  é dado por:

$$\begin{aligned} X_S &= R(s) - \lambda \frac{f(s)}{g(s)} \\ &= \frac{(n_n^+)^* (n_m^+)^* n_x n_m^- n_{w_2} n_g - \lambda(-1)^p n_f (n_n^+)^* d_x d_m d_{w_2}}{n_g n_n^+ d_x d_m d_{w_2}}. \end{aligned}$$

De acordo com a teoria,  $X_S(s)$  deve ser estável e portanto, o numerador de  $X_S(s)$  pode ser reescrito como:

$$(n_m^+)^* n_x n_m^- n_{w_2} n_g - \lambda(-1)^p n_f d_x d_m d_{w_2} = n_n^+ \chi, \quad (3.77)$$

onde foi usado na equação acima o fato de que  $n_n^+(s) \neq [n_n^+(s)]^{\star 1}$ . Pela identidade de Bezout e fazendo-se os denominadores de  $N(s)$  e  $M(s)$  iguais, e os denominadores de  $X(s)$  e  $Y(s)$  iguais, tem-se que:

$$d_x d_m = n_m n_x + n_n n_y.$$

Substituindo então  $d_x d_m$  na equação (3.77) e separando todos os termos dependentes de  $n_n^+(s)$  à direita, encontra-se:

$$(n_m^+)^{\star} n_x n_m^- n_{w_2} n_g - \lambda(-1)^p n_f n_m n_x d_{w_2} = n_n^+ \chi + \lambda(-1)^p n_f n_n n_y d_{w_2} = n_n^+ \tilde{\chi}.$$

Como  $n_x(s)$  e  $n_n^+(s)$  são coprimos <sup>2</sup>, então:

$$(n_m^+)^{\star} n_{w_2} n_g - \lambda(-1)^p n_f d_{w_2} n_m^+ = n_n^+ \tilde{\chi}_2, \quad (3.78)$$

o que permite reduzir a equação (3.76) a:

$$K_{imp}(s) = \frac{n_m^-}{n_n^-} \left[ \frac{\tilde{\chi}_2}{\lambda(-1)^p n_f d_{w_2}} \right]. \quad (3.79)$$

Considere agora o cancelamento de  $n_n^+(s)$  no controlador próprio  $K_\tau(s)$ . Utilizando a definição de  $f(s, \tau)$  na equação (3.73) tem-se, que o numerador de  $K_\tau(s)$ ,  $n_{K_\tau}(s)$ , pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} n_{K_\tau} &= [n_{w_2} (n_m^+)^{\star} n_g - \lambda(-1)^p n_m^+ n_f d_{w_2}] [(\tau s + 1)^\nu d_x d_m n_m^-] + \\ &+ [\lambda(-1)^p n_m^+ n_f d_{w_2} d_x d_m - n_{w_2} n_x n_m (n_m^+)^{\star} n_g] f(s, \tau) n_m^-. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Substituindo  $n_m n_x = d_x d_m - n_n n_y$  na expressão acima e utilizando a equação (3.78) obtém-se:

$$n_{K_\tau} = n_n^+ \tilde{\chi}_2 [(\tau s + 1)^\nu d_x d_m n_m^- - f(s, \tau) n_m^- d_x d_m] + n_n n_{w_2} n_y (n_m^+)^{\star} n_g f(s, \tau) n_m^-. \quad (3.81)$$

Pela equação acima e pela equação (3.74), se verifica facilmente o cancelamento de  $n_n^+(s)$  na expressão para  $K_\tau(s)$ . Portanto, utilizando em (3.81) o fato de que  $f(s, \tau) = (\tau s + 1)^\nu - 1$  (3.63), e de acordo com (3.74),  $K_\tau(s)$  é dado por:

$$K_\tau(s) = \frac{n_m^- \tilde{\chi}_2 d_x d_m + n_n^- n_{w_2} n_y (n_m^+)^{\star} n_g n_m^- f(s, \tau)}{n_n^- [\lambda(-1)^p n_f d_{w_2} d_x d_m + n_{w_2} n_x n_m^- (n_m^+)^{\star} n_g f(s, \tau)]}. \quad (3.82)$$

<sup>1</sup>Caso  $n_n^+ = 1$ , então, de acordo com a equação (3.59)  $R(s) \in RH_\infty$  e a solução do problema é trivial.

<sup>2</sup>Para provar que  $n_n^+(s)$  e  $n_x(s)$  são coprimos basta usar a equação de Bezout como na subseção 3.3.1.

Para ilustrar os resultados apresentados nesta subseção um exemplo será mostrado a seguir.

**Exemplo 3.2** Considere o problema de minimizar  $\|W_2S\|_\infty$  onde:

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2},$$

e,  $W_2(s) = 1$ , por simplicidade. O primeiro passo então é obter  $N(s)$  e  $M(s)$  e, em seguida, encontrar  $X(s)$  e  $Y(s)$  que satisfazem a identidade de Bezout (3.23):

$$N(s) = \frac{n_n(s)}{d_n(s)} = \frac{(s-1)}{(s+2)^2} \quad e \quad M(s) = \frac{n_m(s)}{d_m(s)} = \frac{(s+1)(s-2)}{(s+2)^2},$$

$$X(s) = \frac{n_x(s)}{d_x(s)} = \frac{s-19}{s+3} \quad e \quad Y(s) = \frac{n_y(s)}{d_y(s)} = \frac{27s+26}{s+3}.$$

O passo seguinte é determinar  $T_1(s)$  e  $T_2(s)$  dados pelas equações (3.57). Observe que foram escolhidos  $d_y(s) = d_x(s) = (s+3)$  e  $d_m(s) = d_n(s) = (s+2)^2$ , com o objetivo de evidenciar o cancelamento de  $d_x(s)d_m(s)$  demonstrado na equação (3.79), e que não ocorrerá para  $K_\tau(s)$ .

$$T_1(s) = \frac{(s+1)(s-2)(s-19)}{(s+2)^2(s+3)} \quad e \quad T_2(s) = \frac{(s-2)(s-1)(s+1)}{(s+2)^4}.$$

Realizando fatoração ‘inner-outer’ em  $T_2(s)$  obtém-se, de acordo com (3.60):

$$T_{2_i} = \frac{(s-2)(s-1)}{(s+2)(s+1)} \quad e \quad T_{2_o} = \frac{(s+1)^2}{(s+2)^3}.$$

A função  $R(s)$  (equação 3.59) é então:

$$R(s) = T_{2_i}^* T_1 = \frac{(s+1)^2(s-19)}{(s-1)(s+2)(s+3)},$$

e fatorando  $R(s) = R_+(s) + R_-(s)$  de acordo com (3.60) tem-se que:

$$R_+(s) = -\frac{6}{(s-1)}.$$

Seguindo os passos do algoritmo 3.2 obtém-se os valores para  $\lambda$ ,  $f(s)$  e  $g(s)$ :

$$\lambda = 3, \quad f(s) = \frac{1}{s-1} \quad e \quad g(s) = -\frac{1}{s+1}.$$

Portanto, o controlador  $K_{imp}(s)$  obtido de acordo com a equação (3.79) será dado por:

$$K_{imp}(s) = -\frac{4(s+1)}{3}.$$

Supondo agora  $\tau = 0,001$  e substituindo na equação (3.82), obtém-se:

$$K_\tau(s) = \frac{4027(s+2,9584)(s+2,0145)(s+1)(s+2)}{(s-3022,97)(s+2,9557)(s+2,0146)(s+2)}.$$

Note que o cancelamento exato de pólos e zeros de  $d_x d_m = (s+3)(s+2)^2$  não mais ocorre para  $K_\tau(s)$ , pois os zeros e pólos quase canceláveis de  $K_\tau(s)$  foram levemente alterados. Note também que há ainda um cancelamento do termo  $(s+2)$  que se deve a coincidência ocasionada pela escolha de  $d_m = (s+2)^2$  com  $(n_m^+)^* = -(s+2)$ , conforme é mostrado na equação (3.82). Este fato mostra que a escolha dos denominadores de  $N(s)$ ,  $M(s)$  e de  $X(s)$  e  $Y(s)$ , influenciam diretamente no controlador próprio a ser obtido, o que não ocorre com o controlador impróprio.  $\square$

### 3.3.3 Rejeição de perturbação

Para encontrar o controlador ótimo  $K(s)$  para o problema  $H_\infty$  de rejeição de perturbação é necessário obter expressões para  $T_1(s)$  e  $T_2(s)$  dados pelas equações (3.29).

Fazendo  $W_3(s) = \frac{n_{w_3}(s)}{d_{w_3}(s)}$  encontra-se:

$$T_1(s) = W_3(s)X(s)N(s) = \frac{n_{w_3}n_xn_n}{d_{w_3}d_xd_n} \quad \text{e} \quad T_2(s) = W_3(s)N^2(s) = \frac{n_{w_3}n_n^2}{d_{w_3}d_n^2}, \quad (3.83)$$

e realizando fatoração ‘inner-outer’ em  $T_2(s)$  obtém-se:

$$T_2(s) = T_{2_i}(s)T_{2_o}(s) = \frac{(n_n^+)^2}{[(n_n^+)^*]^2} \frac{n_{w_3}[(n_n^+)^*]^2(n_n^-)^2}{d_{w_3}d_n^2},$$

onde

$$T_{2_i}(s) = \frac{(n_n^+)^2}{[(n_n^+)^*]^2} \quad \text{e} \quad T_{2_o}(s) = \frac{n_{w_3}[(n_n^+)^*]^2(n_n^-)^2}{d_{w_3}d_n^2}. \quad (3.84)$$

Note que para plantas estritamente próprias  $T_{2_o}(s)$  é estritamente própria, o que requer a obtenção de  $Q_\tau(s) = \frac{Q_{imp}(s)}{(\tau s+1)^\nu}$ . Expressões para o controlador impróprio  $K_{imp}(s)$  e para o controlador próprio  $K_\tau(s)$  serão obtidas nessa subseção. O procedimento é análogo ao adotado para o problema de rastreamento do sinal de referência e desempenho transitório. Para tanto, determina-se inicialmente  $R(s)$ :

$$R(s) = T_{2_i}^*(s)T_1(s) = \frac{[(n_n^+)^*]^2}{n_n^+} \frac{n_{w_3}n_xn_n^-}{d_{w_3}d_xd_n}, \quad (3.85)$$

e, em seguida, fatora-se  $R(s) = R_+(s) + R_-(s)$ , obtendo-se:

$$R_+(s) = \frac{n_{r_+}}{n_n^+} \quad \text{e} \quad R_-(s) = \frac{n_{r_-}}{d_x d_{w_3} d_n}, \quad (3.86)$$

onde  $n_{r_+}(s)$  e  $n_{r_-}(s)$  são os numeradores de  $R_+(s)$  e  $R_-(s)$ , respectivamente. Seguindo os passos do algoritmo 3.2, a partir da expressão para  $R_+(s)$  determina-se  $\lambda$  e expressões para o par de Schmidt  $f(s)$  e  $g(s)$ , quais sejam:

$$f(s) = \frac{n_f}{n_n^+} \quad \text{e} \quad g(s) = (-1)^p \frac{n_g}{(n_n^+)^*},$$

onde  $p$  é o grau de  $n_n^+$ . Obtidas as expressões para  $f(s)$  e  $g(s)$  deve-se encontrar  $U(s)$  e  $V(s)$ . Note que, para o problema de  $\min \|W_3SG\|_\infty$  sabe-se que:

$$\begin{aligned} W_3SG = T_1 - T_2Q_\tau &= W_3XN - W_3N^2Q_\tau \\ &= W_3N(X - NQ_\tau) \\ &= W_3NV. \end{aligned} \quad (3.87)$$

e, portanto, uma expressão para  $V(s)$  pode ser obtida a partir da equação (3.87) observando-se que a equação (3.65) é também válida para esse caso. Desta forma:

$$V = W_3^{-1}N^{-1} \left[ \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} + \left( T_1 - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} \right) \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu} \right].$$

Após algumas manipulações algébricas, obtém-se:

$$V = \frac{d_{w_3} d_n}{n_{w_3} n_n^-} \left[ \frac{\lambda(-1)^p n_f d_{w_3} d_x d_n (\tau s + 1)^\nu + (n_{w_3} n_x n_n^- (n_n^+)^* n_g - \lambda(-1)^p n_f d_{w_3} d_x d_n) f(s, \tau)}{(n_n^+)^* n_g d_{w_3} d_x d_n (\tau s + 1)^\nu} \right], \quad (3.88)$$

e, utilizando a equação (3.63) na expressão acima resulta em:

$$V = \frac{d_{w_3} d_n}{n_{w_3} n_n^-} \left[ \frac{\lambda(-1)^p n_f d_{w_3} d_x d_n + n_{w_3} n_x n_n^- (n_n^+)^* n_g f(s, \tau)}{(n_n^+)^* n_g d_{w_3} d_x d_n (\tau s + 1)^\nu} \right]. \quad (3.89)$$

O próximo passo é encontrar  $U(s)$ . Para tanto, note que:

$$U = Y + MQ_\tau,$$

e multiplicando-se ambos os termos da equação acima por  $T_{2_o}$  encontra-se:

$$T_{2_o}U = T_{2_o}Y + MT_{2_o}Q_\tau.$$

Substituindo-se  $T_{2_o}(s)Q_\tau(s)$  expresso pela equação (3.64) na equação acima resulta em:

$$T_{2_o}U = T_{2_o}Y + M \left( T_{2_i}^* T_1 - \lambda \frac{f}{g} \right) \left( 1 - \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu} \right). \quad (3.90)$$

Em seguida, multiplicando-se ambos os termos da equação (3.90) por  $T_{2_i}(s)$  e fazendo  $T_1(s) = W_3(s)X(s)N(s)$  e  $T_2(s) = W_3(s)N^2(s)$  encontra-se:

$$\begin{aligned} W_3 N^2 U &= W_3 N^2 Y + M \left( W_3 X N - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} \right) \left( 1 - \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu} \right) \\ &= W_3 N (NY + MX) - \lambda M T_{2_i} \frac{f}{g} - M \left( W_3 X N - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} \right) \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Observe que de acordo com a identidade de Bezout (3.23),  $NY + MX = 1$  e assim a equação (3.91), após simples manipulações algébricas, torna-se:

$$U = \frac{d_{w_3} d_n}{n_{w_3} n_n n_n^-} \left[ \frac{[n_{w_3} n_n^- (n_n^+)^* n_g d_n d_x - \lambda (-1)^p n_m n_f d_{w_3} d_n d_x] (\tau s + 1)^\nu}{d_{w_3} (n_n^+)^* n_g d_n d_x (\tau s + 1)^\nu} - \frac{[n_{w_3} n_x n_n^- n_m (n_n^+)^* n_g - \lambda (-1)^p n_m n_f d_m d_{w_3} d_x] f(s, \tau)}{d_{w_3} (n_n^+)^* n_g d_n d_x (\tau s + 1)^\nu} \right]. \quad (3.92)$$

Após algumas manipulações algébricas das equações (3.89) e (3.92) obtém-se:

$$K_\tau(s) = U(s)V^{-1}(s) = \frac{n_{K_\tau}(s)}{d_{K_\tau}(s)}, \quad (3.93)$$

onde

$$\begin{aligned} n_{K_\tau} &= [n_{w_3} n_n^- (n_n^+)^* n_g d_n d_x - \lambda (-1)^p n_m n_f d_{w_3} d_n d_x] (\tau s + 1)^\nu \\ &\quad - [n_{w_3} n_x n_n^- n_m (n_n^+)^* n_g - \lambda (-1)^p n_m n_f d_n d_x d_{w_3}] f(s, \tau) \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$d_{K_\tau} = n_n \{ \lambda (-1)^p n_f d_{w_3} d_x d_n + n_{w_3} n_x n_n^- (n_n^+)^* n_g f(s, \tau) \}. \quad (3.95)$$

Para obter  $K_{imp}(s)$  basta fazer  $\tau = 0$  nas equações (3.94) e (3.95) acima:

$$K_{imp} = \frac{1}{n_n} \left[ \frac{n_{w_3} n_n^- (n_n^+)^* n_g d_n d_x - \lambda (-1)^p n_m n_f d_{w_3} d_n d_x}{\lambda (-1)^p n_f d_{w_3} d_n d_x} \right], \quad (3.96)$$

que mostra que há ainda um cancelamento exato de  $d_n(s)d_x(s)$  resultando em:

$$K_{imp}(s) = \frac{1}{n_n} \left[ \frac{n_{w_3} n_n^- (n_n^+)^* n_g - \lambda (-1)^p n_m n_f d_{w_3}}{\lambda (-1)^p n_f d_{w_3}} \right]. \quad (3.97)$$

Note que este cancelamento não ocorre para o controlador  $K_\tau(s)$  resultando em uma ordem mais alta para o controlador próprio. Da mesma forma que para o problema de rastreamento do sinal de referência e melhoria do desempenho transitório, há ainda um cancelamento exato de  $n_n^+$  tanto no controlador próprio  $K_\tau(s)$  quanto no impróprio  $K_{imp}(s)$ . Para verificar este cancelamento considere a função  $X_S(s)$  solução do problema de Nehari:

$$\begin{aligned} X_S &= R(s) - \lambda \frac{f(s)}{g(s)} \\ &= \frac{[(n_n^+)^*]^2 n_x n_{w_3} n_n^- n_g - \lambda (-1)^p n_f (n_n^+)^* d_n d_x d_{w_3}}{n_n^+ d_x d_{w_3} d_n n_g}, \end{aligned}$$

e como  $X_S(s) \in RH_\infty$ , então o numerador de  $X_S(s)$  pode ser reescrito como:

$$(n_n^+)^* n_x n_{w_3} n_n^- n_g - \lambda (-1)^p n_f d_n d_x d_{w_3} = n_n^+ \chi,$$

onde foi usado o fato de que  $n_n^+ \neq (n_n^+)^*$ <sup>3</sup>. Substituindo-se o termo  $d_n d_x$  de acordo com a identidade de Bezout encontra-se:

$$(n_n^+)^* n_x n_{w_3} n_n^- n_g - \lambda (-1)^p n_f d_{w_3} (n_x n_m + n_n n_y) = n_n^+ \chi,$$

e separando-se os termos dependentes de  $n_n^+(s)$  à direita tem-se que:

$$(n_n^+)^* n_x n_{w_3} n_n^- n_g - \lambda (-1)^p n_f d_{w_3} n_x n_m = n_n^+ \chi + \lambda (-1)^p n_f d_{w_3} n_y n_n = n_n^+ \bar{\chi}.$$

Como  $n_x \neq n_n^+$ <sup>4</sup>, então:

$$(n_n^+)^* n_{w_3} n_n^- n_g - \lambda (-1)^p n_f d_{w_3} n_m = n_n^+ \tilde{\chi}_3, \quad (3.98)$$

e o controlador  $K_{imp}(s)$  pode ser reescrito como:

$$K_{imp}(s) = \frac{\tilde{\chi}_3}{\lambda (-1)^p n_n^- n_f d_{w_3}}. \quad (3.99)$$

O cancelamento de  $n_n^+(s)$  em  $K_\tau(s)$  pode também ser mostrado utilizando-se a equação (3.98). Para tanto, considere o numerador de  $K_\tau(s)$ ,  $n_{K_\tau}$ , reescrito abaixo:

$$\begin{aligned} n_{K_\tau} &= (n_{w_3} n_n^- (n_n^+)^* n_g d_n d_x - \lambda (-1)^p n_m n_f d_{w_3} d_n d_x) (\tau s + 1)^\nu \\ &\quad - (n_{w_3} n_n^- (n_n^+)^* n_g n_x n_m - \lambda (-1)^p n_m n_f d_n d_x d_{w_3}) f(s, \tau). \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Se  $n_n^+ = (n_n^+)^*$  a função de transferência da planta  $G(s)$  seria de fase mínima. Isto implicaria no fato de que  $T_2(s) = T_{2o}(s)$ , e a solução para este problema seria trivial.

<sup>4</sup>Este fato pode ser provado de maneira semelhante aos casos anteriores.

Substituindo  $n_x(s)n_m(s)$  na equação acima por  $d_x d_n - n_y n_n$  e reescrevendo  $n_{K_\tau}(s)$  de acordo com a equação (3.98) tem-se que:

$$n_{K_\tau} = n_n^+ \tilde{\chi}_3 [d_n d_x (\tau s + 1)^\nu] + n_{w_3} n_n^- (n_n^+)^* n_g n_y n_n f(s, \tau) - n_n^+ \tilde{\chi}_3 d_n d_x f(s, \tau),$$

onde fica claro o cancelamento do termo  $n_n^+(s)$  na expressão para  $K_\tau(s)$ . Portanto:

$$K_\tau(s) = \frac{\tilde{\chi}_3 d_n d_x + n_{w_3} (n_n^-)^2 (n_n^+)^* n_g n_y f(s, \tau)}{n_n^- [\lambda(-1)^p n_f d_{w_3} d_n d_x + n_{w_3} n_x n_n^- (n_n^+)^* n_g f(s, \tau)]}. \quad (3.100)$$

A seguir um exemplo será apresentado para ilustrar os resultados apresentados nesta subseção.

**Exemplo 3.3** *Considere o problema de rejeição de perturbação, formulado como a minimização de  $\|W_3 SG\|_\infty$  para a seguinte planta:*

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2}.$$

Por simplicidade  $W_3(s)$  será feito igual a um. Para resolver este problema o primeiro passo é determinar  $N(s)$  e  $M(s)$ :

$$N(s) = \frac{s - 1}{(s + 1)^2} \quad e \quad M(s) = \frac{(s + 1)(s - 2)}{(s + 1)^2}.$$

Em seguida, encontra-se  $X(s)$  e  $Y(s)$ , que satisfazem a identidade de Bezout:

$$X(s) = \frac{n_x(s)}{d_x(s)} = \frac{s - 5}{s + 1} \quad e \quad Y(s) = \frac{n_y(s)}{d_y(s)} = \frac{9(s + 1)}{(s + 1)},$$

A partir das equações (3.83) obtém-se as seguintes funções de transferência para  $T_1(s)$  e  $T_2(s)$ :

$$T_1(s) = \frac{(s - 1)(s - 5)}{(s + 1)^3} \quad e \quad T_2(s) = \frac{(s - 1)^2}{(s + 1)^4}.$$

Realizando fatoração ‘inner-outer’ em  $T_2(s)$ , de acordo com (3.84), encontra-se:

$$T_{2_i}(s) = \frac{(s - 1)^2}{(s + 1)^2} \quad e \quad T_{2_o}(s) = \frac{1}{(s + 1)^2},$$

e desta forma, de acordo com (3.85)  $R(s)$  será dado por:

$$R(s) = T_{2_i}^* T_1 = \frac{(s + 1)^2 (s - 1)(s - 5)}{(s - 1)^2 (s + 1)^3}.$$

Fatorando  $R(s) = R_+(s) + R_-(s)$ , conforme mostrado em (3.86), obtém-se:

$$R_+ = \frac{-2}{s+1} \quad e \quad R_- = \frac{3}{s+1},$$

e seguindo os passos do algoritmo 3.2, pode-se escrever:

$$\lambda = 1, \quad f(s) = \frac{1}{s-1} \quad e \quad g(s) = \frac{-1}{s+1}.$$

Utilizando-se a expressão (3.99) tem-se que  $K_{imp}(s)$  será dada por:

$$K_{imp}(s) = -(s+1).$$

Finalmente, usando  $\tau = 0,01$  e  $\tau = 0,001$  na expressão para  $K_\tau(s)$  (3.100), tem-se:

$$K_\tau(s) = \frac{10009(s+1)(s+1,5213)(s+0,6567)}{(s-9807)(s+1,43)(s+0,7147)}, \quad \text{para } \tau = 0,01, \quad e$$

$$K_\tau(s) = \frac{1000009(s+1)(s+1,1434)(s+0,8746)}{(s-998007)(s+1,1168)(s+0,8971)}, \quad \text{para } \tau = 0,001.$$

Note que para  $\tau = 0,01$  os pólos e zeros duplos  $-1$  sofreram maior perturbação do que para  $\tau = 0,001$ . Note ainda que mesmo para  $\tau = 0,01$  os pólos e zeros foram perturbados em uma mesma direção, ficando seus valores relativamente próximos.

□

### 3.3.4 Atenuação de ruído

O problema de atenuação de ruído é formulado como a minimização de  $\|W_4 T\|_\infty$ , onde  $T(s)$  é a função de sensibilidade complementar. Denotando  $W_4(s) = \frac{n_{w_4}(s)}{d_{w_4}(s)}$ , então  $T_1(s)$  e  $T_2(s)$  podem ser escritos, de acordo com as equações (3.30), na seguinte forma:

$$T_1(s) = W_4(s)N(s)Y(s) = \frac{n_{w_4}n_n n_y}{d_{w_4}d_n d_y} \quad e \quad T_2(s) = -W_4(s)N(s)M(s) = -\frac{n_{w_4}n_n n_m}{d_{w_4}d_n d_m}. \quad (3.101)$$

Realizando fatoração ‘inner-outer’ em  $T_2(s)$  encontra-se:

$$T_2(s) = T_{2_i}(s)T_{2_o}(s) = \frac{n_n^+ n_m^+}{(n_n^+)^*(n_m^+)^*} (-1) \frac{n_{w_4} n_n^- n_m^- (n_n^+)^*(n_m^+)^*}{d_{w_4} d_n d_m},$$

onde

$$T_{2_i}(s) = \frac{n_n^+ n_m^+}{(n_n^+)^*(n_m^+)^*} \quad e \quad T_{2_o}(s) = (-1) \frac{n_{w_4} n_n^- n_m^- (n_n^+)^*(n_m^+)^*}{d_{w_4} d_n d_m}. \quad (3.102)$$

A partir das expressões para  $T_1(s)$  e  $T_{2_i}(s)$  é possível obter uma expressão para  $R(s)$ , *i.e.*:

$$R(s) = T_{2_i}^*(s)T_1(s) = \frac{(n_n^+)^*(n_m^+)^* n_{w_4} n_n^- n_y}{n_m^+ d_{w_4} d_n d_y}. \quad (3.103)$$

Em seguida, fatorando  $R(s)$  em  $R_+(s)$ , anti-estável, e  $R_-(s)$ , estável, encontra-se:

$$R(s) = R_+(s) + R_-(s) = \frac{n_{r_+}}{n_m^+} + \frac{n_{r_-}}{d_{w_4} d_n d_y}, \quad (3.104)$$

onde  $n_{r_+}(s)$  e  $n_{r_-}(s)$  são os numeradores de  $R_+(s)$  e  $R_-(s)$ , respectivamente. Desta forma, as funções  $f(s)$  e  $g(s)$  para o problema de atenuação de ruído são descritas pelas seguintes expressões:

$$f(s) = \frac{n_f}{n_m^+} \quad \text{e} \quad g(s) = (-1)^p \frac{n_g}{(n_m^+)^*},$$

onde  $p$  é o grau de  $n_m^+(s)$ . Note que para uma planta estritamente própria, tem-se que  $T_{2_o}(s)$  é estritamente própria. Então,  $Q(s)$  ótimo, de acordo com o passo 8 do algoritmo 3.2, será impróprio. Desta forma é necessário obter uma função de transferência própria ( $Q_\tau(s)$ ) que aproxime  $Q_{imp}(s)$ , para então obter o controlador próprio  $K_\tau(s)$ . Nesta subseção expressões para  $K_{imp}(s)$  e  $K_\tau(s)$  serão obtidas, sendo então necessário encontrar  $U(s)$  e  $V(s)$ . Para tanto, observe que:

$$T_1 - T_2 Q_\tau = W_4 N Y + W_4 N M Q_\tau = W_4 N (Y + M Q_\tau) = W_4 N U,$$

e, portanto, pela expressão acima e pela equação (3.65), também válida para este caso, tem-se que:

$$W_4 N U = \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} + \left( T_1 - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} \right) \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu}.$$

Assim uma expressão para  $U(s)$  será dada por:

$$U = \frac{1}{n_{w_4} n_n^-} \left[ \frac{\lambda (-1)^p n_f d_{w_4} d_n d_y (\tau s + 1)^\nu + [n_{w_4} n_n^- n_y (n_n^+)^* n_g - \lambda (-1)^p n_f d_{w_4} d_n d_y] f(s, \tau)}{(n_n^+)^* n_g d_y (\tau s + 1)^\nu} \right]. \quad (3.105)$$

Como, de acordo com a equação (3.63),  $f(s, \tau) = (\tau s + 1)^\nu - 1$ , então  $U(s)$  pode ser escrito como:

$$U = \frac{1}{n_{w_4} n_n^-} \left[ \frac{\lambda (-1)^p n_f d_{w_4} d_n d_y + n_{w_4} n_n^- n_y (n_n^+)^* n_g f(s, \tau)}{(n_n^+)^* n_g d_y (\tau s + 1)^\nu} \right]. \quad (3.106)$$

O próximo passo é a determinação de  $V(s)$ . Para tanto, note que:

$$V = X - NQ_\tau,$$

e multiplicando-se a expressão acima por  $T_{2_o}$  obtém-se:

$$T_{2_o}V = T_{2_o}X - NT_{2_o}Q_\tau.$$

Substituindo-se o termo  $T_{2_o}Q_\tau$  de acordo com a equação (3.64) encontra-se:

$$T_{2_o}V = T_{2_o}X - N \left( T_{2_i}^* T_1 - \lambda \frac{f}{g} \right) \left( 1 - \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu} \right).$$

Multiplicando-se a equação acima por  $T_{2_i}(s)$  e fazendo  $T_1(s) = W_4(s)N(s)Y(s)$  e  $T_2(s) = -W_4(s)N(s)M(s)$ , obtém-se:

$$W_4MV = W_4(MX + NY) - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} - \left( W_4NY - \lambda T_{2_i} \frac{f}{g} \right) \frac{f(s, \tau)}{(\tau s + 1)^\nu}.$$

Como pela identidade de Bezout o termo  $MX + NY = 1$ , então a seguinte expressão para  $V(s)$  pode ser obtida:

$$V = \frac{1}{n_{w_4}n_m} \left[ \frac{[n_{w_4}(n_n^+)^*n_g d_n d_y - \lambda(-1)^p n_f n_n^+ d_{w_4} d_n d_y](\tau s + 1)^\nu}{d_y(n_n^+)^*n_g(\tau s + 1)^\nu} - \frac{[n_{w_4}n_n n_y(n_n^+)^*n_g + \lambda(-1)^p n_f n_n^+ d_{w_4} d_n d_y]f(s, \tau)}{d_y(n_n^+)^*n_g(\tau s + 1)^\nu} \right]. \quad (3.107)$$

Finalmente como  $K_\tau(s) = U(s)V^{-1}(s)$  tem-se:

$$K_\tau(s) = \frac{n_{K_\tau}(s)}{d_{K_\tau}(s)}, \quad (3.108)$$

onde

$$n_{K_\tau} = \lambda(-1)^p n_f d_{w_4} d_n d_y + n_{w_4} n_n^- n_y (n_n^+)^* n_g f(s, \tau), \quad (3.109)$$

$$d_{K_\tau} = n_n^- \{ [n_{w_4}(n_n^+)^*n_g d_n d_y - \lambda(-1)^p n_f n_n^+ d_{w_4} d_n d_y](\tau s + 1)^\nu - [n_{w_4}n_n n_y(n_n^+)^*n_g - \lambda(-1)^p n_f n_n^+ d_{w_4} d_n d_y]f(s, \tau) \} \quad (3.110)$$

Para determinar uma expressão para o controlador impróprio  $K_{imp}(s)$  basta fazer  $\tau = 0$  na equação (3.108) acima, resultando em:

$$K_{imp}(s) = \frac{n_m \lambda (-1)^p n_f d_{w_4} d_n d_y}{n_n^- [n_{w_4}(n_n^+)^*n_g d_n d_y - \lambda(-1)^p n_f n_n^+ d_{w_4} d_n d_y]}. \quad (3.111)$$

Observe na equação (3.111) que o termo  $d_n(s)d_y(s)$  é um fator comum tanto do numerador quanto do denominador, o que faz com que para o controlador impróprio haja o cancelamento exato de  $d_n d_y$ . Deve ser ressaltado que isto não ocorre para  $K_\tau(s)$ . Desta forma a expressão para  $K_{imp}(s)$  se torna:

$$K_{imp} = \frac{n_m \lambda (-1)^p n_f d_{w_4}}{n_n^- [n_{w_4} (n_n^+)^* n_g - \lambda (-1)^p n_f n_n^+ d_{w_4}]}. \quad (3.112)$$

Da mesma forma que observado para os demais objetivos de projeto, para os controladores próprio e impróprio deste caso, há ainda o cancelamento de um termo,  $n_m^+(s)$ . Para verificar este fato, note que:

$$X_S = R - \lambda \frac{f}{g} = \frac{n_{w_4} (n_n^+)^* (n_m^+)^* n_n^- n_y n_g - \lambda (-1)^p n_f (n_m^+)^* d_n d_y d_{w_4}}{d_n d_y n_g n_m^+ d_{w_4}}.$$

Como  $X_S(s) \in RH_\infty$ , então o numerador de  $X_S(s)$  pode ser reescrito como:

$$n_{w_4} (n_n^+)^* n_n^- n_y n_g - \lambda (-1)^p n_f d_{w_4} d_n d_y = n_m^+ \chi,$$

onde foi usado o fato de  $n_m^+ \neq (n_m^+)^*$ <sup>5</sup>. Escrevendo  $d_n d_y = n_m n_x + n_n n_y$ , de acordo com a identidade de Bezout e para denominadores iguais de  $N(s)$  e  $M(s)$  e de  $X(s)$  e  $Y(s)$ , resulta na seguinte equação:

$$n_{w_4} (n_n^+)^* n_n^- n_y n_g - \lambda (-1)^p n_f d_{w_4} (n_m n_x + n_n n_y) = n_m^+ \chi,$$

que pode ser reorganizada destacando os termos dependentes de  $n_m^+$  à direita:

$$n_{w_4} (n_n^+)^* n_n^- n_y n_g - \lambda (-1)^p n_f d_{w_4} n_n n_y = n_m^+ \chi + \lambda (-1)^p d_{w_4} n_f n_x n_m = n_m^+ \tilde{\chi}.$$

Como  $n_y \neq n_m^+$ <sup>6</sup>, então:

$$n_{w_4} (n_n^+)^* n_n^- n_g - \lambda (-1)^p n_f d_{w_4} n_n = n_m^+ \tilde{\chi}_4. \quad (3.113)$$

Com este resultado, por simples observação verifica-se o cancelamento de  $n_m^+(s)$  na expressão (3.112) para  $K_{imp}(s)$ , resultando em:

$$K_{imp}(s) = \frac{n_m^- \lambda (-1)^p n_f d_{w_4}}{\tilde{\chi}_4}. \quad (3.114)$$

<sup>5</sup>Observe que se a função de transferência da planta for estável, ou seja,  $n_m^+ = 1$ , então a solução deste problema  $H_\infty$  é trivial.

<sup>6</sup>Provado de maneira semelhante aos casos anteriores.

Observe, de acordo com a equação (3.113), que  $\tilde{\chi}_4$  pode ser nulo e, portanto, nem sempre existirá o controlador impróprio para o problema de atenuação de ruído. Uma condição suficiente para isto ocorrer é a função de transferência da planta ser de segunda ordem com um zero estável, onde um pólo é estável e o outro é instável. A prova deste fato é longa e tediosa e será omitida. Note ainda que  $K_{imp}(s)$  sempre existe para os demais objetivos de projeto.

Para verificar o cancelamento de  $n_m^+(s)$  na expressão para  $K_\tau(s)$  observe o denominador de  $K_\tau(s)$ ,  $d_{K_\tau}$ , reescrito abaixo:

$$\begin{aligned} d_{K_\tau} &= n_n^- \{ [n_{w_4}(n_n^+)^* n_g - \lambda(-1)^p n_f n_n^+ d_{w_4}] (\tau s + 1)^\nu d_n d_y - \\ &\quad - [n_{w_4} n_n n_y (n_n^+)^* n_g - \lambda(-1)^p n_f n_n^+ d_{w_4} d_n d_y] f(s, \tau) \}. \end{aligned}$$

Fazendo o termo  $n_n n_y = d_n d_y - n_m n_x$  e usando a equação (3.113) na equação acima tem-se:

$$d_{K_\tau} = n_m^+ \tilde{\chi}_4 (\tau s + 1)^\nu d_n d_y - n_m^+ \tilde{\chi}_4 f(s, \tau) d_n d_y + n_m n_{w_4} n_x (n_n^+)^* n_n^- n_g f(s, \tau).$$

Como  $n_{K_\tau}(s)$ , dado em (3.109) tem como fator comum  $n_m(s)$ , então  $n_m^+$  pode ser cancelado na expressão para  $K_\tau(s)$ , resultando em:

$$K_\tau(s) = \frac{n_m^- [\lambda(-1)^p n_f d_{w_4} d_n d_y + n_{w_4} n_n^- n_y (n_n^+)^* n_g f(s, \tau)]}{\tilde{\chi}_4 d_n d_y + n_m^- n_{w_4} n_x (n_n^+)^* n_n^- n_g f(s, \tau)}. \quad (3.115)$$

Para ilustrar os resultados encontrados, um exemplo será apresentado a seguir.

**Exemplo 3.4** *Considere o problema  $H_\infty$  (Keel e Bhattacharyya, 1997) de atenuação do sinal de ruído introduzido pelos sensores, onde:*

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 0,5s - 0,5},$$

e

$$W_4(s) = \frac{n_{w_4}(s)}{d_{w_4}(s)} = \frac{s + 0,1}{s + 1}.$$

Para resolver este problema o primeiro passo é determinar  $N(s)$  e  $M(s)$ :

$$N(s) = \frac{n_n(s)}{d_n(s)} = \frac{s - 1}{(s + 1)^2} \quad e \quad M(s) = \frac{n_m(s)}{d_m(s)} = \frac{(s - 0,5)(s + 1)}{(s + 1)^2}.$$

Em seguida deve-se determinar  $X(s)$  e  $Y(s)$ , que satisfazem a identidade de Bezout (3.23),

$$X(s) = \frac{n_x(s)}{d_x(s)} = \frac{s+7}{s+1} \quad e \quad Y(s) = \frac{n_y(s)}{d_y(s)} = -\frac{4,5(s+1)}{s+1},$$

e obter expressões para  $T_1(s)$  e  $T_2(s)$ , de acordo com as equações (3.101):

$$T_1(s) = \frac{n_{w_4} n_n n_y}{d_{w_4} d_n d_y} = -4,5 \frac{(s+0,1)(s-1)}{(s+1)^3} \quad e$$

$$T_2(s) = -\frac{n_{w_4} n_n n_m}{d_{w_4} d_n d_m} = -\frac{(s+0,1)(s-1)(s-0,5)}{(s+1)^4}.$$

Realizando fatoração ‘inner-outer’ em  $T_2(s)$  tem-se, utilizando (3.102) que:

$$T_{2_i}(s) = \frac{(s-1)(s-0,5)}{(s+1)(s+0,5)} \quad e \quad T_{2_o}(s) = -\frac{(s+0,1)(s+0,5)}{(s+1)^3}$$

De acordo com (3.103),  $R(s)$  será dada por:

$$R(s) = T_{2_i}^*(s)T_1(s) = -4,5 \frac{(s+0,5)(s+0,1)}{(s-0,5)(s+1)^2}.$$

Separando  $R(s) = R_+(s) + R_-(s)$ , conforme mostrado em (3.104), obtém-se:

$$R_+(s) = \frac{-1,2}{(s-0,5)} \quad e \quad R_-(s) = \frac{-3,3s-1,95}{(s+1)^2},$$

e, a partir de  $R_+(s)$ , seguindo os passos do algoritmo 3.2, tem-se:

$$\lambda = 1,2, \quad f(s) = \frac{1}{(s-0,5)} \quad e \quad g(s) = -\frac{1}{(s+0,5)}.$$

O controlador  $K_{imp}(s)$  é então obtido utilizando diretamente a equação (3.112):

$$K_{imp}(s) = -\frac{1,2(s+1)}{2,2}.$$

Utilizando  $\tau = 0,01$  na equação (3.115) obtém-se  $K_\tau(s)$ :

$$K_\tau(s) = -124,5 \frac{(s+1)(s+0,9657+j0,1771)(s+0,9657-j0,1771)}{(s+225,15)(s+0,9765+j0,1534)(s+0,9765-j0,1534)},$$

que revela que também neste exemplo há pólos e zeros muito próximos.  $\square$

**Observação 3.3** Quando a função de transferência da planta  $G(s)$  for biprópria, então, para nenhum dos objetivos de projeto é necessário fazer uma aproximação para obtenção de  $Q_\tau(s)$ . Assim sendo, para estes casos, uma expressão para o controlador próprio é obtida igual à expressão encontrada para  $K_{imp}(s)$ .  $\square$

As fórmulas para os controladores próprios e impróprios desenvolvidas nesta seção podem ser resumidas na tabela 3.2 e irão facilitar o entendimento da redução de ordem dos controladores  $H_\infty$ , que será o objetivo da próxima seção.

Objetivo de projeto	$K_{imp}(s)$	$K_\tau(s)$
$\min \ W_1 K S\ _\infty$	$\frac{(-1)^p \lambda n_f n_m^- d_{w_1}}{\tilde{\chi}_1}$	$\frac{(-1)^p \lambda n_f n_m^- d_{w_1}}{\tilde{\chi}_1}$
$\min \ W_2 S\ _\infty$	$\frac{n_m^-}{n_n^-} \left[ \frac{\tilde{\chi}_2}{\lambda (-1)^p n_f d_{w_2}} \right]$	$\frac{n_m^- \tilde{\chi}_2 d_x d_m + n_n^- n_{w_2} n_y (n_m^+)^* n_g n_m^- f(s, \tau)}{n_n^- [\lambda (-1)^p n_f d_{w_2} d_x d_m + n_{w_2} n_x n_m^- (n_m^+)^* n_g f(s, \tau)]}$
$\min \ W_3 S G\ _\infty$	$\frac{\tilde{\chi}_3}{\lambda (-1)^p n_n^- n_f d_{w_3}}$	$\frac{\tilde{\chi}_3 d_n d_x + n_{w_3} (n_n^-)^2 (n_n^+)^* n_g n_y f(s, \tau)}{n_n^- [\lambda (-1)^p n_f d_{w_3} d_n d_x + n_{w_3} n_x n_n^- (n_n^+)^* n_g f(s, \tau)]}$
$\min \ W_4 T\ _\infty$	$\frac{n_m^- \lambda (-1)^p n_f d_{w_4}}{\tilde{\chi}_4}$	$\frac{n_m^- [\lambda (-1)^p n_f d_{w_4} d_n d_y + n_{w_4} n_n^- n_y (n_n^+)^* n_g f(s, \tau)]}{\tilde{\chi}_4 d_n d_y + n_m^- n_{w_4} n_x (n_n^+)^* n_n^- n_g f(s, \tau)}$

Tabela 3.2: Expressões analíticas para  $K_\tau(s)$  e  $K_{imp}(s)$

### 3.4 Redução da ordem de controladores robustos $H_\infty$

Na seção 3.2 foi observado que para uma planta com função de transferência estritamente própria, os objetivos de projeto formulados como  $\min \|W_2 S\|_\infty$ ,  $\min \|W_3 S G\|_\infty$  e  $\min \|W_4 T\|_\infty$  levam a controladores ótimos impróprios. Para contornar esta situação controladores subótimos são obtidos realizando-se uma aproximação sobre  $Q_{imp}(s)$ , dividindo-o pelo fator  $(\tau s + 1)^\nu$ , onde, de acordo com a observação 3.2,  $\tau$  é escolhido positivo e suficientemente pequeno. No entanto, os controladores próprios encontrados possuem ordem relativamente alta quando comparados aos seus respectivos controladores impróprios. Seria interessante então que fosse possível reduzir e saber o quanto é possível reduzir a ordem destes controladores subótimos. O teorema a seguir apresenta um resultado que relaciona pólos e zeros de  $K_\tau(s)$  e de  $K_{imp}(s)$ , fornecendo uma maneira de saber quando é possível a redução da ordem de  $K_\tau(s)$ .

**Teorema 3.6** *Sejam*

$$K_{imp}(s) = \frac{b_{imp}(s)}{a_{imp}(s)},$$

onde  $b_{imp}(s)$  e  $a_{imp}(s)$  são os polinômios obtidos antes dos cancelamentos mostrados na seção anterior, e

$$K_\tau(s) = \frac{b_\tau(s)}{a_\tau(s)}.$$

Então, para  $\tau$  suficientemente pequeno,  $a_\tau(s) \approx a_{imp}(s) \prod_{i=1}^\zeta (s - p_i)$ , onde  $\zeta$  é o grau relativo da planta e  $p_i$  são pólos acrescentados ao denominador de  $K_\tau(s)$  para

torná-lo próprio. Além disso,  $b_\tau(s) \approx k_\tau b_{imp}(s)$ , onde  $k_\tau$  é o ganho necessário para fazer  $K_{imp}(s)$  e  $K_\tau(s)$  terem o mesmo ganho dc.

**Prova.** Para provar o teorema acima, inicialmente é necessário observar que os controladores próprios (tabela 3.2) podem ser escritos como:

$$K_\tau(s) = \frac{b_{imp}(s) + b(s)f(s, \tau)}{a_{imp}(s) + a(s)f(s, \tau)},$$

onde  $gr[b(s)f(s, \tau)] = gr[b_{imp}(s)]$  e  $gr[a(s)f(s, \tau)] = gr[a_{imp}(s)] + \zeta$ , onde  $gr[\cdot]$  denota grau. Note ainda que, como  $f(s, \tau) = (\tau s + 1)^\nu - 1$  então, os termos  $b(s)f(s, \tau)$  e  $a(s)f(s, \tau)$ , possuem todos os seus coeficientes dependentes de  $\tau$ , portanto, para  $\tau$  suficientemente pequeno estes polinômios podem ser interpretados como perturbações sobre os coeficientes do numerador e denominador de  $K_{imp}(s)$ . Desta forma, utilizando os resultados apresentados nos corolários 2.1 e 2.2 verifica-se que fazendo  $\tau$  pequeno o suficiente,  $a_\tau(s)$  e  $b_\tau(s)$  terão zeros próximos dos zeros de  $a_{imp}(s)$  e  $b_{imp}(s)$ , respectivamente. Além disso,  $Q_\tau(s) = \frac{Q_{imp}(s)}{(\tau s + 1)^\nu}$ , então,  $K_{imp}(0) = K_\tau(0)$ , o que mostra que  $K_{imp}(s)$  e  $K_\tau(s)$  têm o mesmo ganho DC.  $\square$

**Observação 3.4** De acordo com o teorema 3.6 vê-se que  $K_\tau(s)$  tem o mesmo número de zeros que  $K_{imp}(s)$  obtido antes do cancelamento mostrado na seção anterior, isto é, para o controlador impróprio obtido a partir da expressão para  $K_\tau(s)$  fazendo  $\tau = 0$ . Assim sendo,  $K_\tau(s)$  possuirá pólos e zeros quase canceláveis para  $\tau$  suficientemente pequeno.  $\square$

Isto revela que o número de modos fortemente controláveis e observáveis de  $K_\tau(s)$  é dado pelo número de zeros de  $K_{imp}(s)$  após o cancelamento. Desta forma, uma vez que se tem uma expressão para  $K_{imp}(s)$  de ordem mínima, a redução por truncamento balanceado pode ser utilizada para se obter um controlador próprio de ordem menor,  $K_{ban}(s)$ , com resposta em frequência próxima à de  $K_\tau(s)$ . Note ainda que a redução sobre  $K_\tau(s)$  deve ser tal que  $K_{ban}(s)$  e  $K_{imp}(s)$  de ordem mínima tenham o mesmo número de zeros e  $K_{ban}(s)$  e  $K_\tau(s)$  tenham o mesmo número de pólos instáveis. Conforme foi visto na seção anterior, os modos pouco controláveis e/ou observáveis que serão descartados de  $K_\tau(s)$  são os que formam o polinômio

$d_x(s)d_m(s)$  para  $d_x(s) = d_y(s)$  e  $d_m(s) = d_n(s)$ , isto é, o cancelamento será feito somente sobre modos estáveis. É importante ressaltar também que o valor do custo  $H_\infty$  do controlador  $K_\tau(s)$ ,  $\gamma_\tau$ , não deve ser muito alterado com a sua redução por truncamento balanceado, uma vez que os controladores  $K_\tau(s)$  e  $K_{ban}(s)$  têm respostas em frequência relativamente próximas.

Para demonstrar os resultados apresentados será feita redução por truncamento balanceado nos controladores próprios dos exemplos da seção anterior, utilizando para tanto o algoritmo robusto 3.1 (Garcia e Basilio, 2000).

**Exemplo 3.5** *Considere o problema formulado no exemplo 3.2 de  $\min \|W_2S\|_\infty$ . Neste exemplo o controlador impróprio  $K_{imp}(s)$  obtido foi:*

$$K_{imp}(s) = -4 \frac{(s+1)}{3},$$

e o controlador próprio  $K_\tau(s)$  obtido fazendo  $\tau = 0,001$  foi:

$$K_\tau(s) = \frac{4027(s+2,9584)(s+2,0145)(s+1)}{(s-3022,97)(s+2,9557)(s+2,0146)}.$$

Conforme comentado anteriormente, para este valor de  $\tau$ ,  $K_\tau(s)$  tem os modos correspondentes a  $d_x d_m$  pouco alterados, e, além disso, alterados em uma mesma direção, sendo, portanto, a redução por truncamento balanceado conveniente neste caso. Utilizando-se o algoritmo 3.1 obtém-se:

$$K_{ban}(s) = \frac{4027s + 4037,5}{s - 3023}.$$

Definindo  $e(\%)$  como o erro percentual entre as respostas em frequência de  $K_\tau(j\omega)$  e  $K_{ban}(j\omega)$  para cada  $\omega$  de acordo com a seguinte expressão:

$$e(\%) = \frac{|K_\tau(j\omega) - K_{ban}(j\omega)|}{|K_\tau(j\omega)|} \times 100\%, \quad (3.116)$$

e, representando-o graficamente na figura 3.4, observa-se que ambos os controladores possuem praticamente a mesma resposta em frequência. Note ainda que  $\|K_\tau - K_{ban}\|_\infty = 0,01999$ , o que reforça ainda mais a conveniência de se usar redução por truncamento balanceado neste caso. Além disso,  $\gamma_\tau = 3,02169$  e  $\gamma_{ban} = 3,02195$ .  $\square$

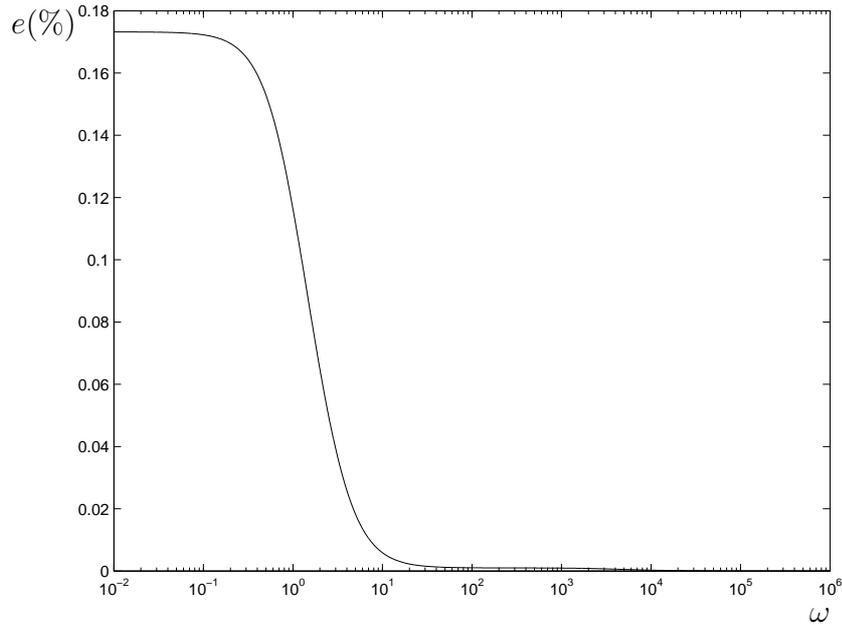


Figura 3.4: Representação gráfica do erro percentual  $e(\%)$  para o exemplo 3.5.

**Exemplo 3.6** Considere o problema  $H_\infty$  de rejeição de perturbação apresentado no exemplo 3.3. Neste exemplo o controlador impróprio obtido foi:

$$K_{imp}(s) = -(s + 1),$$

e dois valores para  $\tau$  foram escolhidos para a obtenção do controlador próprio  $K_\tau(s)$ .

Para  $\tau = 0,01$  obteve-se:

$$K_\tau(s) = \frac{10009(s + 1)(s + 1,5213)(s + 0,6567)}{(s - 9807)(s + 1,43)(s + 0,7147)},$$

e, para  $\tau = 0,001$  obteve-se:

$$K_\tau(s) = \frac{1000009(s + 1)(s + 1,1434)(s + 0,8746)}{(s - 998007)(s + 1,1168)(s + 0,8971)}.$$

Note que ambos os controladores tiveram seus modos correspondentes a  $d_x d_n$  perturbados em uma mesma direção, sendo que para  $\tau = 0,001$  estes sofreram menor perturbação do que para  $\tau = 0,01$ . Realizando redução por truncamento balanceado nos controladores acima, até que estes tenham o mesmo número de zeros que  $K_{imp}(s)$  obtém-se:

$$K_{ban}(s) = \frac{10009s + 10342}{s - 9807}, \quad \text{para } \tau = 0,01, \text{ e}$$

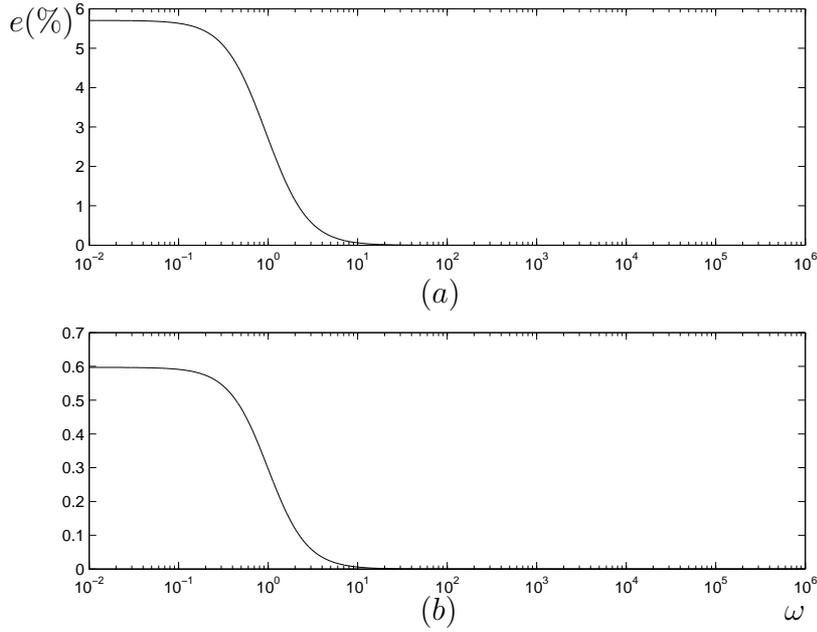


Figura 3.5: (a) Representação gráfica do erro percentual  $e(\%)$  para  $\tau = 0,01$ ; (b) representação gráfica do erro percentual  $e(\%)$ , para  $\tau = 0,001$ .

$$K_{ban}(s) = \frac{1000009s + 1004109}{s - 998007}, \quad \text{para } \tau = 0,001.$$

Na figura 3.5(a) e 3.5(b) são apresentados os gráficos para os erros percentuais entre os controladores  $K_\tau(s)$  e  $K_{ban}(s)$ , obtidos da mesma forma que a apresentada pela equação (3.116), para  $\tau = 0,01$  e  $\tau = 0,001$ , respectivamente. Por estes gráficos observa-se que estes controladores tiveram resposta em frequência extremamente próximas para ambos os casos. Além disso, tem-se que:

$$\|K_\tau(j\omega) - K_{ban}(j\omega)\|_\infty = 0,0569 \quad \text{para } \tau = 0,01, \text{ e}$$

$$\|K_\tau(j\omega) - K_{ban}(j\omega)\|_\infty = 0,005972 \quad \text{para } \tau = 0,001.$$

Os valores para os custos  $H_\infty$  encontrados foram  $\gamma_\tau = 1,0497$  e  $\gamma_{ban} = 1,0577$  para  $\tau = 0,01$  e  $\gamma_\tau = 1,005$  e  $\gamma_{ban} = 1,0062$  para  $\tau = 0,001$ .  $\square$

**Exemplo 3.7** Para o problema  $H_\infty$  de atenuação de ruído introduzido pelos sensores apresentado no exemplo 3.4 o controlador impróprio  $K_{imp}(s)$  encontrado foi:

$$K_{imp}(s) = -\frac{1,2(s+1)}{2,2},$$

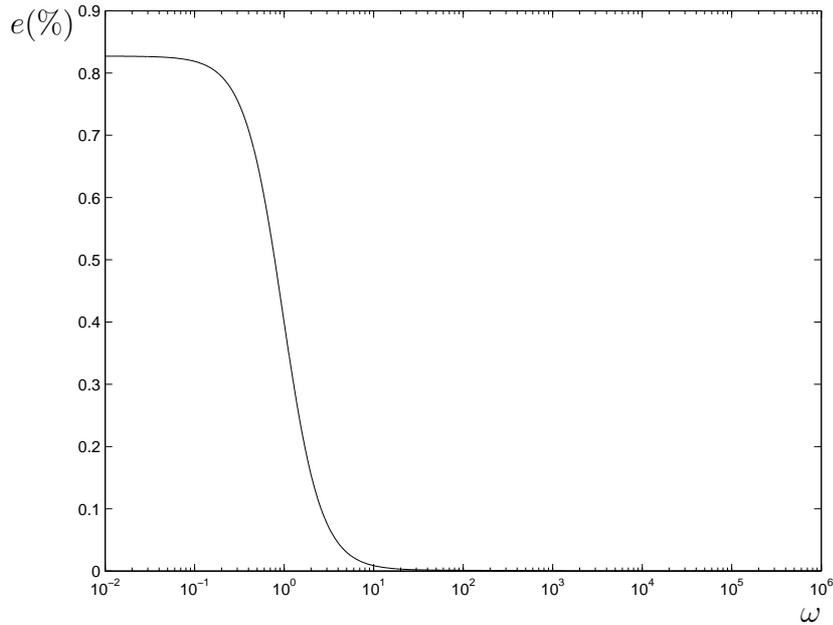


Figura 3.6: Representação gráfica do erro percentual  $e(\%)$  para o exemplo 3.7.

e, utilizando  $\tau = 0,01$  obteve-se o controlador  $K_\tau(s)$ :

$$K_\tau(s) = \frac{-124,5(s+1)(s+0,9657+j0,1771)(s+0,9657-j0,1771)}{(s+225,15)(s+0,9765+j0,1534)(s+0,9765-j0,1534)}.$$

Realizando redução por truncamento balanceado até que  $K_\tau(s)$  tenha o mesmo número de zeros que  $K_{imp}(s)$  de ordem mínima, encontra-se:

$$K_{ban}(s) = \frac{-124,5s - 121,8078}{s + 225,1471},$$

e, de acordo com a figura 3.6, o erro percentual entre  $K_{ban}(s)$  e  $K_\tau(s)$  é baixo, e conseqüentemente, as respostas em frequência para estes controladores são muito próximas. Além disso,

$$\|K_\tau(j\omega) - K_{ban}(j\omega)\|_\infty = 0,0044.$$

Note ainda que os valores para os custos  $H_\infty$  para este exemplo foram  $\gamma_\tau = 1,2396$  e  $\gamma_{ban} = 1,3170$ .  $\square$

Nos exemplos apresentados nesta subseção observa-se que a redução por truncamento balanceado pode ser satisfatoriamente feita, tendo o controlador reduzido

$K_{ban}(s)$ , em todos os casos estudados, praticamente a mesma resposta em frequência que o controlador  $K_\tau(s)$ . Desta forma, de agora em diante, o controlador próprio obtido de acordo com a tabela 3.2 e reduzido por truncamento balanceado,  $K_{ban}(s)$ , será considerado nominal e o vetor constituído por todos os coeficientes do numerador e denominador de  $K_{ban}(s)$  será denotado por  $\underline{p}^0$ .

### 3.5 Conclusões

Neste capítulo aspectos fundamentais da teoria de controle robusto  $H_\infty$  foram revisitos e um método de projeto de controladores robustos (Francis, 1987) foi amplamente analisado para problemas de 1-bloco. Expressões analíticas para os controladores próprios e impróprios foram obtidas, revelando que a ordem dos controladores próprios é elevada quando comparada ao número de zeros de  $K_{imp}(s)$ . Além disso, verificou-se que a escolha de  $\tau$  suficientemente pequeno torna os pólos e zeros de  $K_\tau(s)$  relativamente próximos, o que sugere a realização de redução por truncamento balanceado sobre  $K_\tau(s)$ , para se obter  $K_{ban}(s)$ , com respostas em frequência arbitrariamente próximas, conforme foi verificado através de alguns exemplos.

## Capítulo 4

# Controle robusto $H_\infty$ com objetivo de margem de estabilidade paramétrica relativa

Neste capítulo será mostrado como a redução de ordem dos controladores robustos  $H_\infty$  pelo método apresentado no capítulo 3 pode influenciar na margem de estabilidade paramétrica relativa deste controlador. Além disso, será mostrado que é possível levar a margem de estabilidade paramétrica relativa a um valor aceitável fazendo alterações em um controlador  $H_\infty$  considerado nominal, de forma que o controlador com perturbação atenda satisfatoriamente a um determinado objetivo de projeto.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 4.1 será mostrado que a redução da ordem do controlador por truncamento balanceado pode melhorar a sua margem de estabilidade paramétrica relativa e na seção 4.2 o objetivo de margem de estabilidade paramétrica relativa é incorporado ao projeto de controladores robustos  $H_\infty$ . Exemplos numéricos serão utilizados para ilustrar os resultados apresentados.

## 4.1 Melhoria da margem de estabilidade paramétrica relativa com o uso de redução por truncamento balanceado

A redução da ordem do controlador é geralmente recomendada tendo em vista que controladores de ordem menor são mais fáceis de serem implementados. Nesta seção uma outra vantagem será apresentada para a redução da ordem do controlador por truncamento balanceado, que é a melhora da margem de estabilidade paramétrica relativa.

Conforme mostrado no capítulo anterior, dependendo da escolha de  $\tau$ ,  $K_\tau(s)$  possui a mais que  $K_{ban}(s)$  somente pólos e zeros quase canceláveis. Isto faz com que, em geral, o vetor  $\underline{p}_\tau^0$ , formado pelos coeficientes do numerador e denominador de  $K_\tau(s)$ , tenha norma Euclidiana maior do que o vetor  $\underline{p}_{ban}^0$ , que é constituído pelos coeficientes do numerador e denominador de  $K_{ban}(s)$ , isto é:

$$\|\underline{p}_\tau^0\|_2 > \|\underline{p}_{ban}^0\|_2. \quad (4.1)$$

Além disso, os pólos e zeros quase canceláveis de  $K_\tau(s)$  pouco influenciam na sua resposta em frequência, conforme verificado nos exemplos da seção 3.4, o que sugere que estes não serão demasiadamente alterados no cálculo da margem de estabilidade paramétrica. Portanto, a maior perturbação será realizada sobre aqueles pólos e zeros ‘presentes’ em  $K_\tau(s)$  e  $K_{ban}(s)$  e nos seus respectivos ganhos. Um outro importante fato a ser observado é que a margem de estabilidade paramétrica de  $K_\tau(s)$ , denotada por  $\rho_\tau^*$ , é em alguns casos, aproximadamente igual à margem de estabilidade paramétrica de  $K_{ban}(s)$ , denotada por  $\rho_{ban}^*$ , ou seja,

$$\rho_\tau^* \approx \rho_{ban}^*. \quad (4.2)$$

Uma condição suficiente para que  $\rho_\tau^* \approx \rho_{ban}^*$  é que as normas-2 dos menores vetores de perturbação  $\Delta \underline{p}_\tau$  e  $\Delta \underline{p}_{ban}$  ocorram ambas em uma frequência  $\omega \ll 1$  e os modos a serem descartados na redução por truncamento balanceado sejam aproximadamente iguais a  $-1$  (como pôde ser observado no capítulo 3 este modos são correspondentes

aos zeros de  $d_x(s)d_m(s)$ , para  $d_x(s) = d_y(s)$  e  $d_m(s) = d_n(s)$ , e portanto podem ser escolhidos). Para ilustrar este fato a seguir um exemplo simples será apresentado.

**Exemplo 4.1** *Considere a seguinte função de transferência da planta:*

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} = \frac{\alpha_1 s + \alpha_0}{s^2 + \beta_1 s + \beta_0},$$

e sejam as funções de transferência dos controladores  $K_\tau(s)$  e  $K_{ban}(s)$ , onde  $K_{ban}(s)$  é obtido por redução por truncamento balanceado de  $K_\tau(s)$ , respectivamente dados por:

$$K_\tau(s) = \frac{\epsilon_{2\tau} s^2 + \epsilon_{1\tau} s + \epsilon_{0\tau}}{s^2 + \phi_{1\tau} s + \phi_{0\tau}} \quad e \quad K_{ban}(s) = \frac{\epsilon_1 s + \epsilon_0}{s + \phi_0}.$$

Suponha que o modo quase cancelável de  $K_\tau(s)$  seja aproximadamente igual a  $-1$ . Desta forma, uma vez que os ganhos de  $K_\tau(s)$  e  $K_{ban}(s)$  são aproximadamente iguais, assim como os pólos e zeros ‘presentes’ em ambos, então  $\epsilon_{0\tau} \approx \epsilon_0$  e  $\phi_{0\tau} \approx \phi_0$ . Procedendo de acordo com o capítulo 2 para o cálculo da margem de estabilidade paramétrica para  $K_\tau(s)$  é montada a seguinte expressão:

$$\sum_{i=1}^5 a_{i\tau}(j\omega) \Delta p_{i\tau} = -\delta(j\omega, \underline{p}_\tau^0) \quad (4.3)$$

onde

$$a_{i\tau}(j\omega) = \begin{cases} N_G(j\omega) s^{i-1}, & i = 1, 2, 3. \\ D_G(j\omega) s^{i-4}, & i = 4, 5. \end{cases}$$

Note que a expressão 4.3 obtida acima pode ainda ser escrita de acordo com (2.15) da seguinte forma:

$$A_\tau(j\omega) \Delta \underline{p}_\tau = -\underline{y}_\tau(j\omega). \quad (4.4)$$

Procedendo de maneira análoga para  $K_{ban}(s)$  obtém-se:

$$\sum_{i=1}^3 a_{i_{ban}}(j\omega) \Delta p_{i_{ban}} = -\delta(j\omega, \underline{p}_{ban}^0) \quad (4.5)$$

onde

$$a_{i_{ban}}(j\omega) = \begin{cases} N_G(j\omega) s^{i-1}, & i = 1, 2. \\ D_G(j\omega) s^{i-3}, & i = 3. \end{cases}$$

Para  $K_{ban}(s)$  também é possível escrever (4.5) da seguinte forma:

$$A_{ban}(j\omega) \Delta \underline{p}_{ban} = -\underline{y}_{ban}(j\omega). \quad (4.6)$$

Observe também que o polinômio característico em malha fechada utilizando-se  $K_\tau(s)$  é dado por:

$$\delta(j\omega, \underline{p}_\tau^0) = a_{1_\tau}(j\omega)\epsilon_{0_\tau} + a_{2_\tau}(j\omega)\epsilon_{1_\tau} + a_{3_\tau}(j\omega)\epsilon_{2_\tau} + a_{4_\tau}(j\omega)\phi_{0_\tau} + a_{5_\tau}(j\omega)\phi_{1_\tau} + D_G(j\omega)(j\omega)^2 \quad (4.7)$$

e que o polinômio característico em malha fechada utilizando-se  $K_{ban}(s)$  é dado por:

$$\delta(j\omega, \underline{p}_{ban}^0) = a_{1_{ban}}(j\omega)\epsilon_0 + a_{2_{ban}}(j\omega)\epsilon_1 + a_{3_{ban}}(j\omega)\phi_0 + D_G(j\omega)(j\omega). \quad (4.8)$$

Portanto, para  $\omega \ll 1$  observa-se que os termos de  $a_{i_\tau}(j\omega)$ , para  $i = 2, 3, 5$ , e  $a_{i_{ban}}(j\omega)$ , para  $i = 2$  serão muito menores que os demais, o que faz com que as respectivas colunas de  $A_\tau(j\omega)$  e  $A_{ban}(j\omega)$  sejam aproximadamente nulas. Além disso, facilmente verifica-se que  $a_{1_\tau}(j\omega) = a_{1_{ban}}(j\omega)$  e  $a_{4_\tau}(j\omega) = a_{3_{ban}}(j\omega)$ , e, portanto, a partir de (4.7) e (4.8) e pelo fato de  $\epsilon_{0_\tau} \approx \epsilon_0$  e  $\phi_{0_\tau} \approx \phi_0$ , tem-se que

$$\delta(j\omega, \underline{p}_\tau^0) \approx \delta(j\omega, \underline{p}_{ban}^0).$$

Desta forma, como  $\|\Delta \underline{p}_\tau\|_2^2 = \underline{y}_\tau^T (A_\tau A_\tau^T)^{-1} \underline{y}_\tau$  e  $\|\Delta \underline{p}_{ban}\|_2^2 = \underline{y}_{ban}^T (A_{ban} A_{ban}^T)^{-1} \underline{y}_{ban}$ , então,  $\rho_\tau^* \approx \rho_{ban}^*$ .  $\square$

Desta forma, a partir da definição de margem de estabilidade paramétrica relativa (2.24) e das equações (4.1) e (4.2),  $\mu_\tau$  e  $\mu_{ban}$ , correspondentes a  $\rho_\tau^*$  e  $\rho_{ban}^*$ , respectivamente, serão tais que

$$\mu_\tau < \mu_{ban}.$$

Para os casos tratados em Keel e Bhattacharyya (1997) as margens de estabilidade paramétrica de  $K_\tau(s)$  e  $K_{ban}(s)$  têm seus valores bastante próximos. Para ilustrar este resultado, serão apresentados a seguir alguns exemplos, sendo a margem de estabilidade paramétrica calculada considerando-se o coeficiente de maior grau do denominador do controlador fixo.

**Exemplo 4.2** Considere os controladores  $K_\tau(s)$  e  $K_{ban}(s)$  obtidos no exemplo 3.5, repetidos aqui por conveniência:

$$\begin{aligned} K_\tau(s) &= \frac{4027(s+2,9584)(s+2,0145)(s+1)}{(s-3022,97)(s+2,9557)(s+2,0146)} \\ &= \frac{4027s^3 + 24052,8683s^2 + 44025,5673s + 23999,699}{s^3 - 3017,9997s^2 - 15019,1132s - 18000,4357}, \end{aligned}$$

e

$$K_{ban}(s) = \frac{4027(s + 1, 0026)}{s - 3023} = \frac{4027s + 4037, 5}{s - 3023}.$$

Calculando as margens de estabilidade paramétrica para  $K_\tau(s)$  e  $K_{ban}(s)$ , respectivamente, obtém-se:

$$\hat{\rho}_\tau^* = 711, 8569 \quad e \quad \hat{\rho}_{ban}^* = 708, 9257.$$

Os vetores de perturbação  $\Delta\hat{\underline{p}}_\tau$  e  $\Delta\hat{\underline{p}}_{ban}$  correspondentes às margens de estabilidade paramétrica acima são:

$$\Delta\hat{\underline{p}}_\tau = [ -0, 0029 \quad 0, 0554 \quad 26, 1438 \quad -502, 6268 \quad 0, 0554 \quad 26, 1496 \quad -502, 7318 ].$$

$$\Delta\hat{\underline{p}}_{ban} = [ 17, 6620 \quad -501, 0113 \quad -501, 2498 ].$$

Note que os controladores obtidos a partir de  $K_\tau(s)$  e  $K_{ban}(s)$  perturbando-se os seus coeficientes com os vetores  $\Delta\hat{\underline{p}}_\tau$  e  $\Delta\hat{\underline{p}}_{ban}$ , são respectivamente dados por

$$\bar{K}_\tau(s) = \frac{3524, 37(s + 4, 2906)(s + 1, 4372)(s + 1, 1043)}{(s - 3524, 99)(s + 2, 1274 + 0, 762j)(s + 2, 1274 - 0, 762j)}, \quad (4.9)$$

e

$$\bar{K}_{ban}(s) = \frac{3525, 99(s + 1, 1501)}{(s - 3524, 25)}. \quad (4.10)$$

Comparando (4.9) e (4.10) vê-se que, como era esperado, os zeros e pólos ‘presentes’ em  $K_\tau(s)$  e  $K_{ban}(s)$ , aproximadamente  $-1$  e  $3023$ , respectivamente, sofreram quase a mesma perturbação, passando para aproximadamente  $-1, 1$  e  $3524$ . Note ainda que os ganhos dos controladores com perturbação ficaram bem próximos. As margens de estabilidade paramétrica relativa para  $K_\tau(s)$  e  $K_{ban}(s)$  serão portanto:

$$\hat{\mu}_\tau = 0, 0117 \quad e \quad \hat{\mu}_{ban} = 0, 1098,$$

Note que, neste caso, a redução da ordem do controlador por truncamento balanceado provocou um aumento significativo da margem de estabilidade paramétrica relativa, passando de aproximadamente 1% para 11%. Portanto, utilizando a margem de estabilidade paramétrica relativa como indicador da fragilidade do controlador, observa-se que  $K_{ban}(s)$  não pode ser considerado frágil.  $\square$

**Exemplo 4.3** Considere os controladores  $K_\tau(s)$  e  $K_{ban}(s)$  para  $\tau = 0,01$  encontrados no exemplo 3.6 e reescritos abaixo:

$$\begin{aligned} K_\tau(s) &= \frac{10009(s+1)(s+1,5213)(s+0,6567)}{(s-9807)(s+1,43)(s+0,7147)} \\ &= \frac{10009s^3 + 31808,602s^2 + 31798,9704s + 9999,3684}{s^3 - 9804,8553s^2 - 21032,0509s - 10022,9599}, \end{aligned}$$

e

$$K_{ban}(s) = \frac{10009(s+1,0333)}{s-9807} = \frac{10009s + 10342}{s-9807}.$$

As margens de estabilidade paramétrica para  $K_\tau(s)$  e  $K_{ban}(s)$  são:

$$\hat{\rho}_\tau^* = 141,6221 \quad e \quad \hat{\rho}_{ban}^* = 141,4806.$$

Os vetores de perturbação correspondentes às margens de estabilidade paramétricas acima são, respectivamente:

$$\Delta \hat{\underline{p}}_\tau = [ -0,00002 \quad 0,0093 \quad 0,1677 \quad -100,1326 \quad 0,0093 \quad 0,1677 \quad -100,1511 ],$$

$$\Delta \hat{\underline{p}}_{ban} = [ -0,0748 \quad -100,0322 \quad -100,0516 ].$$

Utilizando os vetores de perturbação  $\Delta \hat{\underline{p}}_\tau$  e  $\Delta \hat{\underline{p}}_{ban}$  calculados acima nos controladores  $K_\tau(s)$  e  $K_{ban}(s)$ , respectivamente, tem-se:

$$\bar{K}_\tau(s) = \frac{9908,87(s+0,9488)(s+1,5941)(s+0,6672)}{(s-9907,13)(s+1,4008)(s+0,7222)} \quad e$$

$$\bar{K}_{ban}(s) = \frac{9908,97(s+1,0437)}{(s-9907,05)}.$$

Observe que, assim como no exemplo anterior, também aqui  $\hat{\rho}_\tau^* \approx \hat{\rho}_{ban}^*$ , e, como  $\|\hat{\underline{p}}_\tau^0\|_2 > \|\hat{\underline{p}}_{ban}^0\|_2$ , então espera-se que  $\hat{\mu}_{ban} > \hat{\mu}_\tau$ . De fato

$$\hat{\mu}_\tau = 0,002647 \quad e \quad \hat{\mu}_{ban} = 0,008124,$$

que corresponde a uma margem de estabilidade paramétrica relativa para  $K_{ban}(s)$  aproximadamente 306,9% maior do que para  $K_\tau(s)$ .  $\square$

**Exemplo 4.4** No exemplo 3.7 foram obtidos os seguintes controladores para o problema de  $\min \|W_4T\|_\infty$ :

$$\begin{aligned} K_\tau(s) &= \frac{-124,5s^3 - 364,95s^2 - 360,45s - 120}{s^3 + 227,1s^2 + 440,7s + 220} \\ &= \frac{-124,5(s+1)(s+0,9657+j0,1771)(s+0,9657-j0,1771)}{(s+225,15)(s+0,9765+j0,1534)(s+0,9765-j0,1534)} \\ K_{ban}(s) &= \frac{-124,5(s+0,9784)}{s+225,15} = \frac{-124,5s-121,81}{s+225,15}. \end{aligned}$$

As margens de estabilidade paramétrica para  $K_\tau(s)$  e  $K_{ban}(s)$  são:

$$\hat{\rho}_\tau^* = 8,9443 \quad e \quad \hat{\rho}_{ban}^* = 8,2594.$$

Os vetores de perturbação correspondentes às margens de estabilidade paramétrica acima são, respectivamente:

$$\Delta \hat{\underline{p}}_\tau = [ 8 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad 0 ],$$

$$\Delta \hat{\underline{p}}_{ban} = [ 7,3874 \quad 0 \quad 3,6937 ].$$

A partir destes resultados tem-se que as margens de estabilidade paramétrica relativa para  $K_{ban}(s)$  e  $K_\tau(s)$  são:

$$\hat{\mu}_\tau = 0,0117 \quad e \quad \hat{\mu}_{ban} = 0,029,$$

que representa um aumento de mais de 100% na margem de estabilidade paramétrica relativa. Note mais uma vez que  $\hat{\rho}_{ban}^* \approx \hat{\rho}_\tau^*$  e que  $\hat{\mu}_\tau < \hat{\mu}_{ban}$ , devido ao fato de  $\|\hat{\underline{p}}_\tau^0\|_2 > \|\hat{\underline{p}}_{ban}^0\|_2$ . Utilizando os vetores de perturbação  $\Delta \hat{\underline{p}}_\tau$  e  $\Delta \hat{\underline{p}}_{ban}$  obtém-se os seguintes controladores com perturbação.

$$\begin{aligned} \bar{K}_\tau(s) &= \frac{-124,5(s+1,1637+0,368j)(s+1,1637-0,368j)(s+0,6039)}{(s+222,15)(s+0,9765+0,2034j)(s+0,9765-0,2034j)} \\ \bar{K}_{ban}(s) &= \frac{-124,5(s+0,9191)}{(s+228,84)} \end{aligned}$$

Conforme ressaltado anteriormente os pólos e zeros de  $K_\tau(s)$  e  $K_{ban}(s)$  que sofrem maior perturbação são aqueles ‘presentes’ em ambos. Neste caso, o ganho de ambos os controladores com perturbação permaneceu igual.  $\square$

Os exemplos apresentados sugerem que a redução por truncamento balanceado melhora a margem de estabilidade paramétrica relativa dos controladores. Porém, é importante ressaltar que somente a redução da ordem do controlador  $K_\tau(s)$  não resolve o problema da fragilidade. Para resolver este problema, tendo como medida de fragilidade a margem de estabilidade paramétrica, é preciso desenvolver um método de projeto que inclua o objetivo de margem de estabilidade paramétrica. Este será o assunto da próxima seção.

## 4.2 Controladores robustos $H_\infty$ com objetivo de margem de estabilidade paramétrica relativa

Pela forma como foi definida, a margem de estabilidade paramétrica relativa dá uma medida da variação normalizada máxima sobre o vetor de parâmetros nominal  $\underline{p}^0$ . Porém, esta medida corresponde também a uma variação percentual permitida sobre cada parâmetro  $p_i^0$  de  $\underline{p}^0$ , tal que o sistema realimentado não se torne instável. Este resultado pode ser verificado no seguinte teorema.

**Teorema 4.1** *Sejam  $G(s)$  e  $K(s)$  as funções de transferência da planta e do controlador, respectivamente, e suponha que  $K(s)$  estabiliza  $G(s)$ . Defina  $\underline{p}^0$  como o vetor de parâmetros nominal associado a  $K(s)$  e  $\mu_0$  a sua margem de estabilidade paramétrica relativa. Então, cada um dos parâmetros de  $\underline{p}^0$  tolera uma variação percentual menor ou igual que  $\mu_0$ .*

**Prova.** Seja  $\Delta\underline{\tilde{p}} = [\mu_1 p_1^0 \quad \mu_2 p_2^0 \quad \dots \quad \mu_l p_l^0]$ , onde  $|\mu_i| < \mu_0$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , uma perturbação sobre os parâmetros de  $\underline{p}^0$  e seja  $\underline{\tilde{p}} = \underline{p}^0 + \Delta\underline{\tilde{p}}$ . Então

$$\begin{aligned} \|\Delta\underline{\tilde{p}}\|_2 &= \sqrt{(\mu_1 p_1^0)^2 + (\mu_2 p_2^0)^2 + \dots + (\mu_l p_l^0)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\mu_0^2 p_1^{02} + \mu_0^2 p_2^{02} + \dots + \mu_0^2 p_l^{02}} = \mu_0 \|\underline{p}^0\|_2, \end{aligned}$$

e, pela definição de margem de estabilidade paramétrica relativa tem-se que  $\mu_0 \|\underline{p}^0\|_2 = \rho$  e, portanto,

$$\|\Delta\underline{\tilde{p}}\|_2 \leq \rho.$$

Assim, pela definição de margem de estabilidade paramétrica, o vetor de parâmetros com perturbação  $\underline{\tilde{p}} = \underline{p}^0 + \Delta\underline{\tilde{p}}$ , está na borda ou no interior da região de estabilidade  $\Omega$  que contém todos os vetores  $\underline{p}$ , obtidos perturbando-se  $\underline{p}^0$  em todas as direções, que representam controladores que estabilizam o sistema realimentado.

□

A partir do resultado do teorema 4.1 acima tem-se que a margem de estabilidade paramétrica relativa pode ser utilizada para garantir a não fragilidade de controladores. Desta forma, para os casos em que a redução por truncamento balanceado não é suficiente para levar a margem de estabilidade paramétrica relativa a um valor que garanta a sua não fragilidade, é necessário então, incorporar o objetivo de margem de estabilidade paramétrica relativa no projeto do controlador robusto  $H_\infty$ . A idéia principal é permitir uma perturbação específica nos parâmetros do controlador robusto nominal  $K_{ban}(s)$ , obtido pelo método descrito no capítulo 3, de tal forma que o controlador após perturbação apresente menor fragilidade, sem que isto signifique uma deterioração significativa do custo  $H_\infty$  em consideração.

Uma forma de incorporar o objetivo de margem de estabilidade paramétrica relativa no projeto do controlador, é realizar uma busca no espaço dos parâmetros do controlador pela região de estabilidade  $\Omega$ . Em seguida, conhecida a fronteira de  $\Omega$  deve-se encontrar, entre todos os pontos  $\underline{p}$ , aquele que atenda satisfatoriamente o objetivo de projeto com boa margem de estabilidade paramétrica relativa. Para a realização da busca proposta a região de estabilidade  $\Omega$  não pode ser demasiadamente complexa, sendo de particular interesse que esta seja convexa. Porém, mesmo para os casos mais simples como os apresentados em Keel e Bhattacharyya (1997), as regiões de estabilidade são não-convexas impossibilitando o método descrito acima como pode ser observado no teorema a seguir.

**Teorema 4.2** *Suponha que as funções de transferência da planta e do controlador sejam, respectivamente, dadas por:*

$$G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)} = \frac{\alpha_1 s + \alpha_0}{s^2 + \beta_1 s + \beta_0} \quad (4.11)$$

e

$$K(s) = \frac{n_K(s)}{d_K(s)} = \frac{\epsilon_1 s + \epsilon_0}{s + \phi_0}. \quad (4.12)$$

Em  $E$ , seja  $\Omega = \{\underline{p} = [\epsilon_0 \ \epsilon_1 \ \phi_0] : \delta_c(s) = n_G(s)n_K(s) + d_G(s)d_K(s) \text{ é Hurwitz}\}$ , então  $\Omega$  é não-convexo.

**Prova.** A partir das funções de transferência da planta e do controlador, equações (4.11) e (4.12), o polinômio característico do sistema realimentado,  $\delta_c(s)$ , pode ser escrito da seguinte forma:

$$\delta_c(s) = s^3 + \delta_2 s^2 + \delta_1 s + \delta_0,$$

e, pelo critério de Routh-Hurwitz o sistema realimentado será estável se e somente se:

$$\delta_0 > 0, \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0, \quad \text{e} \quad \delta_1 \delta_2 > \delta_0. \quad (4.13)$$

Observe que devido às ordens e aos graus relativos das funções de transferência de  $G(s)$  e  $K(s)$ , é sempre possível escrever:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_1 & 1 & \beta_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \beta_1 & \beta_0 \\ \alpha_0 & 0 & \beta_0 & 0 \end{bmatrix}}_{S_G} \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_0 \\ \epsilon_1 \\ \phi_0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{p}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \\ \delta_0 \end{bmatrix}}_{\underline{\delta}},$$

$$S_G \underline{p} = \underline{\delta}, \quad (4.14)$$

onde  $\underline{\delta}$  representa o vetor composto pelos coeficientes do polinômio característico e  $S_G$  é a matriz de Silvester. Seja  $S_G \Omega = \{S_G \underline{x} : \underline{x} \in \Omega\}$ . Então, a partir de Rockafellar (1970, pag.19, teorema 3.4), tem-se, para  $n_G(s)$  e  $d_G(s)$  coprimos, que  $S_G$  é inversível e, portanto,  $S_G \Omega$  é um conjunto convexo se e somente se  $\Omega$  é um conjunto convexo. Para demonstrar que o conjunto formado pelos vetores  $\underline{\delta}$  que representam polinômios característicos de Hurwitz é não-convexo, é preciso mostrar a não convexidade do conjunto formado pelas condições necessárias e suficientes (4.13). Para tanto, defina  $f(\underline{\delta}) = \delta_1 \delta_2$  e observe que  $\frac{\partial f(\underline{\delta})}{\partial \delta_1} = \delta_2$  e que  $\frac{\partial f(\underline{\delta})}{\partial \delta_2} = \delta_1$  e, portanto,  $f(\underline{\delta})$  é uma função com derivadas parciais crescentes para  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$ . Observe também que a restrição  $\delta_1 \delta_2 - \delta_0 > 0$  forma uma região contida no

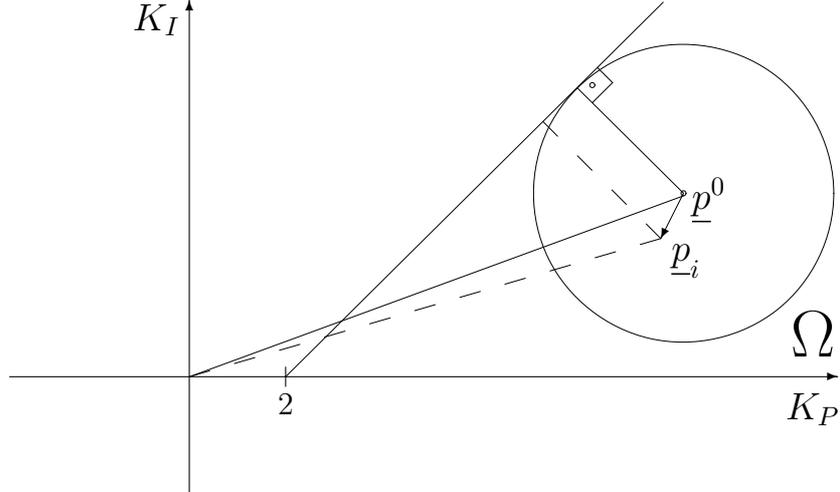


Figura 4.1: Ilustração mostrando uma variação específica sobre o controlador nominal com o objetivo de aumentar a margem de estabilidade paramétrica relativa.

primeiro octante onde todos os pontos representando polinômios de Hurwitz são tais que  $\delta_0 < f(\delta_1, \delta_2)$  para cada  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  e, portanto, esta região é não-convexa.  $\square$

Outro importante fato a ser observado é que caracterizar uma região de margem de estabilidade paramétrica relativa é uma tarefa difícil, uma vez que esta é determinada a partir da razão entre a norma-2 do menor vetor de perturbação  $\Delta \underline{p}$  e a norma-2 do vetor de parâmetros nominal  $\underline{p}^0$ . Assim sendo, uma forma de incorporar o objetivo de margem de estabilidade paramétrica no projeto de controladores de 1-bloco é perturbar o vetor nominal  $\underline{p}^0$  de forma que uma variação  $\Delta \underline{p}$  sobre  $\underline{p}^0$  de módulo relativamente pequeno produza o maior aumento possível de margem de estabilidade paramétrica relativa. Na figura 4.1 é apresentado uma ilustração retratando essa variação específica sobre o vetor de parâmetros nominal  $\underline{p}^0$ , do controlador PI do exemplo 2.2. Note, a partir da figura 4.1 que a direção de perturbação também depende da forma da região de estabilidade  $\Omega$ . Este problema pode ser então formulado da seguinte forma: encontre nas proximidades de  $\underline{p}^0$  um ponto de margem de estabilidade paramétrica relativa  $\mu_0$ ,  $\underline{p}_{\mu_0}$ , tal que  $\|\underline{p}_{\mu_0} - \underline{p}^0\|_2$  seja relativamente pequena. Deve ser ressaltado que para os casos em que o controlador robusto ótimo é impróprio,  $\underline{p}^0$  representa um controlador robusto subótimo que é

projetado para aproximar o valor do custo  $H_\infty$  considerado do seu valor ótimo. Porém, controladores subótimos não são únicos. Como pôde ser constatado no capítulo 3, diferentes valores para  $\tau$  levavam a controladores subótimos e a custos  $H_\infty$  diferentes. Portanto, admitir pequenas perturbações sobre  $\underline{p}^0$  é o mesmo que buscar outro controlador, também subótimo, mas que possua boa margem de estabilidade paramétrica relativa.

Para resolver este problema, um método computacional pode ser utilizado. Este método consiste no cálculo da margem de estabilidade paramétrica relativa de ‘todos os pontos’ pertencentes a uma hipersfera de raio  $\epsilon$  pequeno, centrada em  $\underline{p}^0$ . O ponto pertencente a esta hipersfera de maior margem de estabilidade paramétrica relativa corresponde à direção na qual o controlador nominal deve ser perturbado para reduzir a sua fragilidade com a perturbação de menor norma-2 sobre seus parâmetros. A partir deste ponto de máxima margem de estabilidade paramétrica relativa, repete-se o procedimento anterior até ser alcançado um ponto de máxima margem de estabilidade paramétrica relativa local,  $\underline{p}_{\mathcal{L}}$ , ou então um ponto de margem relativa igual a  $\mu_0$ ,  $\underline{p}_{\mu_0}$ . A seguir um algoritmo que descreve o procedimento proposto será apresentado.

#### **Algoritmo 4.1**

PASSO 1: A partir de  $\underline{p}^0$  e para um valor  $\epsilon$  arbitrário pequeno encontre ‘todos os pontos’  $\underline{p}_i \in \Omega$ , onde  $\underline{p}_i = \underline{p}^0 + \Delta\underline{p}_i$ , tais que  $\|\underline{p}_i - \underline{p}^0\|_2 = \epsilon$ ;

PASSO 2: Para todos os pontos  $\underline{p}_i$  obtidos no passo anterior, calcule a correspondente margem de estabilidade paramétrica relativa  $\mu_i$  e encontre a direção  $\Delta\underline{p}_{\max}$ , com  $\|\Delta\underline{p}_{\max}\|_2 = 1$ , para a qual  $\mu_i$  é máxima. Defina  $\underline{p}_{\max} = \underline{p}^0 + \Delta\underline{p}_{\max}\epsilon$ ;

PASSO 3: Repita o procedimento descrito nos passos 1 e 2, substituindo  $\underline{p}^0$  por  $\underline{p}_{\max}$ , até que se encontre o vetor de máxima estabilidade paramétrica relativa local  $\underline{p}_{\mathcal{L}}$ , ou então um vetor  $\underline{p}_{\mathcal{P}}$  para o qual  $\mu_{\mathcal{P}} > \mu_0$ ;

PASSO 4: Para o caso em que o vetor obtido no passo anterior é  $\underline{p}_{\mathcal{P}}$  use bisseção (teoremas 2.8, 2.9 e 2.10) para encontrar o ponto  $\underline{p}_{\mu_0}$ .  $\square$

$\hat{\mu}_K$	$K(s)$	$\ W_4T\ _\infty$
0,04	$\frac{-124,5s - 124,5162}{s + 223,5834}$	1,2636
0,06	$\frac{-124,5s - 129,4511}{s + 220,7343}$	1,4078
0,08	$\frac{-124,5s - 134,3986}{s + 217,8788}$	1,5810
0,10	$\frac{-124,5s - 139,3588}{s + 215,0140}$	1,7788

Tabela 4.1: Controladores  $H_\infty$  não-frágeis para o exemplo 4.5

A obtenção da direção de perturbação do controlador nominal descrita no algoritmo 4.1 acima é computacionalmente onerosa, principalmente para controladores robustos nominais de ordem elevada. Porém, para os problemas sugeridos em Keel e Bhattacharyya (1997), o procedimento pode ser aplicado sem muita dificuldade, apresentando resultados satisfatórios.

Para ilustrar o procedimento descrito, alguns exemplos serão apresentados a seguir.

**Exemplo 4.5** *Considere novamente o exemplo 4.4, apresentado por Keel e Bhattacharyya (1997) para demonstrar a fragilidade dos controladores robustos. O problema  $H_\infty$  para este exemplo é  $\min \|W_4T\|_\infty$ , onde  $T(s)$  é a função de sensibilidade complementar e  $W_4(s) = \frac{s + 0,1}{s + 1}$ . O controlador reduzido apresentado no exemplo 4.4 para este problema foi:*

$$K_{ban}(s) = \frac{-124,5s - 121,8078}{s + 225,1471}, \quad (4.15)$$

e, para este controlador tem-se que  $\gamma_{ban} = \|W_4T\|_\infty = 1,3170$ .

De acordo com o algoritmo 4.1, o primeiro passo para se melhorar a margem de estabilidade paramétrica é perturbar ligeiramente  $\underline{p}^0$  em todas as direções e calcular para cada novo ponto a margem de estabilidade paramétrica relativa. Procedendo-se de acordo com o algoritmo 4.1, constrói-se a tabela 4.1 para diferentes valores de margem de estabilidade paramétrica relativa  $\hat{\mu}_K$ . Comparando os controladores da tabela 4.1 e  $K_{ban}(s)$  descrito pela equação (4.15), vê-se que pequenas variações nos parâmetros do controlador nominal resultam em pequenas alterações no valor do

custo  $H_\infty$  (que para  $K_{ban}(s)$  é 1,3170), porém com apreciável melhora na margem de estabilidade paramétrica relativa dos mesmos. Deve ser ressaltado ainda que o controlador encontrado para  $\hat{\mu}_K = 0,04$  apresentou inclusive menor custo  $H_\infty$  que o controlador reduzido  $K_{ban}(s)$ . Deve-se ressaltar que para este caso  $\hat{\mu}_K$  poderia ter sido feito ainda maior que 0,1.  $\square$

**Exemplo 4.6** Considere agora o problema  $\min \|W_4T\|_\infty$  com  $W_4(s) = 1$  e

$$G(s) = \frac{s - 3}{(s - 2)(s + 1)^2}.$$

Seguindo os passos do algoritmo 3.2 e utilizando a tabela 3.1 obtém-se o controlador próprio:

$$K_\tau(s) = \frac{-50027s^6 - 355589s^5 - 1038259s^4 - 1592259s^3 - 1341962s^2 - 582400s - 100000}{s^6 + 210s^5 + 62071s^4 + 314430s^3 + 586240s^2 + 468000s + 120000},$$

cuja margem de estabilidade paramétrica relativa é  $\hat{\mu}_\tau = 0,000078550$  e  $\|W_4T\|_\infty = \gamma_\tau = 5,6399$ . Utilizando o algoritmo 3.1 para reduzir a ordem do controlador  $K_\tau(s)$  encontra-se:

$$K_{ban}(s) = \frac{-50027s^2 - 99387,8401s - 49879,5384}{s^2 + 204,8787s + 61012,1804},$$

que possui margem de estabilidade paramétrica relativa  $\hat{\mu}_{ban} = 0,00150252102358$  e é tal que  $\|W_4T\|_\infty = \gamma_{ban} = 5,478$ . É importante ressaltar que neste caso o valor de  $\|W_4T\|_\infty$  foi menor utilizando-se  $K_{ban}(s)$  do que  $K_\tau(s)$ , e que ambos possuem respostas em frequência próximas. Observe que a margem de estabilidade paramétrica relativa cresceu aproximadamente 1910% com a redução da ordem do controlador, porém o valor encontrado para  $\hat{\mu}_{ban}$  foi ainda pequeno. Desta forma, é importante que se incorpore o objetivo de margem de estabilidade paramétrica relativa neste problema. Procedendo agora de acordo com os passos 2, 3 e 4 do algoritmo 4.1, constrói-se a tabela 4.2 para diferentes valores de  $\hat{\mu}_K$ . Note que para  $\hat{\mu}_K = 0,01$ , ou seja, 666% maior que  $\hat{\mu}_{ban}$  (aproximadamente 0,0015), houve uma variação de somente 33,9% no custo  $H_\infty$  em consideração.  $\square$

**Exemplo 4.7** Considere o problema  $H_\infty$  de  $\min \|W_1KS\|_\infty$  do exemplo 3.1 onde  $W_1(s) = 1$  e a função de transferência da planta  $G(s)$  é dada por:

$$G(s) = \frac{s - 1}{(s + 1)(s - 2)}.$$

$\hat{\mu}_K$	$K(s)$	$\ W_4T\ _\infty$
0,010	$\frac{-50027s^2 - 99387,8401s - 49879,5384}{s^2 + 1367,8787s + 61012,8104}$	7,2952
0,015	$\frac{-50027s^2 - 99387,8401s - 49879,5384}{s^2 + 2054,8787s + 61012,8104}$	9,226
0,032	$\frac{-50290,8779s^2 - 92519,9494s - 49351,7825}{s^2 + 4269,985s + 63150,8425}$	12,8728

Tabela 4.2: Controladores  $H_\infty$  para o exemplo 4.6

$\hat{\mu}_K$	$K(s)$	$\ W_1KS\ _\infty$
0,06	$\frac{12,2652s + 11,9532}{s - 7,2260}$	12,9664
0,08	$\frac{12,7485s + 11,8680}{s - 7,6378}$	14,9940
0,10	$\frac{13,2554s + 11,7786}{s - 8,0696}$	17,5787

Tabela 4.3: Controladores  $H_\infty$  não-frágeis para o exemplo 4.7 obtidos utilizando-se o algoritmo 4.1

O controlador obtido para este exemplo tem a seguinte função de transferência:

$$K(s) = \frac{12s + 12}{s - 7}, \quad (4.16)$$

com margem de estabilidade paramétrica relativa  $\hat{\mu} = 0,04865042554105$  e para o qual  $\|W_1KS\|_\infty = 12$ . Utilizando o algoritmo 4.1 contrói-se a tabela 4.3 com os controladores subótimos para diferentes valores de  $\hat{\mu}_K$ . Conforme pode ser observado (tabela 4.3) uma pequena variação sobre os parâmetros do controlador proporciona uma considerável melhora na margem de estabilidade paramétrica relativa (que antes era de aproximadamente 4,9%) sem deteriorar significativamente  $\|W_1KS\|_\infty$ .

Uma interessante observação pode ser feita quanto ao controlador arbitrário apresentado por Keel e Bhattacharyya (1997, exemplo 2):

$$K_a(s) = \frac{11,44974739s + 11,24264066}{s - 7,03553383},$$

cujá margem de estabilidade paramétrica relativa é  $\hat{\mu}_a = 0,07219317556675087$  e para o qual  $\|KS\|_\infty = 14,9805$ . Note que os parâmetros deste controlador são bastante próximos aos do controlador robusto (4.16) calculado para  $\min \|KS\|_\infty$ . De fato, qualquer controlador próximo o suficiente do controlador nominal e perturbado

*em uma direção adequada, pode possuir melhor margem de estabilidade paramétrica relativa que este, e coincidentemente o controlador arbitrário apresentado por Keel e Bhattacharyya (1997) utilizado para comparação quanto à fragilidade com um controlador robusto, pode também ser visto como um controlador robusto subótimo para o problema  $\min \|KS\|_\infty$  com objetivo de margem de estabilidade paramétrica relativa.* □

### 4.3 Conclusões

Neste capítulo são apresentadas maneiras sistemáticas para aumentar a margem de estabilidade paramétrica dos controladores robustos. Como um primeiro passo é recomendada a redução da ordem do controlador por truncamento balanceado. Em seguida, um procedimento é proposto baseado em uma busca no espaço de parâmetros do controlador, visando aumentar a sua margem de estabilidade paramétrica relativa, com uma pequena deterioração do custo  $H_\infty$  considerado. Exemplos são utilizados para verificar a eficiência do método apresentado, mostrando que há uma significativa melhora na margem de estabilidade paramétrica com pequena deterioração no custo  $H_\infty$  considerado.

## Capítulo 5

# Análise crítica sobre margem de estabilidade paramétrica

A margem de estabilidade paramétrica, conforme mencionado anteriormente, é obtida em termos da pior direção na qual o vetor de parâmetros nominal  $\underline{p}^0$  deve ser perturbado para que o sistema realimentado perca a estabilidade. Porém, no cálculo da margem de estabilidade paramétrica, não há controle algum sobre a perturbação que cada parâmetro do vetor nominal  $\underline{p}^0$  deve sofrer. Isto faz com que, em alguns casos, uma variação grande em somente alguns parâmetros seja requerida em detrimento de pequenas variações sobre os demais. O fato de grandes variações ocorrerem sobre alguns parâmetros somente, revela que a margem de estabilidade paramétrica relativa, apesar de fornecer uma variação permitida sobre cada um dos coeficientes do controlador, pode tornar-se uma medida muito conservadora para a não fragilidade de controladores. Desta forma, surgem então dois importantes questionamentos. Será que estas grandes variações requeridas sobre alguns parâmetros do controlador realmente ocorrem? Quanto realmente podem variar percentualmente cada um dos parâmetros do vetor  $\underline{p}^0$ ? Neste capítulo essas duas perguntas serão respondidas, sendo para tanto necessário introduzir uma nova maneira de se definir a margem de estabilidade paramétrica.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 5.1, um exemplo será apresentado para motivar a análise das questões levantadas na introdução deste capítulo; na seção 5.2 uma nova definição para a margem de estabilidade paramétrica é sugerida e uma condição suficiente para determinar a não-fragilidade de um

controlador, baseada no teorema de Kharitonov, é apresentada.

## 5.1 Exemplo motivador

**Exemplo 5.1** *Considere o problema  $\min \|T\|_\infty$  do exemplo 4.6 onde a função de transferência da planta é dada por:*

$$G(s) = \frac{s - 3}{(s - 2)(s + 1)^2}.$$

*O controlador reduzido obtido por truncamento balanceado tem a seguinte função de transferência:*

$$K_{ban}(s) = \frac{-50027s^2 - 99387,8401s - 49879,5384}{s^2 + 204,8787s + 61012,1804},$$

*e apresenta margem de estabilidade paramétrica  $\hat{\mu}_{ban} \approx 0,0015$ . O vetor de perturbação correspondente a  $\hat{\mu}_{ban}$  encontrado é:*

$$\Delta \underline{\hat{p}}_{ban} = [ 0,0028 \quad 0,0099 \quad -30,6802 \quad -30,6336 \quad -200,2276 ].$$

*Note que o vetor de parâmetros nominal  $\underline{\hat{p}}_{ban}^0$  é dado por:*

$$\underline{\hat{p}}_{ban}^0 = [ -49879,5384 \quad -99387,8401 \quad -50027 \quad 61012,1804 \quad 204,8787 ],$$

*e, portanto, a variação percentual sobre cada parâmetro é:*

$$\underline{v}(\%) = [ 0,000006 \quad 0,00001 \quad 0,0613 \quad 0,0502 \quad 97,7298 ].$$

*Observe que uma variação muito alta é requerida do quinto elemento de  $\underline{\hat{p}}_{ban}^0$  (quase 100%), enquanto os demais sofrem pequenas perturbações. Mas será que uma variação de 100% de um parâmetro do controlador no momento de sua implementação pode realmente ocorrer? E ainda, se a margem de estabilidade paramétrica não informa a máxima variação percentual que cada um dos parâmetros de  $\underline{p}^0$  pode sofrer, como saber então se este controlador é frágil?  $\square$*

Para responder à primeira questão levantada na introdução deste capítulo, *i.e.*, se grandes variações em alguns parâmetros do controlador podem realmente ocorrer

observe que os parâmetros dos controladores robustos devem ser implementados os mais próximos possíveis dos valores projetados, sendo que as alterações são, para o caso de controladores analógicos, devido a erros dos componentes a serem utilizados (resistores, capacitores etc) e, no caso de controladores digitais, erros devido às conversões analógica-digital e digital-analógica e a erros numéricos (comprimento finito da palavra). Em geral, estes erros são relativamente pequenos, principalmente se a implementação é feita digitalmente. Desta forma, variações extremas em alguns parâmetros (como a que ocorreu no exemplo 5.1) são bastante improváveis e a margem de estabilidade paramétrica utilizada em Keel e Bhattacharyya (1997) passa a ser incapaz de fornecer qualquer informação quanto à fragilidade deste controlador. Seria interessante então que fosse possível fixar os limites de perturbação sobre cada parâmetro do vetor nominal  $\underline{p}^0$ , evitando assim variações extremas e irreais, e ser capaz de determinar qual a variação máxima permitida para a estabilidade do sistema realimentado. Encontrar uma forma de obter estes limites responderia ao segundo questionamento apresentado na introdução deste capítulo, e será o objetivo da próxima seção.

## 5.2 Margem de estabilidade paramétrica por Khartoumov

O exemplo da seção anterior mostra que é preciso saber o quanto cada parâmetro do vetor  $\underline{p}^0$  pode ser alterado para que se tenha uma medida mais confiável da fragilidade dos controladores. É necessário então, caracterizar de uma forma diferente a margem de estabilidade paramétrica. Para tanto, considere que o controlador robusto nominal projetado possa ser escrito da seguinte forma:

$$K(s) = \frac{p_{n_2+1}^0 s^{n_2} + p_{n_2}^0 s^{n_2-1} + \dots + p_1^0}{p_l^0 s^{m_2} + p_{l-1}^0 s^{m_2-1} + \dots + p_{n_2+2}^0}, \quad (5.1)$$

onde  $l = m_2 + n_2 + 2$ . Suponha que uma variação percentual  $\kappa_i$  seja feita sobre cada coeficiente  $p_i^0$  de  $K(s)$ , para  $i = 1, \dots, l$ , levando ao seguinte controlador com

perturbação  $\bar{K}(s)$ ,

$$\bar{K}(s) = \frac{(p_{n_2+1}^0 \pm \kappa_{n_2+1} p_{n_2+1}^0) s^{n_2} + (p_{n_2}^0 \pm \kappa_{n_2} p_{n_2}^0) s^{n_2-1} + \dots + (p_1^0 \pm \kappa_1 p_1^0)}{(p_l^0 \pm \kappa_l p_l^0) s^{m_2} + (p_{l-1}^0 \pm \kappa_{l-1} p_{l-1}^0) s^{m_2-1} + \dots + (p_{n_2+2}^0 \pm \kappa_{n_2+2} p_{n_2+2}^0)}. \quad (5.2)$$

Estabeleça agora variações máximas,  $\kappa_{i_{max}}$  sobre cada um dos parâmetros  $p_i$  e, em seguida, forme a família de controladores  $\Delta_K(s)$  de forma que cada controlador desta família possa ser escrito da seguinte forma<sup>1</sup>:

$$K(s) = \frac{p_{n_2+1} s^{n_2} + p_{n_2} s^{n_2-1} + \dots + p_1}{p_l s^{m_2} + p_{l-1} s^{m_2-1} + \dots + p_{n_2+2}}, \quad (5.3)$$

onde

$$\begin{aligned} p_1 &\in [p_1^0 - \kappa_{1_{max}} p_1^0, p_1^0 + \kappa_{1_{max}} p_1^0] \\ p_2 &\in [p_2^0 - \kappa_{2_{max}} p_2^0, p_2^0 + \kappa_{2_{max}} p_2^0] \\ &\vdots \\ p_l &\in [p_l^0 - \kappa_{l_{max}} p_l^0, p_l^0 + \kappa_{l_{max}} p_l^0]. \end{aligned}$$

Observe que a definição de intervalos para variação de cada coeficiente de  $K(s)$  gera um hiper-retângulo,  $\mathcal{H}_K$ , no espaço gerado pelos parâmetros do controlador, *i.e.*, todo controlador da família  $\Delta_K(s)$  pode ser representado por um ponto no hiper-retângulo  $\mathcal{H}_K$ . A figura 5.1 mostra um hiper-retângulo  $\mathcal{H}_K$  formado no espaço de parâmetros do controlador, supondo, por simplicidade, que apenas três parâmetros de  $K(s)$  podem variar. Desta forma, uma nova caracterização para a margem de estabilidade paramétrica pode ser formulada como a determinação do valor máximo  $\kappa_{max}$ , gerando um hiper-retângulo  $\mathcal{H}_K$  de forma que todos os pontos de  $\mathcal{H}_K$  representem controladores que estabilizam o sistema realimentado, ou seja,  $\mathcal{H}_K \subset \Omega$ , onde  $\Omega$  é a região de estabilidade. Definindo  $\Delta_S$  como a região formada pelos vetores  $\underline{\delta}$  cujos elementos são os coeficientes dos polinômios característicos em malha fechada  $\delta(s)$ , obtidos utilizando-se os controladores da família  $\Delta_K(s)$ , no espaço gerado pelos coeficientes de  $\delta(s)$ , observa-se que a cada hiper-retângulo  $\mathcal{H}_K$

---

<sup>1</sup>Por simplicidade, serão consideradas neste trabalho somente variações percentuais  $\kappa$  iguais nos parâmetros do controlador, o que não impede que os resultados apresentados sejam utilizados quando existirem variações  $\kappa_i$  diferentes para cada parâmetro  $p_i$ .

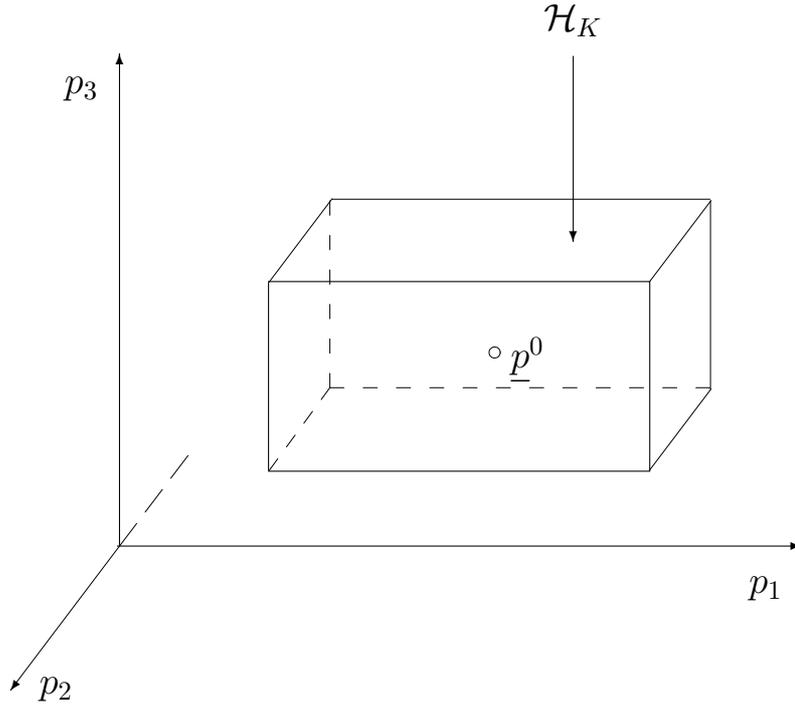


Figura 5.1: Hiper-retângulo formado no espaço de parâmetros do controlador para a família de controladores  $\Delta_K(s)$ .

encontrado a partir da escolha feita para  $\kappa$ , corresponde uma região  $\Delta_S$  diferente. Para entender este fato basta observar que os vetores  $\underline{\delta} \in \Delta_S$  podem ser obtidos por transformação linear a partir dos vetores  $\underline{p} \in \mathcal{H}_K$ , uma vez que sempre é possível escrever

$$S_G \underline{p} = \underline{\delta},$$

onde  $S_G$  é a matriz de Sylvester formada com os vetores dos coeficientes dos polinômios do numerador e denominador da função de transferência da planta. Na figura 5.2 é apresentada uma ilustração para a região  $\Delta_S$  formada a partir de um hiper-retângulo  $\mathcal{H}_K$ . É importante ressaltar que o espaço gerado pelos coeficientes de  $\delta(s)$  pode possuir dimensão maior que o espaço de parâmetros do controlador. Note ainda que a região  $\Delta_S$ , em geral, não será um hiper-retângulo, mas sim um poliedro. Assim sendo, para verificar se  $\mathcal{H}_K \subset \Omega$  seria necessário constatar se todos os pontos  $\underline{\delta}$  de  $\Delta_S$  correspondem a polinômios característicos de Hurwitz; o que é difícil devido à sua complexidade. Porém, uma forma de garantir uma variação per-

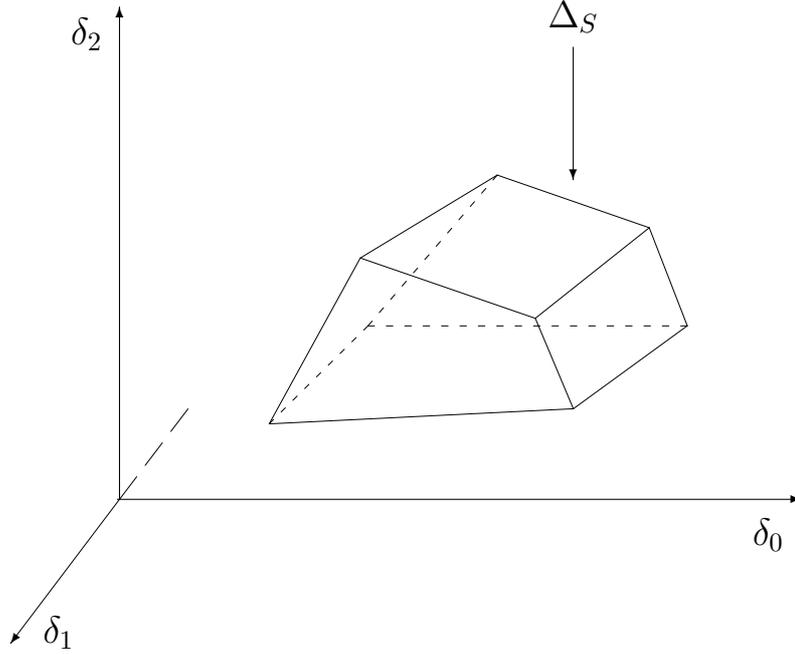


Figura 5.2: Região  $\Delta_S$  gerada a partir do hiper-retângulo  $\mathcal{H}_K$ .

centual sobre cada coeficiente do controlador pode ser obtida utilizando-se o teorema de Kharitonov.

**Teorema 5.1 (Teorema de Kharitonov)**

Considere o conjunto  $\Delta(s)$  de polinômios reais de grau  $n$  da forma:

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \dots + \delta_n s^n, \quad (5.4)$$

onde os coeficientes variam entre os seguintes limites:

$$\delta_0 \in [x_0, y_0], \quad \delta_1 \in [x_1, y_1], \dots, \delta_n \in [x_n, y_n].$$

Supondo que não haja perda de grau na família de polinômios  $\Delta(s)$ , ou seja,  $0 \notin [x_n, y_n]$ , então, todo o polinômio na família  $\Delta(s)$  é Hurwitz se e somente se os seguintes quatro polinômios extremos são de Hurwitz:

$$\delta^1(s) = x_0 + x_1 s + y_2 s^2 + y_3 s^3 + x_4 s^4 + x_5 s^5 + y_6 s^6 + \dots,$$

$$\delta^2(s) = x_0 + y_1 s + y_2 s^2 + x_3 s^3 + x_4 s^4 + y_5 s^5 + y_6 s^6 + \dots,$$

$$\delta^3(s) = y_0 + x_1 s + x_2 s^2 + y_3 s^3 + y_4 s^4 + x_5 s^5 + x_6 s^6 + \dots,$$

$$\delta^4(s) = y_0 + y_1s + x_2s^2 + x_3s^3 + y_4s^4 + y_5s^5 + x_6s^6 + \dots$$

**Prova.** Ver Bhattacharyya et al. (1995, pag. 227).  $\square$

Pelo teorema de Kharitonov um hiper-retângulo no espaço gerado pelos coeficientes de  $\delta(s)$  é criado, e a estabilidade de todos os pontos contidos nos intervalos é garantida verificando-se a estabilidade de quatro de seus vértices. Seja  $\mathcal{H}_S$  um hiper-retângulo, formado no espaço gerado pelos coeficientes do polinômio característico, que contenha toda a região  $\Delta_S$  obtida para um determinado valor de  $\kappa$ . Então, aplicando-se o teorema de Kharitonov para verificar se todos os pontos contidos no hiper-retângulo  $\mathcal{H}_S$  representam polinômios de Hurwitz, se garante também que todos os pontos  $\underline{\delta} \in \Delta_S$  representam polinômios de Hurwitz, ou seja, isto garante que a variação  $\kappa$ , sobre cada parâmetro nominal  $p_i^0$ , pode ser realizada. A figura 5.3 mostra o hiper-retângulo  $\mathcal{H}_S$  formado envolvendo toda a região  $\Delta_S$ . Também é mostrado na figura 5.3 os quatro vértices  $\underline{\delta}^1$ ,  $\underline{\delta}^2$ ,  $\underline{\delta}^3$  e  $\underline{\delta}^4$  utilizados para testar a estabilidade de todo o hiper-retângulo  $\mathcal{H}_S$  de acordo com o teorema de Kharitonov. Note que a verificação da estabilidade de Hurwitz dos polinômios representados pelos pontos de  $\mathcal{H}_S$  no lugar dos pontos de  $\Delta_S$  é mais conservadora, uma vez que em  $\mathcal{H}_S$  existem pontos, representando polinômios característicos, que não são alcançados pela variação sobre os parâmetros do controlador considerada. Desta forma, a variação percentual permitida sobre cada  $p_i^0$  poderá ser maior ou igual a  $\kappa$  obtido a partir do teorema de Kharitonov.

Para gerar o hiper-retângulo  $\mathcal{H}_S$  é preciso relacionar as variações  $\kappa$  sobre os coeficientes do controlador nominal com os coeficientes do polinômio característico nominal  $\delta^0(s)$ . Para tanto, escreva a função de transferência da planta da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{\alpha_{n_1}s^{n_1} + \dots + \alpha_0}{s^{m_1} + \dots + \beta_0}, \quad (5.5)$$

e considere  $K(s)$  dado pela equação (5.3). Portanto, de acordo com (5.5) e (5.3) o polinômio característico em malha fechada é dado por:

$$\begin{aligned} \delta(s) &= \alpha_{n_1}p_{n_2+1}s^{n_1+n_2} + \dots + \alpha_{n_1}p_1s^{n_1} + \dots + \alpha_0p_{n_2+1}s^{n_2} + \dots + \alpha_0p_1 + \\ &+ p_l s^{m_1+m_2} + \dots + p_{n_2+2}s^{m_1} + \dots + \beta_0p_l s^{m_2} + \dots + \beta_0p_{n_2+2}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

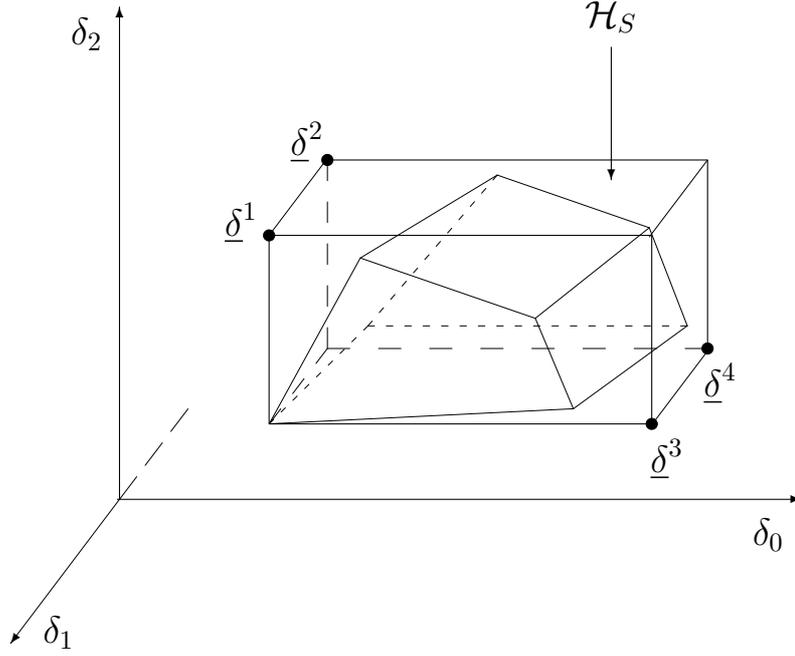


Figura 5.3: Hiper-retângulo  $\mathcal{H}_S$  envolvendo toda a região  $\Delta_S$ , utilizado para testar a estabilidade do sistema em malha fechada a partir do teorema de Kharitonov.

Note, a partir da equação (5.6) acima, que os intervalos dos coeficientes de  $\delta(s)$  dependem da variação permitida  $\kappa$  sobre os coeficientes do controlador nominal. Note ainda que os intervalos devem ser construídos de forma a abrangerem todas as possibilidades de variação sobre os coeficientes de  $\delta(s)$ . A partir da equação (5.6) e utilizando-se a equação (5.3), a seguinte expressão para os coeficientes de  $\delta(s)$  pode ser obtida:

$$\begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_{n-1} \\ \delta_{n-2} \\ \vdots \\ \delta_0 \end{bmatrix} = S_G \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_l \end{bmatrix} \pm \kappa S_G^+ \begin{bmatrix} |p_1| \\ |p_2| \\ |p_3| \\ \vdots \\ |p_l| \end{bmatrix},$$

$$\underline{\delta} = S_G \underline{p}^0 \pm \kappa S_G^+ \underline{p}_+^0 = \underline{\delta}^0 \pm \underline{\delta}_p,$$

onde  $\underline{p}_+^0$  é o vetor composto pelo módulo de cada elemento de  $\underline{p}^0$ ,  $S_G$  é a matriz de Silvester formada pelo numerador e denominador da planta e  $S_G^+$  é a matriz obtida considerando-se o módulo de todos os elementos da matriz de Silvester. Portanto, o vetor de intervalos  $\underline{\delta}_p$  pode ser facilmente obtido fazendo-se  $\underline{\delta}_p = \kappa S_G^+ \underline{p}_+^0$ .

**Observação 5.1** Para os casos em que o controlador  $K(s)$  possui o termo da maior

potência de  $s$  do denominador,  $p_l$ , fixo, não ocorrerá variação do coeficiente de maior grau do polinômio característico em malha fechada  $\delta(s)$ ,  $\delta_n$ . Desta forma, para a obtenção dos intervalos de variação dos coeficientes de  $\delta(s)$ ,  $\underline{\delta}_p$ , forme o vetor  $\underline{\tilde{p}}_+^0$  onde os seus elementos são iguais aos de  $\underline{p}_+^0$  exceto pelo último elemento que deve ser feito nulo e, em seguida, faça  $\underline{\delta}_p = \kappa S_{G\underline{\tilde{p}}_+}^+$ .  $\square$

**Observação 5.2** Para os casos em que a função de transferência da planta e do controlador são bipróprias o termo de maior grau do polinômio característico em malha fechada é  $\delta_n = \alpha_{n_1} p_{n_2+1} + p_l$  e, portanto pode ser nulo. Isto faz com que o teorema de Kharitonov não possa ser aplicado diretamente, uma vez que uma hipótese deste teorema é que a família de polinômios  $\Delta(s)$  não perde grau. Para estes casos o valor de  $\kappa$  para o qual  $\delta_n = 0$ , denotado por  $\kappa_d$ , deve ser considerado e o intervalo para variação sobre  $\delta_n^0$  deve ser ou todo negativo ou positivo dependendo do sinal de  $\delta_n^0$ . Por fim, a variação máxima  $\kappa_{max}$  será a menor entre todas, incluindo  $\kappa_d$ .  $\square$

A seguir um algoritmo que resume o procedimento acima descrito será apresentado.

### Algoritmo 5.1

PASSO 1: Obtenha o polinômio característico nominal para o sistema em malha fechada  $\delta^0(s)$  ( $\underline{\delta}^0 = S_G \underline{p}^0$ );

PASSO 2: Encontre os limites para a variação dos coeficientes  $\underline{\delta}^0$  de  $\delta^0(s)$  em função da variação percentual  $\kappa$  ( $\underline{\delta}_p = \kappa S_{G\underline{p}_+}^+$ );

PASSO 3: Forme um hiper-retângulo  $\mathcal{H}_S$  para um valor inicial  $\kappa^0$ , suficientemente pequeno de forma que  $\mathcal{H}_S$  contenha somente vetores representando polinômios de Hurwitz;

PASSO 4: Aumente gradativamente os valores de  $\kappa$  e use o teorema de Kharitonov para verificar a estabilidade de toda a família  $\Delta(s)$  até que ao menos um dos polinômios de Kharitonov torne-se instável. Use bisseção para encontrar o valor de  $\kappa_{max}$ .  $\square$

Para ilustrar o procedimento descrito no algoritmo 5.1, a seguir alguns exemplos desta tese serão revistos e a fragilidade dos controladores robustos  $H_\infty$  será analisada.

**Exemplo 5.2** *Considere novamente o exemplo 5.1 utilizado na seção anterior, onde a margem de estabilidade paramétrica relativa obtida é  $\hat{\mu}_{ban} \approx 0,0015$ . Seguindo os passos do algoritmo 5.1 encontram-se os seguintes intervalos para variação dos coeficientes do polinômio característico em malha fechada  $\delta(s)$  em função da variação percentual  $\kappa$  sobre os parâmetros do controlador.*

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \delta_5 s^5,$$

onde

$$\delta_0 \in [27614, 2544 - \kappa 271662, 976, 27614, 2544 + \kappa 271662, 976]$$

$$\delta_1 \in [64837, 6833 - \kappa 531489, 3573, 64837, 6833 + \kappa 531489, 3573]$$

$$\delta_2 \in [50076, 1524 - \kappa 250087, 4762, 50076, 1524 + \kappa 250087, 4762]$$

$$\delta_3 \in [10982, 1804 - \kappa 111039, 1804, 10982, 1804 + \kappa 111039, 1804]$$

$$\delta_4 \in [204, 8787 - \kappa 204, 8787, 204, 8787 + \kappa 204, 8787]$$

$$\delta_5 \in [1, 1].$$

Procedendo agora de acordo com os passos 3 e 4 do algoritmo 5.1 obtém-se  $\kappa_{max} = 0,070487$ , que é aproximadamente 46,9 vezes maior do que  $\hat{\mu}_{ban}$  (0,0015). Assim sendo, pode ser garantida uma variação sobre os coeficientes do controlador nominal de até 7% sem que haja perda de estabilidade do sistema realimentado, o que sugere que o controlador  $K_{ban}(s)$  é bem menos frágil do que o valor indicado por  $\hat{\mu}_{ban}$ . Neste exemplo é possível observar o quanto a margem de estabilidade paramétrica apresentada em Keel e Bhattacharyya (1997) pode ser conservadora como medida de fragilidade de controladores. □

**Exemplo 5.3** *Considere o seguinte controlador  $K_\tau(s)$  obtido no exemplo 4.2:*

$$K_\tau(s) = \frac{4027s^3 + 24052,8683s^2 + 44025,5673s + 23999,699}{s^3 - 3017,9997s^2 - 15019,1132s - 18000,4357}.$$

Este controlador atende ao objetivo de  $\min \|S\|_\infty$ , onde a função de transferência da planta  $G(s)$  é dada por:

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2}.$$

A margem de estabilidade paramétrica relativa para este controlador é  $\hat{\mu}_\tau = 0,0117$  e o vetor de perturbação  $\Delta \hat{\underline{p}}_\tau$  é dado por:

$$\Delta \hat{\underline{p}}_\tau = [ -0,0029 \quad 0,0554 \quad 26,1438 \quad -502,6268 \quad 0,0554 \quad 26,1496 \quad -502,7318 ].$$

Escrevendo o vetor de parâmetros nominal  $\hat{\underline{p}}_\tau^0$  tem-se:

$$\hat{\underline{p}}_\tau^0 = [ 23999,699 \quad 44025,5673 \quad 24052,8683 \quad 4027 \quad -18000,4357 \quad -15019,1132 \quad -3017,9997 ].$$

Desta forma, observa-se que para este caso, o cálculo da margem de estabilidade paramétrica estabelece que a perturbação de menor módulo que ocasiona a instabilidade do sistema em malha fechada requer a seguinte variação percentual  $\underline{v}(\%)$  sobre cada parâmetro de  $\hat{\underline{p}}_\tau^0$ :

$$\underline{v}(\%) = [ 0,00001 \quad 0,0001 \quad 0,1087 \quad 12,4814 \quad 0,0003 \quad 0,1741 \quad 16,6578 ].$$

Note, a partir de  $\underline{v}(\%)$ , que o sétimo elemento de  $\hat{\underline{p}}_\tau^0$  deveria variar 16,6578% do seu valor nominal, o que é bastante improvável que ocorra, uma vez que a variação que deve ser considerada é somente para pequenos ajustes do controlador e para sua implementação. Portanto, neste caso, a margem de estabilidade paramétrica não fornece uma medida confiável para a fragilidade do controlador. Procedendo de acordo com o algoritmo 5.1 obtém-se os seguintes limites para variação dos coeficientes do polinômio característico  $\delta(s)$  (equação 5.4), em função da variação percentual  $\kappa$  permitida sobre cada parâmetro do vetor  $\hat{\underline{p}}_\tau^0$ :

$$\delta_0 \in [12001,1724 - \kappa 60000,5704 \quad , \quad 12001,1724 + \kappa 60000,5704]$$

$$\delta_1 \in [28012,7938 - \kappa 116063,9284 \quad , \quad 28012,7938 + \kappa 116063,9284]$$

$$\delta_2 \in [23027,3759 - \kappa 107133,9839 \quad , \quad 23027,3759 + \kappa 107133,9839]$$

$$\delta_3 \in [8022,7548 - \kappa 46116,9812 \quad , \quad 8022,7548 + \kappa 46116,9812]$$

$$\delta_4 \in [1008,0003 - \kappa 7044,9997 \quad , \quad 1008,0003 + \kappa 7044,9997]$$

$$\delta_5 \in [1 \quad , \quad 1].$$

Aplicando o teorema de Kharitonov dados os intervalos acima e utilizando os passos 3 e 4 do algoritmo 5.1 obtém-se:

$$\kappa_{max} = 0,0767,$$

que mostra que uma variação de aproximadamente 7,7% é permitida sobre cada parâmetro do controlador. Por esta nova medida observa-se que o controlador não é tão frágil quanto a margem de estabilidade paramétrica relativa sugere, sendo o valor de  $\kappa_{max} \approx 6,56\hat{\mu}_\tau$ .  $\square$

**Exemplo 5.4** Considere agora o controlador reduzido por truncamento balanceado  $K_{ban}(s)$  do exemplo 4.3:

$$K_{ban}(s) = \frac{10009s + 10342}{s - 9807}.$$

Este controlador atende ao objetivo de  $\min \|SG\|_\infty$  para a seguinte planta  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2}.$$

O cálculo da margem de estabilidade paramétrica relativa do exemplo 4.3 fornece  $\hat{\mu}_{ban} = 0,0081$  e o seguinte vetor de perturbação:

$$\Delta \hat{\underline{p}}_{ban} = [ -0,0748 \quad -100,0322 \quad -100,0516 ]. \quad (5.7)$$

Escrevendo  $\hat{\underline{p}}_{ban}^0$  para este caso obtém-se:

$$\hat{\underline{p}}_{ban}^0 = [ 10342 \quad 10009 \quad -9807 ], \quad (5.8)$$

e, a partir de (5.7) e (5.8), obtém-se a seguinte variação percentual  $\underline{v}(\%)$  sobre cada parâmetro de  $\hat{\underline{p}}_{ban}^0$ :

$$\underline{v}(\%) = [ 0,0007 \quad 0,9994 \quad 1,0202 ].$$

Neste caso uma pequena variação sobre todos os parâmetros foi necessária para que o sistema realimentado se tornasse instável. Portanto, a margem de estabilidade paramétrica neste exemplo é um bom indicativo da fragilidade do controlador. Procedendo de acordo com o algoritmo 5.1 encontra-se:

$$\kappa_{max} = 0,01009418,$$

que é relativamente próximo do valor encontrado para  $\hat{\mu}_{ban}$ . Para reduzir a fragilidade deste controlador o método apresentado no algoritmo 4.1 pode ser utilizado, resultando em:

$$K(s) = \frac{11129,45s + 10144,4344}{s - 8669,2652},$$

para o qual  $\hat{\mu} = 0,1$ . Este controlador é tal que  $\|SG\|_{\infty} = 1,3660$ , ou seja, apenas 29% maior que o valor obtido utilizando-se  $K_{ban}(s)$  (1,0577) e apresenta uma variação percentual garantida a partir do teorema de Kharitonov  $\kappa_{max} = 0,1240$ . Note que o método descrito no algoritmo 4.1 busca melhorar a margem de estabilidade paramétrica relativa do controlador, o que aumentou também a variação permitida a partir do teorema de Kharitonov.  $\square$

**Exemplo 5.5** Considere o controlador encontrado no exemplo 4.4 para  $\min \|W_4T\|_{\infty}$  (apresentado em Keel e Bhattacharyya (1997)):

$$K_{\tau}(s) = \frac{-124,5s^3 - 364,95s^2 - 360,45s - 120}{s^3 + 227,1s^2 + 440,7s + 220},$$

onde a função de transferência da planta é dada por:

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 0,5s - 0,5}.$$

Calculando a margem de estabilidade paramétrica relativa deste controlador obtém-se  $\hat{\mu}_{\tau} = 0,0117$  e o correspondente vetor de perturbação:

$$\Delta \hat{p}_{\tau} = [ 7,9572 \quad 112,008 \quad -0,0008 \quad -0,0112 \quad 3,9906 \quad 56,0152 \quad -0,0004 ].$$

O vetor de parâmetros nominal para este controlador é:

$$\hat{p}_{\tau}^0 = [ -120 \quad -360,45 \quad -364,95 \quad -124,5 \quad 220 \quad 440,7 \quad 227,1 ],$$

o que mostra que a seguinte variação percentual  $\underline{v}(\%)$  foi requerida no cálculo da margem de estabilidade paramétrica,

$$\underline{v}(\%) = [ 6,631 \quad 31,0745 \quad 0,0002 \quad 0,009 \quad 1,8139 \quad 12,7105 \quad 0,0002 ].$$

Observe que o segundo elemento de  $\hat{p}_{\tau}^0$  deve variar 31,0745% do seu valor nominal, o que é bastante improvável. Desta forma, também neste exemplo a margem de

*estabilidade paramétrica não é uma boa medida de fragilidade do controlador. Procedendo de acordo com o algoritmo 5.1 encontra-se os seguintes limites de variação dos coeficientes do polinômio característico  $\delta(s)$  em função de  $\kappa$ :*

$$\delta_0 \in [10 - \kappa 330, 10 + \kappa 330]$$

$$\delta_1 \in [130, 1 - \kappa 810, 8, 130, 1 + \kappa 810, 8]$$

$$\delta_2 \in [331, 3 - \kappa 1279, 3, 331, 3 + \kappa 1279, 3]$$

$$\delta_3 \in [313, 35 - \kappa 1043, 65, 313, 35 + \kappa 1043, 65]$$

$$\delta_4 \in [103, 1 - \kappa 351, 6, 103, 1 + \kappa 351, 6]$$

$$\delta_5 \in [1, 1].$$

*Seguindo os passos 3 e 4 do algoritmo 5.1, tem-se:*

$$\kappa_{max} = 0,030303,$$

*que mostra que o controlador é menos frágil que o sugerido em Keel e Bhattacharyya (1997) ( $\kappa_{max} \approx 2,6\hat{\mu}_\tau$ ). Neste exemplo verifica-se pelo valor encontrado para  $\kappa_{max}$  e pelo intervalo de variação de  $\delta_0$  que o teorema de Kharitonov está fornecendo um valor exato para a máxima variação percentual sobre cada parâmetro de  $\hat{p}_\tau^0$ .  $\square$*

### 5.3 Conclusões

Neste capítulo uma análise crítica da margem de estabilidade paramétrica foi feita, mostrando que esta medida de fragilidade do controlador não pode ser sempre utilizada para rotular um controlador como ‘frágil’, sendo necessário um estudo mais detalhado sobre seu resultado para que possa ser utilizada. Além disso, uma nova caracterização para a margem de estabilidade paramétrica é apresentada e um método, baseado no teorema de Kharitonov, foi sugerido para identificar de forma mais direta o quanto podem ser variados os parâmetros do controlador nominal sem perda de estabilidade do sistema realimentado, esperando desta forma que esta seja uma medida menos conservadora que a margem de estabilidade paramétrica apresentada em Keel e Bhattacharyya (1997). Finalmente, os exemplos tratados nesta tese foram

revidos e constatou-se que em alguns destes exemplos, controladores que utilizando-se a margem de estabilidade paramétrica como medida de fragilidade podiam ser considerados frágeis, na verdade não são tão frágeis como o indicado. Essa análise explica em parte porque em Keel e Bhattacharyya (1998) a implementação feita dos controladores considerados frágeis em Keel e Bhattacharyya (1997) não foi tanto problemática conforme se esperava.

# Capítulo 6

## Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho a margem de estabilidade paramétrica foi analisada e resultados originais foram apresentados. Esses resultados são especialmente adequados para utilização em algoritmos de busca que visam maximizar a margem de estabilidade paramétrica. Dentro do escopo de controladores robustos, apresentou-se um método computacional elaborado para maximização desta medida de fragilidade dos controladores. Este método computacional tem por objetivo principal realizar uma busca no espaço gerado pelos parâmetros do controlador por vetores representando controladores estabilizantes, que não somente atendem a um determinado objetivo de projeto, como também possuem boa margem de estabilidade paramétrica relativa. Neste método é suposto que a redução da ordem do controlador por truncamento balanceado seja realizada como uma primeira etapa, uma vez que controladores de ordem menor não somente são mais fáceis de serem implementados como também, conforme apresentado nesta tese, em geral, possuem melhor margem de estabilidade paramétrica relativa. Para controladores robustos  $H_\infty$ , utilizando as expressões dadas em Francis (1987), foi mostrado que a redução por truncamento balanceado é possível para os casos em que  $Q(s)$ , proveniente da parametrização de Youla Kucera, é impróprio. O método descrito nesta tese foi testado através de alguns exemplos (incluindo alguns exemplos apresentados em Keel e Bhattacharyya (1997)) e mostrou ser eficiente para maximizar a margem de estabilidade paramétrica relativa dos controladores com pequena deterioração do custo  $H_\infty$  considerado.

Uma outra contribuição desse trabalho é, a partir de uma análise crítica da

margem de estabilidade paramétrica definida por Keel e Bhattacharyya (1997), mostrou-se que em muitos casos ela é uma medida muito rigorosa da fragilidade de controladores, pois requer, para perda de estabilidade do sistema realimentado, variações elevadas de alguns parâmetros do controlador em contraste com pequenas variações de outros. Desta forma, foi sugerida uma nova margem de estabilidade paramétrica, baseada no teorema de Kharitonov, que fornece de forma mais direta uma variação percentual permitida sobre cada parâmetro de  $\underline{p}^0$  garantindo a estabilidade do sistema em malha fechada. Esta nova medida para a fragilidade dos controladores mostrou ser menos conservadora que a anterior. Outra vantagem da definição de fragilidade apresentada neste trabalho é a possibilidade de se permitir variações percentuais diferentes para os coeficientes do controlador. Para alguns exemplos, a margem de estabilidade paramétrica relativa definida em Keel e Bhattacharyya (1997) e Bhattacharyya et al. (1995) possui um valor relativamente baixo, sugerindo que o controlador seja frágil, enquanto que a margem definida por Kharitonov possui um valor consideravelmente maior, mostrando que controladores robustos  $H_\infty$  não são tão frágeis como o suposto anteriormente.

No que se refere a trabalhos futuros que podem ser desenvolvidos a partir dessa tese pode-se destacar: (i) estender os resultados obtidos para problemas de 2- e 4-blocos; (ii) incorporar os objetivos de margem de estabilidade paramétrica aos problemas de otimização  $H_\infty$ , porém com a margem de estabilidade definida através do teorema de Kharitonov, incluindo uma análise discreta para estudar a viabilidade de implementação digital de controladores robustos  $H_\infty$  projetados em tempo contínuo.

# Bibliografia

- Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H. e Keel, L. H. (1995). *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice Hall, Upper Saddle-River.
- Dorato, P. (1998). Non-fragile controller design: an overview, *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2829–2831.
- Doyle, J. C., Francis, B. A. e Tannenbaum, A. R. (1992). *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, New York.
- Doyle, J. C. e Stein, G. (1981). Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis, *IEEE Transactions on Automatic Control* **26**: 4–16.
- Famularo, D., Dorato, P., Abdallah, C. T., Haddad, W. M. e Jadbabaie, A. (2000). Robust non-fragile lq controllers: the static state feedback case, *International Journal of Control* **73**: 159–165.
- Francis, B. A. (1987). A course in  $H_\infty$  control theory, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 88, Springer-Verlag, Berlin.
- Garcia, J. S. (2000). *Controle robusto  $H_\infty$  com objetivo de margens de estabilidade relativa*, Tese de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia.
- Garcia, J. S. e Basilio, J. C. (2000). Redução direta de modelos de sistemas multivariáveis por truncamento balanceado, *Anais do 13º Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 873–878.

- Haddad, W. M. e Corrado, J. R. (2000). Robust resilient dynamic controllers for systems with parametric uncertainty and controller gain variations, *Int. Journal of Control* **73**: 1405–1423.
- Ho, M. T., Datta, A. e Bhattacharyya, S. P. (2001). Robust and non-fragile pid controller design, *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control* **11**: 681–708.
- Keel, L. H. e Bhattacharyya, S. P. (1997). Robust, fragile, or optimal?, *IEEE - Transactions on Automatic Control* **42**: 1098–1105.
- Keel, L. H. e Bhattacharyya, S. P. (1998). Stability margins and digital implementation of controllers, *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2852–2856.
- Mäkilä, P. M. (1998). Comments on “robust, fragile, or optimal?”, *IEEE - Transactions on Automatic Control* **43**: 1265–1267.
- Paattilammi, J. e Mäkilä, P. M. (2000). Fragility and robustness: A case study on paper machine headbox control, *IEEE - Control Systems Magazine* **20**: 13–22.
- Rockafellar, R. T. (1970). *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Vidyasagar, M. (1985). *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, MIT Press, Cambridge.
- Yang, G. H. e Wang, J. L. (2001). Non-fragile  $H_\infty$  control for linear systems with multiplicative controller gain variations, *Automatica* **37**: 727–737.
- Yang, G. H., Wang, J. L. e Lin, C. (2000).  $H_\infty$  control for linear systems with additive controller gain variations, *International Journal of Control* **73**: 1500–1506.
- Zhou, K., Doyle, J. e Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, Upper Saddle-River.
- Zhou, K., Salomon, G. e Wu, E. (1999). Balanced realization and model reduction for unstable systems, *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control* **9**: 183–198.