



**COPPE/UFRJ**

RASTREAMENTO GLOBAL E EXATO PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS  
NÃO-LINEARES INCERTOS

Eduardo Vieira Leão Nunes

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Liu Hsu

Rio de Janeiro

Março de 2009

RASTREAMENTO GLOBAL E EXATO PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS  
NÃO-LINEARES INCERTOS

Eduardo Vieira Leão Nunes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

---

Prof. Liu Hsu, D.Sc.

---

Prof. Amit Bhaya, Ph.D.

---

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D.Sc.

---

Prof. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, D.Sc.

---

Prof. Leonardo Antônio Borges Tôrres, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2009

Nunes, Eduardo Vieira Leão

Rastreamento Global e Exato para uma Classe de Sistemas Não-Lineares Incertos/Eduardo Vieira Leão Nunes. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2009.

XVIII, 207 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Liu Hsu

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2009.

Referências Bibliográficas: p. 152 – 162.

1. Rastreamento Global.
  2. Controle por Realimentação de Saída.
  3. Sistemas de Euler-Lagrange.
  4. Sistemas Incertos.
  5. Controle por Modos Deslizantes.
  6. Estabilidade no Sentido Entrada-Estado.
- I. Hsu, Liu. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*Dedico esta Tese a três pessoas  
muito especiais para mim.  
À minha noiva pelo carinho e  
pela compreensão.  
À minha mãe pelo amparo ao  
longo desses anos.  
Ao meu pai pelos ensinamentos  
que eu vou carregar pela minha  
vida inteira (in memoriam).*

# Agradecimentos

Agradeço (*in memoriam*) ao meu pai que sempre foi um modelo para mim, além de ter sido um excelente amigo e conselheiro.

Devo prestar um agradecimento especial a três pessoas que foram fundamentais para a conclusão deste trabalho. Ao meu orientador e amigo Prof. Liu Hsu pelo excelente Tema de Tese sugerido e pela confiança depositada em mim. Sua dedicação ao trabalho sempre me servirá de inspiração. À minha mãe Rosangela que sempre me apoiou e me incentivou a seguir a carreira acadêmica desde criança. Sua dedicação a seus filhos é louvável. Seu apoio e suporte incondicionais foram fundamentais para que este trabalho fosse possível. À minha noiva Michele que esteve sempre ao meu lado me incentivando, me ajudando e contribuindo ativamente para a redação desta Tese. Sua compreensão e sua dedicação são dignas de nota.

Agradeço a todos os membros da banca pelas importantes e valiosas sugestões que contribuíram para o aperfeiçoamento desta Tese.

Ao amigo Prof. Fernando Lizarralde que me incentivou a ingressar na área de controle e que participou ativamente no desenvolvimento da Teoria apresentada neste trabalho.

Ao amigo Prof. Ramon Costa, pela boa convivência e pelo companheirismo ao longo desses anos.

Gostaria de agradecer aos meus irmãos Marcelo e Natacha pela amizade e pela solidariedade.

Aos companheiros do Laboratório de Controle Lilian, Oumar, Luciano, Zachi, Toni, Rodrigo, Paula, pela convivência agradável e, em especial, aos amigos Josiel, Tiago e Jacoud pelo intercâmbio de idéias que ajudaram no desenvolvimento desta Tese.

Agradeço ao CNPq e a FAPERJ pelo suporte financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

RASTREAMENTO GLOBAL E EXATO PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS  
NÃO-LINEARES INCERTOS

Eduardo Vieira Leão Nunes

Março/2009

Orientador: Liu Hsu

Programa: Engenharia Elétrica

Nesta Tese, aborda-se o problema de rastreamento global para sistemas não-lineares, usando apenas realimentação de saída. Através de uma nova abordagem baseada no conceito de Estabilidade no Sentido Entrada-Estado (*Input-to-State Stability - ISS*), é provado que um simples controlador PD causal é capaz de resolver o problema de rastreamento global e exato para uma classe de sistemas de Euler-Lagrange, que engloba importantes sistemas físicos como: manipuladores robóticos, veículos submarinos, dentre outros. Este resultado é obtido considerando que o modelo dinâmico do sistema seja conhecido. Para tratar de sistemas incertos, é proposto um estimador híbrido baseado num esquema de chaveamento, que combina um estimador convencional com um diferenciador exato, tendo como objetivo assegurar simultaneamente estabilidade global e rastreamento exato. Este estimador é inicialmente utilizado em conjunto com um controlador por modos deslizantes para uma classe de sistemas não-lineares e monovariáveis com grau relativo arbitrário. Em seguida, são apresentadas condições suficientes para que o esquema de estimação híbrido possa ser empregado com sucesso para uma classe de sistemas não-lineares e multivariáveis mais abrangente. Para ilustrar, mostra-se que a classe de Sistemas de Euler-Lagrange considerada atende a estas condições, sendo proposta uma solução para o problema de rastreamento global e exato para o caso incerto.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## GLOBAL EXACT TRACKING OF A CLASS OF UNCERTAIN NONLINEAR SYSTEMS

Eduardo Vieira Leão Nunes

March/2009

Advisor: Liu Hsu

Department: Electrical Engineering

This Thesis addresses the global exact tracking problem for nonlinear systems, using only output-feedback. Through a new approach based on the Input-to-State Stability (ISS) concept, it is proven that a simple causal PD controller solves the global exact tracking problem for a class of Euler-Lagrange systems, which encompasses important applications such as: robot manipulators, underwater vehicles, among others. The result is achieved considering that the dynamic model of the system is known. To address uncertain systems, a hybrid estimator based on a switching scheme, which combines a conventional estimator with an exact differentiator, is proposed in order to ensure simultaneously global stability and exact tracking. The hybrid estimator is initially used together with a sliding mode controller for a class of single-input-single-output (SISO) nonlinear systems with arbitrary relative degree. Then, sufficient conditions are given so that the hybrid estimator can be applied successfully to a broader class of multi-input-multi-output (MIMO) nonlinear systems. To illustrate, it is shown that the considered class of Euler-Lagrange Systems satisfy such conditions, and then a solution to the global exact tracking problem is proposed for the uncertain case.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivo e Proposta do Trabalho . . . . .	4
1.2 Revisão da Literatura . . . . .	4
1.2.1 Controle de sistemas de Euler-Lagrange via realimentação de saída . . . . .	5
1.2.2 Controle a Estrutura Variável por Modos Deslizantes . . . . .	7
1.3 Visão Geral da Tese . . . . .	11
1.4 Notação e Terminologia . . . . .	12
1.5 Conceitos Básicos . . . . .	14
1.5.1 Estabilidade no Sentido Entrada-Estado . . . . .	14
1.5.2 Grau Relativo . . . . .	15
1.5.3 Forma Normal . . . . .	17
1.5.4 Dinâmica Zero . . . . .	18
<b>2 Rastreamento Global para Manipuladores Robóticos via Realimentação de Posição</b>	<b>19</b>
2.1 Introdução . . . . .	19
2.2 Modelo de um manipulador robótico . . . . .	20
2.3 Revendo o problema de regulação usando um simples regulador PD causal . . . . .	23
2.3.1 Análise de Estabilidade . . . . .	24



2.4	Rastreamento global usando um controlador PD causal com compensação feedforward . . . . .	27
2.4.1	Análise de Estabilidade . . . . .	29
2.5	Resultados de Simulação . . . . .	35
2.6	Controlador PD causal não-linear . . . . .	41
2.6.1	Reverendo o problema de regulação usando um regulador PD causal não-linear . . . . .	42
2.6.2	Rastreamento global usando um controlador PD causal não-linear com compensação feedforward . . . . .	44
2.6.3	Resultados de Simulação . . . . .	49
2.7	Conclusões e Comentários . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Rastreamento Global para Sistemas de Euler-Lagrange via Realimentação de Posição</b>	<b>55</b>
3.1	Introdução . . . . .	55
3.2	Equações de Euler-Lagrange . . . . .	56
3.3	Análise de robustez a perturbações de entrada considerando um regulador PD causal . . . . .	61
3.4	Rastreamento global usando um controlador PD causal com compensação feedforward . . . . .	63
3.4.1	Análise de Estabilidade . . . . .	64
3.4.2	Análise de Convergência . . . . .	65
3.5	Conclusões . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Sistemas a Estrutura Variável</b>	<b>69</b>
4.1	Sistema de Controle Descontínuo . . . . .	70
4.2	Noções Básicas de Controladores por Modos Deslizantes . . . . .	71
4.2.1	Existência de Modo Deslizante . . . . .	76
4.3	Descrição Matemática de Modos Deslizantes . . . . .	78
4.3.1	Método de <i>Filippov</i> . . . . .	78
4.3.2	Controle Equivalente Estendido . . . . .	81
4.4	Modos Deslizantes de Ordem Superior . . . . .	82
4.4.1	Definições de Modos Deslizantes de Ordem Superior . . . . .	83

4.4.2	Controlador por Modos Deslizantes de Segunda Ordem . . . . .	88
4.4.3	Controlador por Modos Deslizantes de Ordem Arbitrária . . . . .	95
4.5	Diferenciador Robusto e Exato (RED) . . . . .	99
4.5.1	Diferenciador de Primeira Ordem . . . . .	99
4.5.2	Diferenciadores de Ordem Arbitrária . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Controle por Modos Deslizantes Baseado num Estimador Híbrido para Sistemas SISO Incertos</b>	<b>104</b>
5.1	Introdução . . . . .	104
5.2	Formulação do Problema . . . . .	105
5.3	Exemplos de Sistemas Não-Lineares . . . . .	109
5.4	Projeto da Lei de Controle por Modos Deslizantes Convencional . . . . .	112
5.5	Controle por Modos Deslizantes Baseado num Filtro de Avanço de Fase . . . . .	115
5.6	Controlador por Modos Deslizantes baseado num Estimador Híbrido	117
5.7	Resultados de Simulação . . . . .	120
5.8	Conclusões e Comentários . . . . .	125
<b>6</b>	<b>Extensão do Estimador Híbrido para Sistemas MIMO Incertos</b>	<b>127</b>
6.1	Introdução . . . . .	127
6.2	Formulação do Problema . . . . .	128
6.3	Diferenciador Robusto e Exato ( <i>RED</i> ) . . . . .	133
6.4	Controlador por Realimentação de Saída Baseado num GRED . . . . .	134
6.5	Rastreamento Global para uma Classe de Sistemas de Euler-Lagrange Incertos . . . . .	136
6.6	Resultados de Simulação . . . . .	142
6.7	Conclusões . . . . .	147
<b>7</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>148</b>
7.1	Trabalhos Futuros . . . . .	149
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>152</b>
<b>A</b>	<b>Trabalhos Publicados</b>	<b>163</b>

<b>B</b>	<b>Noções Básicas de Geometria Diferencial</b>	<b>165</b>
B.1	Variedades Suaves e Mapas Suaves . . . . .	165
B.2	Mudança de Coordenadas . . . . .	167
B.3	Espaço Tangente . . . . .	168
<b>C</b>	<b>Proposições Auxiliares e Provas das Proposições e Lemas do</b>	
	<b>Capítulo 2</b>	<b>170</b>
C.1	Prova da Proposição 2.1 . . . . .	170
C.2	Prova do Lema 2.1 . . . . .	171
C.3	Prova do Lema 2.2 . . . . .	172
C.4	Prova do Lema 2.3 . . . . .	174
C.5	Prova do Lema 2.4 . . . . .	176
C.6	Proposição Auxiliar 1 . . . . .	177
C.7	Prova da Proposição 2.4 . . . . .	178
C.8	Prova do Lema 2.5 . . . . .	178
C.9	Prova do Lema 2.6 . . . . .	179
C.10	Prova da Proposição 2.5 . . . . .	180
C.11	Proposição Auxiliar 2 . . . . .	181
C.12	Prova do Lema 2.7 . . . . .	182
C.13	Prova do Lema 2.8 . . . . .	184
<b>D</b>	<b>Provas dos Lemas do Capítulo 3</b>	<b>186</b>
D.1	Prova do Lema 3.1 . . . . .	186
D.2	Prova do Lema 3.2 . . . . .	187
D.3	Prova do Lema 3.3 . . . . .	188
D.4	Prova do Lema 3.4 . . . . .	191
<b>E</b>	<b>Demonstração do Lema do Capítulo 4</b>	<b>193</b>
E.1	Demonstração do Lema 4.1 . . . . .	193
<b>F</b>	<b>Lema Auxiliar e Provas dos Teoremas do Capítulo 5</b>	<b>196</b>
F.1	Lema Auxiliar . . . . .	196
F.2	Prova do Teorema 5.1 . . . . .	197
F.3	Prova do Corolário 5.1.2 . . . . .	200

F.4 Prova do Teorema 5.2 . . . . .	200
<b>G Provas das Proposições e do Teorema do Capítulo 6</b>	<b>203</b>
G.1 Prova do Teorema 6.1 . . . . .	203
G.2 Prova da Proposição 6.1 . . . . .	204
G.3 Prova da Proposição 6.2 . . . . .	206
G.4 Prova da Proposição 6.3 . . . . .	207

# Lista de Figuras

2.1	Função de saturação . . . . .	29
2.2	Interconexão entre os subsistemas que constituem o sistema completo do erro . . . . .	30
2.3	Configuração planar com dois graus de liberdade do WAM. . . . .	35
2.4	Manipulador WAM sem atrito de Coulomb controlado por um PD causal: Rastreamento: (a) (- -) posição desejada $q_{d1}$ e (—) posição $q_1$ (rad); (b) (- -) posição desejada $q_{d2}$ e (—) posição $q_2$ (rad) . . . . .	39
2.5	Manipulador WAM sem atrito de Coulomb controlado por um PD causal: (a) Trecho Ampliado do Sinal $e(t)$ (rad): (—) $e_1$ e (- -) $e_2$ ; (b) Trecho Ampliado do Sinal $\dot{e}(t)$ (rad/s): (—) $\dot{e}_1$ e (- -) $\dot{e}_2$ ; (c) Trecho Ampliado do Sinal $\epsilon_e(t)$ (rad/s): (—) $\epsilon_{e1}$ e (- -) $\epsilon_{e2}$ . . . . .	39
2.6	Manipulador WAM sem atrito de Coulomb controlado por um PD causal: (a) Sinal de Controle $\tau(t)$ (N·m): (—) $\tau_1$ e (- -) $\tau_2$ ; (b) Trecho ampliado do sinal $\tau(t)$ : (—) $\tau_1$ e (- -) $\tau_2$ . . . . .	40
2.7	Manipulador WAM com atrito de Coulomb controlado por um PD causal: Rastreamento: (a) (- -) posição desejada $q_{d1}$ e (—) posição $q_1$ (rad); (b) (- -) posição desejada $q_{d2}$ e (—) posição $q_2$ (rad) . . . . .	40
2.8	Manipulador WAM com atrito de Coulomb controlado por um PD causal: Trecho Ampliado do Sinal $e(t)$ (rad): (—) $e_1$ ; (- -) $e_2$ . . . . .	41
2.9	Manipulador WAM sem atrito de Coulomb controlado por um PD causal não-linear: Rastreamento: (a) (- -) posição desejada $q_{d1}$ e (—) posição $q_1$ (rad); (b) (- -) posição desejada $q_{d2}$ e (—) posição $q_2$ (rad) . . . . .	51

2.10 Manipulador WAM sem atrito de Coulomb controlado por um PD causal não linear: (a) Trecho Ampliado do Sinal $e(t)$ (rad): (—) $e_1$ e (- -) $e_2$ ; (b) Trecho Ampliado do Sinal $\dot{e}(t)$ (rad/s): (—) $\dot{e}_1$ e (- -) $\dot{e}_2$ ; (c) Trecho Ampliado do Sinal $\epsilon_e(t)$ (rad/s): (—) $\epsilon_{e_1}$ e (- -) $\epsilon_{e_2}$ . . . . .	52
2.11 Manipulador WAM sem atrito de Coulomb controlado por um PD causal não-linear: (a) Sinal de Controle $\tau(t)$ (N·m): (—) $\tau_1$ e (- -) $\tau_2$ ; (b) Trecho ampliado do sinal $\tau(t)$ : (—) $\tau_1$ e (- -) $\tau_2$ . . . . .	52
2.12 Manipulador WAM com atrito de Coulomb controlado por um PD causal não-linear: Rastreamento: (a) (- -) posição desejada $q_{d1}$ e (—) posição $q_1$ (rad); (b) (- -) posição desejada $q_{d2}$ e (—) posição $q_2$ (rad)	53
2.13 Manipulador WAM com atrito de Coulomb controlado por um PD causal não-linear: Trecho Ampliado do Sinal $e(t)$ (rad): (—) $e_1$ ; (- -) $e_2$ . . . . .	53
3.1 Interconexão entre os subsistemas que constituem o sistema completo do erro, incluindo perturbações de entrada . . . . .	66
4.1 Plano de fase para o sistema (4.5). A linha tracejada representa a superfície de deslizamento definida por $s(x) = 0$ . . . . .	72
4.2 Plano de fase para o sistema (4.6). A linha tracejada representa a superfície de deslizamento definida por $s(x) = 0$ . . . . .	72
4.3 Plano de fase para o sistema (4.4). . . . .	73
4.4 Trajetórias do sistema (4.4) para diferentes condições de atraso: (a) atraso igual a $0.1s$ ; (b) atraso igual a $0.05s$ ; (c) atraso igual a $0.01s$ . Sinal de controle do sistema (4.4) para diferentes condições de atraso: (d) atraso igual a $0.1s$ ; (e) atraso igual a $0.05s$ ; (f) atraso igual a $0.01s$ .	74
4.5 Plano de fase para o sistema (4.7). . . . .	76
4.6 Interpretação geométrica da solução de Filippov. . . . .	81
4.7 Exemplo de um modo deslizante de segunda ordem. . . . .	86
4.8 Modo deslizante de segunda ordem com respeito a função de restrição $\sigma$	87
4.9 Idéia do controlador sub-ótimo. . . . .	90
4.10 Trajetórias do controlador Super-Twisting. . . . .	91

4.11	Trajetórias do controlador Super-Twisting: I e II: trajetórias limites; $\Gamma$ : trajetória real; C1, C2 e C3: curvas majorantes. . . . .	94
4.12	Idéia do controlador por modos deslizantes de ordem $r$ . . . . .	98
4.13	Conjunto de descontinuidade $\Gamma$ para o controlador por modos desli- zantes de ordem 3. . . . .	98
5.1	<i>SMC</i> - caso: grau relativo $\rho = 1$ . . . . .	113
5.2	Gráfico da função de chaveamento $\alpha(\tilde{v}_{rl})$ utilizada pelo controlador GRED-SMC. . . . .	119
5.3	Esquema do controlador <i>GRED-SMC</i> . . . . .	119
5.4	Planta não-linear e incerta com grau relativo $\rho = 2$ controlada por um GRED-SMC: (a) Rastreamento: (- -) posição desejada $y_d$ e (—) saída da planta $y_p$ ; (b) Estado $x_1$ da planta; (c) Estado $x_2$ da planta .	124
5.5	Planta não-linear e incerta com grau relativo $\rho = 2$ controlada por um GRED-SMC: (a) Comportamento temporal da função de chavea- mento $\alpha(\tilde{v}_{rl})$ (b) Trecho ampliado do sinal $\alpha(t)$ ; (c) Sinal de Controle $u$ . . . . .	124
5.6	Planta não-linear e incerta com grau relativo $\rho = 2$ controlada por um GRED-SMC: (a) Sinal $e(t)$ ; (b) Sinal $\dot{e}(t)$ ; (c) Sinal $\varepsilon_l(t)$ . . . . .	125
6.1	Gráfico da função de chaveamento $\alpha(\tilde{v}_{re})$ utilizada por controlador por realimentação de saída baseado num GRED. . . . .	135
6.2	Esquema do controlador por realimentação de saída baseado num GRED. . . . .	136
6.3	Manipulador WAM com atrito de Coulomb controlado por um PD + UVC + GRED: Rastreamento: (a) (- -) posição desejada $q_{d1}$ e (—) posição $q_1$ (rad); (b) (- -) posição desejada $q_{d2}$ e (—) posição $q_2$ (rad)	145
6.4	Manipulador WAM com atrito de Coulomb controlado por um PD + UVC + GRED: (a) Comportamento temporal da função de cha- veamento $\alpha(\tilde{v}_{rl})$ ; (b) Trecho Ampliado do Sinal $\alpha(t)$ ; (c) Sinal de Controle $u$ ; (d) Trecho Ampliado do Sinal $u(t)$ . . . . .	146

6.5	Manipulador WAM com atrito de Coulomb controlado por um PD + UVC + GRED: (a) Trecho Ampliado do Sinal $e(t)$ (rad): (—) $e_1$ e (- -) $e_2$ ; (b) Trecho Ampliado do Sinal $\dot{e}(t)$ (rad/s): (—) $\dot{e}_1$ e (- -) $\dot{e}_2$ ; (c) $\epsilon_e(t)$ (rad/s): (—) $\epsilon_{e_1}$ e (- -) $\epsilon_{e_2}$ . . . . .	146
B.1	Ilustração da Definição de Variedade. . . . .	166
B.2	Parametrização da esfera unitária $S^2$ . . . . .	167
B.3	Mudança de coordenadas. . . . .	168
B.4	Espaço Tangente de uma variedade suave de dimensão 2. . . . .	169



# Abreviaturas

**DOF** : Graus de Liberdade (*Degree-of-Freedom*)

**GAS** : Uniformemente Globalmente Assintoticamente Estável (*Uniformly Globally Asymptotically Stable*)

**GApS** : Uniformemente Globalmente Assintoticamente Praticamente Estável (*Uniformly Globally Asymptotically Practically Stable*)

**GES** : Uniformemente Globalmente Exponencialmente Estável (*Uniformly Globally Exponentially Stable*)

**ISS** : Estável no Sentido Entrada-Estado (*Input-to-State-Stable*)

**ISpS** : Estabilidade Prática no Sentido Entrada-Estado (*Input-to-State-Practical-Stability*)

**VSC** : Controle à Estrutura Variável (*Variable Structure Control*)

**SMC** : Controle por Modo Deslizante (*Sliding Mode Control*)

**HOSM** : Modos Deslizantes de Ordem Superior (*Higher Order Sliding Modes*)

**RED** : Diferenciador Robusto e Exato (*Robust Exact Differentiator*)

**GREDD** : Diferenciador Global, Robusto e Exato (*Global Robust Exact Differentiator*)

**GREDD-SMC** : Controlador por Modos Deslizantes baseado num GREDD

**HGO** : Observador de Alto Ganho (*High Gain Observer*)

**LI** : Localmente Integrável Segundo *Lebesgue* (*Locally Integrable in the Sense of Lebesgue*)

**SPR** : Estritamente Real Positivo (*Strictly Positive Real*)

**MRC** : Controle por Modelo de Referência (*Model-Reference Control*)

**MRAC** : Controle Adaptativo por Modelo de Referência (*Model Reference Adaptive Control*)

**VS-MRAC** : MRAC e Estrutura Variável (*Variable Structure MRAC*)

**UVC** : Controle Vetorial Unitário (*Unit Vector Control*)

**UV-MRAC** : MRAC e Vetor Unitário (*Unit Vector MRAC*)

**SISO** : Uma Entrada e Uma Saída - Monovariável (*Single-Input-Single-Output*)

**MIMO** : Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas - Multivariável (*Multi-Input-Multi-Output*)

# Capítulo 1

## Introdução

Devido a razões físicas, técnicas ou econômicas, nem sempre todos os estados de um sistema a ser controlado podem ser mensurados. Desta forma, o controle por realimentação de saída, i.e., utilizando apenas variáveis medidas, é um tópico importante tanto do ponto de vista prático quanto do ponto de vista teórico.

Uma das principais dificuldades para o projeto de controladores por realimentação de saída para sistemas não-lineares reside no fato de que, em geral, o princípio da separação não é válido para estes sistemas. Além disso, sistemas não-lineares podem apresentar o fenômeno de escape em tempo finito (Khalil 2002), que pode não ser detectável via medição da saída, ou seja, alguns estados podem escapar enquanto a saída permanece limitada, fato que dificulta ainda mais o projeto destes controladores.

Em muitas aplicações de controle, o modelo matemático para o sistema a ser controlado pode possuir discrepâncias significativas com relação à planta real. Estas diferenças podem ocorrer devido a dinâmicas não modeladas, a variação nos parâmetros da planta ou pela aproximação do comportamento complexo da planta por um modelo simplificado. É então importante poder garantir que o controlador desenvolvido possua o mesmo nível de desempenho independentemente das incertezas existentes (Edwards & Spurgeon 1998).

Observa-se que a comunidade de controle tem voltado sua atenção para o projeto de controladores via realimentação de saída para sistemas não-lineares, visando a resolver os clássicos problemas de estabilização, regulação de saída e rastreamento de trajetória (Isidori 1995). Grandes esforços têm sido feitos para desenvolver soluções

globais ou semi-globais<sup>1</sup>, tanto para o caso em que o modelo é suposto conhecido, quanto para o caso incerto. Além disso, busca-se ampliar a classe de sistemas abordada e reduzir o conjunto de hipóteses necessárias para projeto do controlador.

O foco desta Tese é o problema de rastreamento de trajetória. O objetivo é desenvolver novas soluções globais, via realimentação de saída, para uma classe de sistemas não-lineares. Além disso, o rastreamento tem que ser exato, ou seja, o erro de rastreamento (erro entre a trajetória desejada e a saída da planta) tem que tender assintoticamente (ou em tempo finito) para zero. Para tratar de sistemas incertos e considerar a presença de perturbações, estratégias de controle a estrutura variável serão empregadas para que o objetivo proposto continue sendo alcançado.

O projeto de controladores por realimentação de saída que garantam estabilização ou rastreamento global para sistemas não-lineares é um problema bastante desafiador. Como foi mostrado em (Mazenc, Praly & Dayawansa 1994), para alguns sistemas com não-linearidades com crescimento polinomial nos estados não medidos, este problema pode ser impossível de ser resolvido. Percebendo esta dificuldade, não é surpreendente que a maior parte dos resultados existentes imponham hipóteses bastante restritivas sobre a classe de sistemas não-lineares abordada.

Considerando sistemas com crescimento linear nos estados não medidos<sup>2</sup>, soluções com rastreamento global foram propostas por diversos autores (Marino & Tomei 1995, Freeman & Kokotovic 1996, Krishnamurthy, Khorrami & Jiang 2002).

Embora a maioria dos resultados globais descritos na literatura tenha sido obtida considerando sistemas com crescimento linear, não se pode deixar de mencionar que esforços têm sido dedicados ao desenvolvimento de estratégias para sistemas com crescimento superior ao linear.

Em (Aamo, Arcak, Fossen & Kokotović 2001), impondo uma condição de passividade sobre as não-linearidades do estado não-medido, foi proposto um controla-

---

<sup>1</sup>Neste trabalho, o termo *global* refere-se a uma solução (estratégia de controle) obtida independentemente das condições iniciais da planta/controlador, enquanto que *semi-global* se refere a uma solução obtida considerando um conjunto compacto *arbitrário* de condições iniciais (Khalil & Esfandiari 1993).

<sup>2</sup>Para este tipo de sistema, as não-linearidades que são funções dos estados não-medidos podem ser majoradas pela norma destes estados (e.g.  $|\varphi(x)| \leq \kappa_x |x|$ , em que  $\kappa_x > 0$  é a taxa de crescimento e  $x$  representa os estados não medidos).

dor capaz de assegurar rastreamento global para uma classe de Sistemas de Euler-Lagrange com modelo dinâmico conhecido. Outra solução global para o problema de rastreamento de trajetória foi obtida em (Gong & Qian 2007), utilizando um observador inerentemente não-linear que permite tratar de sistemas com não-linearidades do tipo  $x^k$ , com  $k$  pertencendo ao intervalo  $[1, 5/3]$  e  $x$  sendo um estado não medido.

Nesta tese, aborda-se o problema desafiador de projetar controladores por realimentação de saída que garantam rastreamento global para sistemas com não-linearidades com crescimento superior ao linear. Para melhor especificar o escopo desta Tese, dois conceitos precisam ser destacados: o de grau relativo e o de dinâmica zero.

### **Grau Relativo e Dinâmica Zero**

Para uma função de transferência escalar, o grau relativo é a diferença entre o número de pólos e o número de zeros finitos. A dinâmica zero corresponde à dinâmica que descreve o comportamento interno da planta quando se escolhe a entrada e as condições iniciais de forma a manter a saída identicamente nula, sendo um caso especial da dinâmica interna. No caso de plantas lineares, esta dinâmica é linear, podendo ser caracterizada por autovalores dados pelos zeros da planta (Khalil 2002).

Com a utilização da teoria de geometria diferencial, diversos conceitos de sistemas lineares foram generalizados para sistemas não-lineares (Byrnes & Isidori 1991, Isidori 1995, Marino & Tomei 1995, Sontag 1998, Khalil 2002), em particular o grau relativo e a dinâmica zero. A Seção 1.5 apresenta estes conceitos de maneira mais precisa.

Em geral, o grau relativo de sistemas não-lineares é igual ao número de vezes que se deve diferenciar a saída para que a entrada apareça explicitamente na expressão analítica da derivada e é uma função do estado do sistema, ou seja, não é necessariamente constante em todo o espaço de estado e, em contraste com sistemas lineares, pode não estar bem definido (Khalil 2002, Slotine & Li 1991). Além disso, o grau relativo e a dinâmica zero são características da planta que não podem ser alteradas por meio de realimentação de saída. Por estas razões, sistemas de fase não-mínima (dinâmica zero instável), com grau relativo desconhecido e variante no espaço de estado são mais difíceis de serem controlados (Isidori 2000), fugindo do escopo deste trabalho.

Nesta Tese, aborda-se o controle de sistemas não-lineares de *fase mínima* com grau relativo *arbitrário* ( $\rho \geq 1$ ), bem definido e constante em todo o espaço de estado. São considerados sistemas afins no controle, ou seja, sistemas na forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x), \quad (1.1)$$

sendo que  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado do sistema,  $u \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $y \in \mathbb{R}^m$  é a saída medida,  $g(x) = [g_1(x) \dots g_m(x)]$ . Os campos vetoriais  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$  são suficientemente suaves e  $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função suave.

O objetivo e a proposta deste trabalho podem agora ser resumidos.

## 1.1 Objetivo e Proposta do Trabalho

O **objetivo** é resolver o problema de rastreamento exato, via realimentação de saída, por meio de soluções globais. Serão tratadas plantas não-lineares, afins no controle, de fase mínima (dinâmica zero estável), com grau relativo bem definido, constante e *arbitrário*. Além disso, as não-linearidades nos estados não medidos podem ter um crescimento linear ou até mesmo polinomial. Portanto, o fenômeno de escape em tempo finito não pode ser descartado, *a priori*. Para garantir rastreamento global e exato para sistemas não-lineares incertos e/ou com perturbações, propõe-se utilizar técnicas de controle a estrutura variável por modos deslizantes, ou simplesmente, controle por modos deslizantes (SMC).

## 1.2 Revisão da Literatura

Nesta seção, será apresentado um histórico, a fim de situar a contribuição desta Tese. Inicialmente, apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre o controle por realimentação de saída para uma classe de sistemas de Euler-Lagrange (Seção 1.2.1). Por fim, apresenta-se um resumo da literatura de SMC via realimentação de saída (Seção 1.2.2) com a finalidade de deixar claro o ponto de partida deste trabalho.

### 1.2.1 Controle de sistemas de Euler-Lagrange via realimentação de saída

O controle por realimentação de saída, ou mais especificamente o controle por realimentação de posição, de Sistemas de Euler-Lagrange tem sido estudado extensivamente nos últimos 10-15 anos, atraindo uma atenção especial da comunidade de robótica.

Os trabalhos pioneiros de Ailon & Ortega (1993), Kelly (1993*b*) e Berghuis & Nijmeijer (1993*b*) mostraram de forma independente que um regulador global usando apenas realimentação de saída poderia ser obtido estendendo o regulador PD global proposto em (Takagaki & Arimoto 1981), através da substituição das velocidades das juntas pela sua estimativa obtida através de filtros causais. Deste modo, foi provado que, apesar da natureza não-linear da dinâmica de manipuladores robóticos, é possível garantir regulação global sem a necessidade de se usar as velocidades das juntas.

Desde então, diversos pesquisadores tentaram desenvolver um controlador por realimentação de saída similar para o problema de rastreamento. No entanto, a maior parte dos controladores propostos ficaram restritos a resultados de estabilidade local e semi-global. Uma revisão literária sobre as soluções locais e semi-globais pode ser encontrada em (Ortega, Loria, Nicklasson & Sira-Ramirez 1998).

Os trabalhos de Burkov (1995) e de Loria (1996) foram os primeiros a tratar do problema de rastreamento global para Sistemas de Euler-Lagrange, usando apenas realimentação de saída. Através de técnicas de análise via perturbação singular, foi mostrado em (Burkov 1995) que um controlador por torque computado em conjunto com um observador linear pode assegurar rastreamento global de trajetória para manipuladores robóticos. Entretanto, limitantes explícitos para os ganhos do controlador e do observador não poderiam ser determinados.

Em (Loria 1996), introduzindo funções trigonométricas hiperbólicas tanto no controlador quanto na extensão dinâmica para compensar a natureza quadrática dos efeitos de Coriolis, foi desenvolvido um controlador baseado no conhecimento do modelo para sistemas de Euler-Lagrange com um grau de liberdade que torna o sistema do erro uniformemente globalmente assintoticamente estável. Infelizmente, esta abordagem não pode ser estendida para o caso de  $n$  graus de liberdade (*degree-*

*of-freedom - DOF*).

Para tratar deste problema, Zhang, Dawson, de Queiroz & Dixon (2000) propuseram um controlador adaptativo composto por um termo de *feedforward*, baseado na lei de compensação adaptativa desejada (*desired compensation adaptive law - DCAL*) (Sadegh & Horowitz 1990) em conjunto com um termo de realimentação não-linear acoplado a um filtro dinâmico não-linear. Este foi o primeiro controlador global (com respeito às condições iniciais dos erros de rastreamento) por realimentação de saída a resolver o problema de rastreamento para o caso de  $n$ -DOF. Entretanto, o resultado é global, mas não no sentido usual, uma vez que as condições iniciais da extensão dinâmica devem pertencer a um conjunto restrito.

Considerando uma classe de Sistemas de Euler-Lagrange, que descreve mais adequadamente embarcações e veículos marinhos, e impondo uma condição de amortecimento monótono sobre as não-linearidades do estado não-medido, um controlador por realimentação de saída foi desenvolvido em (Aamo et al. 2001). Este controlador é capaz de tornar o sistema do erro uniformemente globalmente assintoticamente estável, se o modelo dinâmico for perfeitamente conhecido.

Em (Loria & Melhem 2002), um novo modelo cinemático-dinâmico, que é linear nas velocidades não-medidas, foi proposto para uma classe de sistemas de Euler-Lagrange. Usando este novo modelo, um observador e um controlador foram projetados com o objetivo de atingir estabilidade uniforme e convergência exponencial, globais com respeito às condições iniciais dos erros de rastreamento e semi-globais com respeito às condições iniciais dos erros de estimação, desde que o conhecimento exato do modelo do sistema esteja disponível.

Em (Besançon, Battilotti & Lanari 2003), um controlador dinâmico baseado no conhecimento do modelo foi proposto, explorando um resultado de separação que garante estabilização global via realimentação de saída, mediante a existência da propriedade de estabilizabilidade por realimentação de estado simultaneamente com a propriedade de estabilidade no sentido saída-estado (*output-to-state stability - OSS*) (Sontag & Wang 1997). Formulando o problema de rastreamento como sendo equivalente a um problema de estabilização de um sistema variante no tempo, foi mostrado que o controlador proposto assegura estabilidade global no sentido de (Zhang et al. 2000), já que o estado estendido deve permanecer num conjunto



restrito.

Mais recentemente, Dixon, Zergeroglu & Dawson (2004) propuseram um controlador robusto que garante que o erro de rastreamento seja uniformemente globalmente limitado no mesmo sentido de (Zhang et al. 2000) e que possa ser arbitrariamente reduzido aumentando-se os ganhos do controlador. O controlador proposto é composto por um termo *feedforward* baseado no modelo nominal do robô em conjunto com um termo não-linear acoplado a um filtro dinâmico que também é não-linear, sendo semelhante ao controlador proposto em (Zhang et al. 2000).

Por outro lado, explorando o amortecimento natural presente em manipuladores robóticos, Santibañez & Kelly (2001a) e Moreno & Gonzalez (2006) provaram estabilidade assintótica global para o sistema do erro, considerando controladores que utilizam apenas realimentação de saída. Entretanto, os resultados só podem ser garantidos se o atrito presente nas juntas do robô for suficientemente grande.

Nesta tese, em contraste com os esquemas mais complexos discutidos acima, mostra-se através de uma nova abordagem, denominada de “*ISS regulator approach*”, que um simples controlador PD causal (com velocidades estimadas através de um filtro de avanço de fase) com uma compensação *feedforward* pode garantir rastreamento global para uma classe de Sistemas de Euler-Lagrange, que engloba manipuladores robóticos, sistemas mecânicos simples, navios, veículos submarinos, dentre outros. Além da simplicidade, este controlador fornece uma propriedade de estabilidade global no sentido usual, i.e., nenhuma restrição sobre qualquer condição inicial do sistema em malha fechada é imposta. Aparentemente, este é o primeiro trabalho a conseguir estes resultados, considerando que o amortecimento natural possa ser arbitrariamente pequeno. Além disso, o resultado pode ser estendido para sistemas de Euler-Lagrange incertos, utilizando o estimador híbrido, proposto nos capítulos 5 e 6, em conjunto com um termo de controle vetorial unitário (*Unit Vector Control - UVC*) (Gutmann & Leitmann 1975, Gutman 1979) usado para lidar com as incertezas paramétricas do termo de compensação *feedforward*.

### 1.2.2 Controle a Estrutura Variável por Modos Deslizantes

O controle a estrutura variável (*Variable Structure Control (VSC)*) é uma alternativa de controle robusto muito eficiente para controlar sistemas incertos. A estrutura

variável caracteriza-se pela utilização de uma lei de controle descontínua que chaveia, seguindo uma dada regra, entre sistemas com estruturas diferentes, gerando um novo tipo de movimento, denominado de **modo deslizante** (ver (Emelyanov 1970), (Itkis 1976) e (Utkin 1978)).

Em geral, as funções de chaveamento são projetadas de tal forma que as trajetórias do sistema alcancem e mantenham-se em uma superfície (**superfície de deslizamento**), no espaço de estado, que são especificadas conforme um comportamento dinâmico desejado (Emelyanov 1970, Utkin 1992). Este tipo de movimento é, sob certas condições, invariante com relação às incertezas da planta, propriedade conhecida como **princípio da invariância**.

Sistemas a estrutura variável oferecem vantagens significativas como, por exemplo, bom comportamento no transiente, estabilidade exponencial global, capacidade de rejeitar perturbações não-modeladas, insensibilidade a não-linearidades da planta ou variações dos parâmetros, e destacável robustez com respeito à estabilidade e desempenho.

Entretanto, o controle a estrutura variável convencional requer que o estado completo do sistema esteja disponível (Utkin 1978). Além disso, outra grande dificuldade é a possibilidade da ocorrência do fenômeno de *chattering*, que consiste em uma oscilação de alta frequência do sinal de controle devido a imperfeições no chaveamento, levando ao conhecido *modo deslizante real* (Utkin 1992).

No *modo deslizante ideal*, o estado permanece na superfície de deslizamento, enquanto que o sinal de controle apresenta oscilações de frequência infinita (no caso ideal limite em que o chaveamento possa ocorrer num tempo arbitrariamente pequeno). No deslizamento real, as variáveis de controle oscilam em frequência alta, mas finita. Sendo assim, o deslizamento será referido como ideal quando a frequência de chaveamento for muito maior do que a frequência superior da banda passante do sistema.

### **SMC via Realimentação de Saída**

O controle por modos deslizantes utilizando apenas informação de saída foi desenvolvido inicialmente utilizando filtros de avanço de fase para reconstruir os estados não medidos. Entretanto, esta abordagem acarretava, geralmente, no aparecimento de *chattering* que destruía todas as vantagens potenciais de um SMC ideal

(Utkin 1992).

Em (Bondarev, Bondareva, Kostyleva & Utkin 1985), foi mostrado que os modos deslizantes ideais poderiam ser preservados, utilizando-se observadores de estado assintóticos. Entretanto, naquele trabalho pioneiro, o modelo da planta foi suposto conhecido e não foram consideradas perturbações externas. Para abordar sistemas lineares e não-lineares *incertos*, observadores baseados em modos deslizantes (Slotine, Hedrick & Misawa 1987, Walcott & Zak 1988, Edwards & Spurgeon 1998) e observadores de alto ganho (HGO) (Emelyanov, Korovin, Nersisian & Nisezon 1992, Esfandiari & Khalil 1992, Oh & Khalil 1995, Lu & Spurgeon 1999) também foram desenvolvidos.

Na maior parte das referências citadas, aborda-se o problema de estabilização por realimentação de saída (Walcott & Zak 1988, Zak & Hui 1993, Oh & Khalil 1995). O problema de rastreamento de trajetória (Oh & Khalil 1997), em particular especificado através de um modelo de referência, foi introduzido na literatura de VSC em (Young 1977), supondo acessíveis os estados da planta. O caso de realimentação apenas da saída foi considerado em (Ambrosino, Celentano & Garofalo 1984, Bartolini & Zolezzi 1988, Narendra & Annaswamy 1989, Hsu & Costa 1989, Hsu, Araújo & Costa 1994), utilizando a estrutura do MRAC (Sastry & Bodson 1989).

Seguindo esta abordagem, o controlador adaptativo por modelo de referência e estrutura variável (VS-MRAC - *variable structure model reference adaptive control*), de (Hsu, Lizarralde & Araújo 1997), foi aplicado a sistemas SISO e lineares. Neste caso, utiliza-se filtros de avanço de fase (derivadores sucessivos) no lugar de observadores explícitos, o que parece ser mais natural para sistemas incertos, assim como utilizar HGOs<sup>3</sup>.

O caso multivariável foi abordado em (Tao & Ioannou 1989, Chien, Sun, Wu & Fu 1996) para plantas lineares. Em (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002), através do controle vetorial unitário, a aplicação do VS-MRAC foi estendida para sistemas lineares multivariáveis, dando origem ao MRAC e vetor unitário (*unit vector model-reference adaptive control* – UV-MRAC).

A partir do trabalho desenvolvido em (Min & Hsu 2000), o VS-MRAC (original-

---

<sup>3</sup>Vale ressaltar que ignorando a entrada do HGO relativa ao controle  $u$ , HGO e derivadores sucessivos (filtro em avanço) são estruturas bastante similares (Khalil 2002).

mente concebido para plantas lineares) foi estendido para o controle de uma classe de sistemas não-lineares SISO com grau relativo igual ou inferior a dois. Posteriormente, em (Hsu, Costa & Cunha 2003), o UV-MRAC foi reprojetoado para sistemas multivariáveis e não-lineares com grau relativo unitário.

Infelizmente, estratégias de controle baseadas em modos deslizantes perdem sua exatidão, quando filtros de avanço ou HGOs são usados para gerar a função de deslizamento (Fridman 2001, Boiko & Fridman 2005). Como conseqüência, apenas convergência para uma vizinhança da origem pode ser garantida. Deste modo, estes controladores não são capazes de assegurar rastreamento exato para o caso de plantas com grau relativo maior do que um.

Recentemente, com a introdução dos modos deslizantes de ordem superior em (Levant 1993), que generalizam o conceito de modos deslizantes convencionais, uma nova classe de SMCs por realimentação de saída foi considerada por vários autores (Levant 2003, Bartolini, Levant, Pisano & Usai 2002, Fridman & Levant 2002). Uma técnica chave para implementação destes SMCs de ordem superior é o chamado diferenciador robusto e exato (Robust Exact Differentiator - RED) apresentado em (Levant 1998, Levant 2003). Embora esta classe de controladores consiga um rastreamento exato, sua estabilidade ou convergência tem sido provadas apenas localmente (Levant 2003).

Em (Nunes, Hsu & Lizarralde 2004, Nunes, Hsu & Lizarralde 2006, Nunes, Hsu & Lizarralde 2009), foi proposto um controlador por modos deslizantes baseado em um estimador híbrido, denominado de *Global Robust Exact Differentiator (GRED)*, para resolver o problema de rastreamento global e exato para plantas lineares, monovariáveis e incertas com grau relativo arbitrário. Deve ser ressaltado que este problema ainda não havia sido resolvido considerando apenas SMC via realimentação de saída. O estimador híbrido é baseado num esquema de chaveamento, que combina um RED com um filtro de avanço de fase, de forma a tornar o sistema do erro globalmente estável com respeito a um conjunto residual e, além disso, assegurar convergência global do estado do erro para zero.

Nesta Tese, inicialmente o esquema de estimação híbrido é utilizado conforme desenvolvido originalmente (combinando um RED com um filtro de avanço), sendo aplicado em conjunto com um controlador por modos deslizantes a uma classe mais

abrangente de sistemas não-lineares, monovariáveis e incertos com grau relativo arbitrário.

Em (Nunes & Hsu 2006), foi constatado que o esquema de chaveamento do estimador híbrido poderia ser implementado substituindo o filtro de avanço de fase por um HGO. Na verdade, o esquema pode ser implementado utilizando qualquer estimador convencional, desde de que este garanta propriedades de estabilidade prática para o sistema em malha fechada, mesmo na presença de perturbações na sua saída (Nunes, Hsu & Lizarralde 2008b).

Neste trabalho, realiza-se um estudo para determinar quais condições devem ser satisfeitas para que o *GRED* possa ser utilizado. Com o objetivo de caracterizar classes de sistemas não-lineares que satisfazem tais condições, o problema de rastreamento global de Sistemas de Euler-Lagrange incertos é investigado. Através do estudo realizado, é possível obter uma solução original para este problema que ainda não havia sido completamente resolvido.

### 1.3 Visão Geral da Tese

No **capítulo 2**, o problema de rastreamento global para manipuladores robóticos usando apenas realimentação de saída é investigado. No **capítulo 3**, os resultados obtidos no capítulo 2 são estendidos para uma classe mais abrangente de sistemas de Euler-Lagrange. No **capítulo 4**, apresenta-se conceitos básicos de sistemas a estrutura variável e introduz o diferenciador exato, denominado de RED, que é fundamental para as estratégias de controle consideradas nos capítulos 5 e 6. No **capítulo 5**, o estimador híbrido, denominado de GRED, é utilizado em conjunto com um SMC para assegurar rastreamento global e exato para uma classe de sistemas não-lineares, monovariáveis e incertos. No **capítulo 6** apresenta-se um extensão do esquema de estimação híbrido introduzido no capítulo 5, fornecendo condições suficientes para que o esquema possa ser empregado com sucesso para uma classe de sistemas não-lineares e multivariáveis mais abrangente. Conclusões sobre o trabalho e propostas para trabalhos futuros são apresentadas no **capítulo 7**. Para facilitar a leitura, as provas e detalhes técnicos são apresentados nos **apêndices**. Além disso, um resumo das contribuições obtidas durante o desenvolvimento desta Tese e dos

trabalhos publicados encontram-se no Apêndice A.

## 1.4 Notação e Terminologia

A norma Euclidiana de um vetor  $x$  e a correspondente norma induzida de uma matriz  $A$  são denotadas por  $|x|$  e  $|A|$ , respectivamente. Os autovalores máximo e mínimo de uma matriz  $A$  são denominados de  $\lambda_M(A)$  e  $\lambda_m(A)$ , respectivamente. Para qualquer função localmente integrável  $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\|x\|$  denota  $\text{ess sup}\{|x(t)|, t \geq 0\}$ , e, para qualquer par de tempos  $0 \leq t_1 \leq t_2$ ,

$$\|f_{[t_1, t_2]}\| = \text{ess sup}_{t \in [t_1, t_2]} |f(t)|$$

Uma função  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  é dita como sendo positiva definida se  $V(x) > 0$  para todo  $x$  diferente de zero e  $V(0) = 0$ . Ela é positiva semi-definida se  $V(0) = 0$  e  $V(x) \geq 0$  para  $x \neq 0$ . A função  $V(x)$  é negativa definida (semi-definida), se  $-V(x)$  for positiva definida (semi-definida). Uma função  $V(x)$  é dita como sendo radialmente ilimitada, ou própria, se  $V(x)$  tende para  $+\infty$  quando  $|x|$  tende para  $+\infty$ . Uma função  $V$  é suave se possui, em todos os pontos, derivadas de todas as ordens.

Uma função  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  é dita como sendo de classe  $\mathcal{K}$  se for contínua, estritamente crescente e  $\gamma(0) = 0$ . Se, além disso,  $\gamma$  for própria, então pertence a classe  $\mathcal{K}_\infty$ . Uma função  $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  é de classe  $\mathcal{KL}$  se, para cada  $t \geq 0$  fixo,  $\beta(\cdot, t)$  for de classe  $\mathcal{K}$  e, para cada  $s \geq 0$  fixo,  $\beta(s, \cdot)$  decresce para zero quando  $t \rightarrow \infty$ . As definições de funções  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_\infty$  e  $\mathcal{KL}$  estão de acordo com (Khalil 2002, p. 144). Para auxiliar o entendimento qualitativo das análises e resultados apresentados, por simplicidade pode ser considerado que  $\beta(|x(t_0)|, t - t_0) = c_\beta |x(t_0)| e^{-\lambda(t-t_0)}$  e  $\gamma(\|u\|) = c_\gamma \|u\|^2$  ou  $c_\gamma \|u\|$ , com  $c_\beta$ ,  $\lambda$ ,  $c_\gamma$  sendo constantes positivas.

Assim como em (Ioannou & Sun 1996), a saída  $y$  de um sistema linear e invariante no tempo (LTI) com função de transferência  $H(s)$  e entrada  $u$  é denotada por  $H(s)u$ . A convolução  $h(t) * u(t)$ , sendo  $h(t)$  a resposta impulsiva de  $H(s)$ , será representada eventualmente por  $H(s) * u$ .

Seja  $U$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ . Dados um campo vetorial  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e uma função escalar  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  suficientemente suaves em  $U$ , a derivada de Lie de

$h(x)$  ao longo de  $f(x)$ , é definida por (Khalil 2002, pp. 510) (Isidori 1995, pp. 8):

$$L_f h(x) := \frac{\partial h}{\partial x} f(x), \quad \frac{\partial h}{\partial x} := \left[ \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \right],$$

com  $x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$ .

As seguintes notações serão utilizadas:

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial [L_f h]}{\partial x} g(x), \quad L_f^k h(x) = \frac{\partial [L_f^{k-1} h]}{\partial x} f(x),$$

sendo que  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo vetorial,  $k = 1, 2, \dots$ , e  $L_f^0 h(x) = h(x)$ .

Freqüentemente, omite-se a variável  $x$ , ou seja, escreve-se simplesmente  $L_f h, L_f^k h$  e  $L_g L_f h$ . Deve ser destacado que em diversos casos  $U = \mathbb{R}^n$

Sejam  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  dois campos vetoriais suficientemente suaves, o colchete de Lie, denotado por  $[f, g]$ , é um outro campo vetorial definido por (Khalil 2002, pp. 523) (Isidori 1995, pp. 8):

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

para  $x \in U$ . Nesta expressão  $[\partial g / \partial x]$  e  $[\partial f / \partial x]$  são matrizes Jacobianas, dadas por:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

O colchete de Lie, é comumente escrito como  $ad_f g(x)$ , sendo que  $ad$  significa adjunto.

Colchetes de Lie repetidos podem ser definidos recursivamente por:

$$ad_f^0 g(x) = g(x)$$

$$ad_f g(x) = [f, g](x)$$

$$ad_f^k g(x) = [f, ad_f^{k-1} g](x), \quad k \geq 1$$

Considere os campos vetoriais  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Um conjunto de campos vetoriais  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  é dito como sendo involutivo, se e somente se existirem funções escalares  $\delta_{ijk} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tais que (Slotine & Li 1991, pp. 235):

$$[f_i, f_j] = \sum_{k=1}^m \delta_{ijk}(x) f_k(x) \quad \forall i, j$$

Involutividade significa que o colchete de Lie formado por qualquer par de campos vetoriais do conjunto  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  pode ser expresso como uma combinação linear do conjunto de campos vetoriais original.

Seja  $\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}$  o subespaço do  $\mathbb{R}^n$  gerado pelos vetores  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  fixo. A coleção de todos os espaços vetoriais  $\Delta(x)$  para  $x \in \mathbb{R}^n$  é chamada de distribuição, sendo referida por (Khalil 2002, pp. 524) (Isidori 1995, pp. 13):

$$\Delta = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$$

Uma distribuição é involutiva se o colchete de Lie  $[g_1, g_2]$  de qualquer par de campos vetoriais  $g_1$  e  $g_2$  pertencentes a  $\Delta$  também pertencer a  $\Delta$  (Khalil 2002, pp. 524) (Isidori 1995, pp. 17), i.e se:

$$g_1 \in \Delta, g_2 \in \Delta \Rightarrow [g_1, g_2] \in \Delta$$

Diz-se que uma função  $f(\tau)$  é de ordem  $\tau^n$ , i.e.  $\mathcal{O}(\tau^n)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , se

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{|f(\tau)|}{|\tau^n|} = K < \infty$$

sendo que  $K$  é uma constante positiva finita.

## 1.5 Conceitos Básicos

Esta seção apresenta resumidamente os conceitos básicos utilizados nesta Tese, que estão bem apresentados nos livros (Khalil 2002, Isidori 1995, Utkin 1992) e em (Sontag 1989, Jiang, Teel & Praly 1994, Sontag & Wang 1995, Jiang, Mareels & Wang 1996, Jiang & Mareels 1997, Krichman, Sontag & Wang 2001).

### 1.5.1 Estabilidade no Sentido Entrada-Estado

**Definição 1** *O sistema  $\dot{x} = f(t, x, v)$  é dito como sendo praticamente estável no sentido entrada-estado (input-to-state practically stable) (ISpS) (Jiang et al. 1994, Jiang et al. 1996, Jiang & Mareels 1997), se existirem  $\beta \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma \in \mathcal{K}$ , referido como o ganho ISpS, e uma constante não negativa  $K$ , tais que para cada tempo inicial*



$t_0 \geq 0$  e cada condição inicial  $x(t_0)$ , e para cada sinal de entrada  $v(\cdot)$  limitado, definido no intervalo  $[t_0, \infty)$ , a solução exista em  $[t_0, \infty)$  e seja tal que:

$$|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0) + \gamma(\|v_{[t_0, t]}\|) + K \quad (1.2)$$

Se (1.2) for satisfeita com  $K = 0$ , o sistema é dito como sendo estável no sentido entrada-estado (input-to-state stable) (ISS) (Sontag 1989, Sontag & Wang 1995).

Se (1.2) for satisfeita com  $v \equiv 0$ , então o sistema é uniformemente globalmente assintoticamente praticamente estável (uniformly globally asymptotically practically stable) (GApS).

Se (1.2) for satisfeita com  $v \equiv 0$  e  $K = 0$ , então o sistema é uniformemente globalmente assintoticamente estável (uniformly globally asymptotically stable) (GAS).

**Definição 2** Uma função contínua  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  é uma função de armazenamento (Krichman et al. 2001), se existirem  $\underline{\alpha}, \bar{\alpha} \in \mathcal{K}_\infty$  tais que  $\underline{\alpha}(|x|) \leq V(x) \leq \bar{\alpha}(|x|)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  ( $V$  é positiva definida e própria).

**Definição 3** Uma função de armazenamento suave  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Lyapunov-ISpS (ISpS-Lyapunov function) (Jiang et al. 1996) para o sistema  $\dot{x} = f(t, x, v)$ , se existirem  $\alpha, \sigma \in \mathcal{K}_\infty$  e uma constante não negativa  $\bar{c}$ , tais que:

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha(|x|) + \sigma(|v|) + \bar{c} \quad (1.3)$$

Quando (1.3) é satisfeita com  $\bar{c} = 0$ ,  $V$  é dita como sendo uma função de Lyapunov-ISS (Sontag & Wang 1995).

A existência de uma função de Lyapunov-ISpS (Lyapunov-ISS) é uma condição equivalente para que o sistema seja ISpS (ISS) (Jiang et al. 1996, Sontag & Wang 1995).

## 1.5.2 Grau Relativo

Conforme mencionado anteriormente, para uma função de transferência escalar, o grau relativo é a diferença entre o número de pólos e de zeros. Também é o número de vezes que a saída  $y(t)$  precisa ser diferenciada em relação ao tempo até que a entrada  $u$  apareça explicitamente na expressão analítica desta última diferenciação.

Vale lembrar que o grau relativo de sistemas não-lineares pode não estar bem definido. Para um sistema não-linear, afim no controle como em (1.1), monovariável ( $m = 1$ ), o grau relativo em um ponto  $x^o$  é igual a um, se  $L_g h \neq 0$  em  $x = x^o$ . Isto se deve ao fato de que

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = L_f h + L_g h u,$$

e, portanto, a entrada  $u$  aparecerá na expressão de  $\dot{y}$ , se o “coeficiente”  $L_g h$  for diferente de zero. Se  $L_g h$  for nulo, pode-se derivar  $\dot{y}$  em relação ao tempo mais uma vez e verificar se a entrada  $u$  aparece na expressão de  $\ddot{y}$ , etc. O grau relativo é dito *uniforme* (Isidori 1995) (neste trabalho, será denominado também de *global*) se for bem definido e constante em todo o espaço de estado ( $\forall x^o \in \mathbb{R}^n$ ).

Será adotada a versão multivariável da noção de grau relativo de sistemas não-lineares apresentada em (Isidori 1995, pp. 220) e repetida, a seguir, por conveniência. Considere o sistema não-linear multivariável (1.1) reescrito na seguinte forma:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i, \quad y = [h_1(x) \ h_2(x) \ \dots \ h_m(x)]^T \quad (1.4)$$

O sistema (1.4) possui *grau relativo vetorial*  $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$  em  $x = x^o$  se:

(i) Para todo  $x$  em uma vizinhança de  $x = x^o$ , tem-se:  $L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0, \forall i, j \in \{1, \dots, m\}, \forall k \in \{0, \dots, \rho_i - 2\}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

(ii) A matriz

$$K_{px} := \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_2-1} h_2(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}$$

for invertível para  $x = x^o$ .

Diz-se que o grau relativo é *global* se (i) e (ii) forem válidas  $\forall x^o \in \mathbb{R}^n$  e *uniforme* quando, além de global, as seguintes igualdades se verificarem  $\rho_1 = \dots = \rho_m$ . Quando o sistema (1.4) é linear ( $f(x) = Ax, g(x) = B$  e  $h(x) = C$ ) e o grau relativo é uniforme e igual a  $\rho$ , a condição (i) pode ser expressa por meio dos parâmetros de Markov  $CB \equiv CAB \equiv \dots \equiv CA^{\rho-2}B \equiv 0$  e a matriz  $K_{px}$  corresponde ao ganho de alta frequência da planta que é dado por  $K_{px} = K_p = CA^{\rho-1}B$  (invertível).

### 1.5.3 Forma Normal

Por simplicidade, considere o caso monovariável (SISO), i.e.  $m = 1$  em (1.1). Considere a seguinte mudança de coordenadas que leva o estado  $x$  do sistema (1.1) para o estado  $\bar{x} = [ \eta^T \quad \xi^T ]^T$ , com  $\eta$  e  $\xi$  definidos por:

$$\eta := T_\eta(x) \quad \text{e} \quad \xi = T_\xi(x) := \left[ h \quad L_f h(x) \quad L_f^2 h(x) \quad \dots \quad L_f^{\rho-1} h(x) \right]^T, \quad (1.5)$$

em que  $T_\eta(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-\rho}$  é uma função apropriada. Pode-se mostrar por meio do Teorema de Frobenius<sup>4</sup> que o sistema (1.1) possuir grau relativo  $\rho$  em  $x = x^o$  é uma condição suficiente para encontrar  $T_\eta$  de tal forma que a transformação  $T(x) := \left[ T_\eta^T(x) \quad T_\xi^T(x) \right]^T$  seja um difeomorfismo local ( $x = x^o$ ), portanto, uma transformação de coordenadas na vizinhança de  $x = x^o$ .

Além disso, pode-se garantir que existe  $T_\eta(x) = [ T_{\eta_1}(x) \quad \dots \quad T_{\eta_{n-\rho}}(x) ]^T$  tal que  $L_g T_j = 0$  para  $j = 1, \dots, n - \rho$  e para todo  $x$  em torno de  $x^o$ .

Note que  $y^{(i)} = L_f^i h = \xi_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, \rho$  e que para  $j = 1, \dots, n - \rho$ , tem-se:

$$\frac{dT_{\eta_j}}{dt} = \frac{\partial T_{\eta_j}}{\partial x} [f + gu] = L_f T_{\eta_j} + \underbrace{L_g T_j}_{=0} u = L_f T_{\eta_j}.$$

Nessas novas coordenadas, diz-se que o sistema se encontra na *forma normal* (Isidori 1995, Khalil 2002), possibilitando a separação do sistema original em um subsistema *interno*

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi), \quad (1.6)$$

e um subsistema *externo*

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{\rho-1} &= \xi_\rho, \\ \dot{\xi}_\rho &= L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) u, \end{aligned} \quad (1.7)$$

em que  $x$  pode ser escrito em função de  $\eta$  e  $\xi$  por meio da inversa do difeomorfismo local  $T(x)$ . Para obter uma forma normal global não basta que o grau relativo seja

<sup>4</sup>Ver (Isidori 1995, Proposição 4.1.3, pp 141).

uniforme (global), é necessário  $T$  ser um difeomorfismo global. Para tanto, de acordo com (Khalil 2002), uma condição suficiente é o jacobiano  $\partial T(x)/\partial x$  ser invertível  $\forall x$  e  $T(x)$  ser próprio ( $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |T(x)| = \infty$ ). Em (Isidori 1995, Proposição 9.1.1, pp. 428) são fornecidas condições suficientes para se obter a forma normal de plantas monovariáveis.

Não basta que (1.4) possua grau relativo vetorial bem definido em  $x = x^o$  para se ter uma versão multivariável da forma normal local (1.6) e (1.7). Entretanto, se adicionalmente for suposto que o conjunto de campos vetoriais  $\{g_1(x), \dots, g_q(q)\}$  forme uma distribuição involutiva<sup>5</sup> para valores em torno de  $x = x^o$ , pode-se obter a versão MIMO de acordo com (Isidori 1995, Proposição 5.1.2, pp. 222). No capítulo 6, condições suficientes para a obtenção da forma normal global para sistemas MIMO são apresentadas.

#### 1.5.4 Dinâmica Zero

Considere o sistema não-linear (1.1), monovariável ( $m = 1$ ) e com grau relativo igual a um. A lei de controle  $u = (L_g h)^{-1}[v - L_f h]$  garante que  $\dot{y} = v$ . Esta lei realiza o que se denomina de linearização entrada-saída (Marino & Tomei 1995), pois cancela as não-linearidades presentes na equação de  $\dot{y}$  convertendo-a em  $\dot{y} = v$ .

Escolhendo-se novas coordenadas em que  $y$  seja uma das componentes do vetor de estado, as  $n - 1$  equações restantes com  $y(t) \equiv 0$  e  $v(t) \equiv 0$  constituem a *dinâmica zero*, ou seja, a dinâmica que resulta quando a saída é mantida nula.

No caso de grau relativo igual a dois, o sistema linearizado (via entrada-saída) é um duplo integrador,  $\ddot{y} = v$ . Neste caso, escolhendo-se coordenadas em que  $y$  e  $\dot{y}$  sejam componentes do vetor de estado, a dinâmica zero é descrita pelas  $n - 2$  equações restantes fazendo  $y(t) \equiv \dot{y}(t) \equiv 0$  e  $v(t) \equiv 0$ . A dinâmica zero é dada pela dinâmica que resulta do subsistema interno (1.6), considerando-se  $\xi = 0, \forall t$ .

---

<sup>5</sup>Pode-se encontrar uma definição em (Isidori 1995, pp. 17).

# Capítulo 2

## Rastreamento Global para Manipuladores Robóticos via Realimentação de Posição

### 2.1 Introdução

Manipuladores robóticos constituem uma importante classe de sistemas de Euler-Lagrange, sendo empregados em inúmeras aplicações práticas de diversas áreas. Muitos esquemas de controle assumem que medidas das velocidades das juntas estejam disponíveis. Embora, seja possível medir as velocidades usando tacômetros, o uso de sensores adicionais representa um aumento do custo e, além disso, os sinais fornecidos podem estar contaminados com ruído (Arteaga & Kelly 2004).

Neste capítulo, será mostrado que um simples controlador PD causal (com velocidades estimadas através de um filtro de avanço de fase) com uma compensação *feedforward* pode garantir um rastreamento global de trajetória. Para esta finalidade, será utilizada uma nova técnica de análise, denominada de “*ISS regulator approach*”. Esta técnica aborda o problema em três etapas. Primeiramente, considera-se o problema de regulação para um ponto de operação desejado. Explorando a existência do amortecimento natural, é provado que um manipulador robótico controlado por um regulador PD causal é ISS com respeito a uma perturbação de entrada limitada, fornecendo-se uma função de Lyapunov-ISS. Em seguida, considerando-se o problema de rastreamento, mostra-se que um controlador PD causal com compensação

*feedforward* é equivalente ao regulador considerado na primeira etapa com uma perturbação de entrada aditiva e limitada. A partir deste resultado, é possível demonstrar que o sistema completo do erro em malha fechada possui estabilidade prática global. Finalmente, tirando-se proveito da limitação global dos sinais do sistema, prova-se que o sistema do erro em malha fechada é GAS, fornecendo-se limitantes finitos para os valores dos ganhos do controlador e das constantes de tempo do filtro de avanço de fase.

O resultado de estabilidade obtido para o controlador PD causal com compensação *feedforward* é global no sentido usual, i.e., nenhuma restrição sobre qualquer condição inicial do sistema em malha fechada é imposta. Além disso, o resultado é válido, não importando o quão pequeno seja o amortecimento natural. Aparentemente, este é o primeiro trabalho a conseguir estes resultados, considerando que o amortecimento natural possa ser arbitrariamente pequeno, hipótese que parece ser bastante razoável do ponto de vista prático.

Embora a técnica de análise “ISS regulator approach” tenha sido proposta inicialmente para tratar de um problema específico, ela pode ser empregada em contextos mais gerais. Para ilustrar este fato, será provado, utilizando esta técnica, que um controlador PD causal com ganho proporcional não-linear também é capaz de solucionar o problema de rastreamento global para manipuladores robóticos, usando apenas medidas de posição. Além disso, será mostrado que este controlador PD causal não-linear, permite o desenvolvimento de um limitante inferior menos conservativo para as constantes de tempo do filtro de avanço de fase.

Neste capítulo, também serão apresentadas simulações numéricas, considerando o modelo de um manipulador real, com o intuito de verificar os resultados teóricos obtidos. Além disso, serão apresentadas conclusões e considerações finais.

## 2.2 Modelo de um manipulador robótico

Manipuladores Robóticos são sistemas mecânicos articulados compostos por elos conectados por meio de juntas de revolução, prismáticas ou esféricas. As juntas de revolução e as juntas prismáticas são os tipos mais comuns encontrados em robôs manipuladores. (Sciavicco & Siciliano 2000, Santibañez, Kelly & Loria 2005)

A dinâmica de um manipulador rígido com  $n$  graus de liberdade é convenientemente descrita pela formulação Lagrangiana e Hamiltoniana (Murray, Li & Sastry 1994). No enfoque Lagrangiano, as equações que descrevem o movimento podem ser desenvolvidas de modo sistemático, independentemente do sistema de coordenadas, através de um conjunto adequado de coordenadas generalizadas (Sciavicco & Siciliano 2000).

Numa cadeia cinemática aberta, cada junta de revolução ou prismática fornece um grau de liberdade adicional a estrutura mecânica. Desta forma, um robô com  $n$  juntas apresentará  $n$  graus de liberdade. Quando os atuadores estão convenientemente localizados, as posições das juntas podem ser utilizadas como sendo as variáveis de coordenadas generalizadas (Santibañez et al. 2005).

O modelo dinâmico de um robô rígido com  $n$  graus de liberdade e juntas de revolução pode ser descrito por (Sciavicco & Siciliano 2000):

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \zeta F_v \dot{q} + g(q) = \tau, \quad (2.1)$$

na qual  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$ ,  $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}^n$  denotam a posição, a velocidade e a aceleração das juntas, respectivamente; a matriz de Inércia  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é simétrica e positiva definida;  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz das forças centrípetas/Coriolis;  $\zeta$  é uma constante positiva genérica, e  $F_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  denota a matriz de atrito viscoso considerada constante, diagonal e positiva definida;  $g(q) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de gravidade; e  $\tau \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de torques que atua nas juntas. A matriz de Coriolis/centrípeta é definida usando-se os símbolos de Christoffel (Spong & Vidyasagar 1989, Ortega et al. 1998, Santibañez et al. 2005).

A dinâmica do sistema (2.1) exibe as seguintes propriedades, que serão úteis nas análises subseqüentes (Sciavicco & Siciliano 2000, Spong & Vidyasagar 1989, Ortega et al. 1998, Santibañez et al. 2005).

**Propriedade 2.1** *A matriz de inércia é limitada superiormente e inferiormente pelas seguintes desigualdades:*

$$\lambda_m(M) |x|^2 \leq x^T M(q)x \leq \lambda_M(M) |x|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

sendo que

$$\lambda_m(M) := \min_{q \in \mathbb{R}^n} \lambda_m(M(q)), \quad \lambda_M(M) := \max_{q \in \mathbb{R}^n} \lambda_M(M(q))$$

**Propriedade 2.2** A matriz de inércia satisfaz a seguinte desigualdade:

$$|M(x)z - M(y)z| \leq k_M |x - y| |z|, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$$

na qual  $c_M$  pode ser calculada da seguinte maneira:

$$k_M = n^2 \left( \max_{i,j,k,q} \left| \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right| \right),$$

em que  $M_{ij}(q)$  é o elemento  $ij$  da matriz  $M(q)$ .

**Propriedade 2.3** As matrizes de inércia e de Coriolis/centrípeta satisfazem a seguinte relação:

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q}), \quad \forall q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n,$$

**Propriedade 2.4** A matriz  $\frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q, \dot{q})$  é anti-simétrica, i.e.,

$$x^T \left( \frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right) x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

**Propriedade 2.5** A matriz de Coriolis/centrípeta satisfaz a seguinte desigualdade:

$$|C(x, z)w - C(y, v)w| \leq c_1 |z - v| |w| + c_2 |z| |x - y| |w|, \quad \forall x, y, z, v, w \in \mathbb{R}^n$$

na qual os parâmetros  $c_1$  e  $c_2$  podem ser calculados do seguinte modo:

$$c_1 = n^2 \left( \max_{i,j,k,q} |c_{ijk}(q)| \right),$$

$$c_2 = n^3 \left( \max_{i,j,k,l,q} \left| \frac{\partial c_{ijk}(q)}{\partial q_l} \right| \right),$$

sendo que  $c_{ijk}$  é o símbolo de Christoffel  $ijk$ .

**Propriedade 2.6** O vetor de gravidade satisfaz a seguinte desigualdade:

$$|g(x) - g(y)| \leq k_g |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

na qual o parâmetro  $c_g$  pode ser calculado do seguinte modo:

$$k_g = n \left( \max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right| \right),$$

sendo que  $g_i(q)$  é o elemento  $i$  do vetor  $g(q)$ .



**Propriedade 2.7** *A dinâmica do robô pode ser parametrizada linearmente:*

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \zeta F_v\dot{q} + g(q) = \tau,$$

onde  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times l}$  é a matriz regressora e  $\theta \in \mathbb{R}^l$  é um vetor constante de parâmetros.

**Propriedade 2.8** *Os seguintes majorantes são válidos:*

$$|C(q, \dot{q})| \leq c_1 |\dot{q}|, \quad \left| \dot{M}(q) \right| \leq c_m |\dot{q}|, \quad |g(q)| \leq c_g, \quad |\theta| \leq c_\theta$$

## 2.3 Revendo o problema de regulação usando um simples regulador PD causal

Em (Ailon & Ortega 1993, Kelly 1993b, Berghuis & Nijmeijer 1993a), foi mostrado que um regulador PD causal com compensação da gravidade garante uma regulação assintótica e global para um manipulador robótico com juntas de revolução. Para esta finalidade, foi utilizada uma função de Lyapunov com derivada negativa semi-definida em conjunto com o princípio de invariância de LaSalle.

Em (Angeli 1999), foi provado que um manipulador com juntas de revolução controlado por um PD não causal, que utiliza as velocidades das juntas, é ISS com respeito a perturbações de entrada limitadas. Neste mesmo artigo, foi mostrado que tal controlador não é capaz de assegurar esta propriedade para o caso de manipuladores com juntas prismáticas.

Nesta seção, considera-se o problema de regulação global de saída para um ponto de operação constante desejado  $q_r$ , usando apenas medidas de posição. O objetivo é demonstrar que um manipulador, descrito por (2.1), controlado por um regulador PD causal, com ou sem compensação de gravidade, é ISS com respeito a perturbações de entrada limitadas. Para isto, será fornecida uma função de Lyapunov-ISS para o sistema em malha fechada. Este resultado mais abrangente é obtido usando as idéias apresentadas em (Angeli 1999) e tirando proveito da existência do amortecimento natural do robô. Além disso, será mostrado que o regulador PD com compensação da gravidade é capaz de assegurar que o erro de regulação  $\tilde{q} := q - q_r$  tenda assintoticamente para zero, na ausência de perturbações.

O regulador PD clássico, que utiliza medidas das velocidades das juntas, é dado por:

$$\tau = -K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} \quad (2.2)$$

sendo que  $K_p$  e  $K_d$  são matrizes simétricas e positivas definidas.

Como é considerado que apenas medidas das posições das juntas estão disponíveis, as velocidades das juntas podem ser estimadas através do seguinte filtro de avanço de fase:

$$\hat{v} = \text{diag} \left\{ \frac{s}{\mu_i s + 1} q_i \right\}, \quad \left( \hat{v}_i = \frac{s}{\mu_i s + 1} q_i \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

onde, sem perda de generalidade, as constantes temporais  $\mu_i$  do filtro de avanço de fase para cada junta individual são escolhidas como sendo iguais a  $\mu$ . O parâmetro  $\mu$  é uma constante positiva genérica, entretanto, quando uma grande precisão é requerida,  $\mu$  deve ser feito suficientemente pequeno (c.f. seção 2.4).

O filtro de avanço de fase (2.3) pode ser descrito no espaço de estado por:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= -\frac{1}{\mu} \vartheta - \frac{1}{\mu^2} q, \\ \hat{v} &= \vartheta + \frac{1}{\mu} q \end{aligned} \quad (2.4)$$

A lei de controle do regulador PD causal é obtida usando a estimativa da velocidade  $\hat{v}$  ao invés da velocidade exata  $\dot{q}$  em (2.2), sendo dada por:

$$\tau = -K_p \tilde{q} - K_d \hat{v} \quad (2.5)$$

### 2.3.1 Análise de Estabilidade

Na análise de estabilidade, será considerada a presença de uma perturbação de entrada limitada  $d_i(t)$  no sistema (2.1), logo o sinal de entrada é dado por:

$$\tau = -K_p \tilde{q} - K_d \hat{v} + d_i \quad (2.6)$$

Substituindo (2.6) em (2.1), tem-se:

$$\ddot{q} = M(q)^{-1} [-C(q, \dot{q})\dot{q} - \zeta F_v \dot{q} - g(q) - K_p \tilde{q} - K_d \hat{v} + d_i]$$

Como  $g(q) \leq c_g, \forall q \in \mathbb{R}^n$ , para simplificar a análise, a seguinte perturbação de entrada limitada será considerada:

$$d = d_i - g(q) \quad (2.7)$$

Com o intuito de permitir que a análise leve em conta a possibilidade de pouco amortecimento natural, o parâmetro  $\zeta$  será considerado como sendo um pequeno parâmetro. Definindo o estado do sistema em malha fechada (2.1), (2.4) e (2.6) como  $x^T := [\tilde{q}^T \dot{q}^T \hat{v}^T]$ , a equação de estado pode ser descrita por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M(q)^{-1} [d - C(q, \dot{q})\dot{q} - \zeta F_v \dot{q} - K_p \tilde{q} - K_d \hat{v}] \\ -\frac{\hat{v}}{\mu} + \frac{\dot{q}}{\mu} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Agora, considere a seguinte função de Lyapunov-ISS candidata:

$$V_1(x) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \frac{1}{2} \mu \hat{v}^T K_d \hat{v} + \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T M(q) \dot{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}}, \quad (2.9)$$

na qual  $\varepsilon_1$  é uma constante positiva suficientemente pequena. Esta função de Lyapunov é composta por um termo de energia mais um termo cruzado normalizado. A motivação de se usar um termo cruzado é obter uma função com derivada temporal negativa definida, ao invés de apenas negativa semi-definida. Funções de Lyapunov similares já foram propostas por diversos autores na literatura (e.g. termos cruzados sem normalização (Koditscheck 1988) e com normalização (Angeli 1999, Tomei 1991, Kelly 1993a)).

A seguinte Proposição mostra que  $V_1(x)$  é uma função de armazenamento, se  $\varepsilon_1$  for suficientemente pequeno.

**Proposição 2.1** *A função  $V_1(x)$  definida em (2.9) é uma função de armazenamento suave, se  $\varepsilon_1$  for tal que:*

$$\varepsilon_1 \leq \frac{\sqrt{\lambda_m(M)\lambda_m(K_p)}}{2\lambda_M(M)}, \quad (2.10)$$

podendo ser majorada inferiormente e superiormente por:

$$\underline{\alpha}_1(|x|) = \kappa_1 |x|^2 \leq V_1(x) \leq \kappa_2 |x|^2 = \bar{\alpha}_1(|x|)$$

onde  $\underline{\alpha}_1$  e  $\bar{\alpha}_1$  são funções de classe  $\mathcal{K}_\infty$ ;

$$\kappa_1 \leq \frac{1}{4} \min\{\lambda_m(M), \lambda_m(K_p), 2\mu\lambda_m(K_d)\}; \quad (2.11)$$

$$\kappa_2 \geq \frac{\lambda_M(P_1)}{2}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_M(M) & \varepsilon_1 \lambda_M(M) & 0 \\ \varepsilon_1 \lambda_M(M) & \lambda_M(K_p) & 0 \\ 0 & 0 & \mu \lambda_M(K_d) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

*Prova: Ver Apêndice C.1* ■

O seguinte Lema mostra que  $V_1(x)$  é uma função de Lyapunov-ISS, se  $\varepsilon_1$  for suficientemente pequeno.

**Lema 2.1** *A função  $V_1(x)$  definida em (2.9) é uma função de Lyapunov-ISS para o sistema (2.8), se  $\varepsilon_1$  for escolhido tal que as desigualdades (2.10) e (2.13) sejam satisfeitas.*

$$\varepsilon_1 < \min \left\{ \frac{\lambda_m(K_p)\lambda_m(F_v)\lambda_m(K_d)}{2\zeta\lambda_M^2(F_v)\lambda_m(K_d) + \lambda_M^2(K_d)\lambda_m(F_v)}, \frac{\zeta\lambda_m(F_v)}{4(2\lambda_M(M) + c_1)} \right\} \quad (2.13)$$

Além disso, a derivada temporal de  $V_1(x)$  ao longo da solução de (2.8), pode ser majorada por:

$$\dot{V}_1(x) \leq -\alpha_1(|x|) + \sigma_1(|d|) \quad (2.14)$$

sendo que  $\sigma_1(r) = \kappa_3(r + r^2) \in \mathcal{K}_\infty$  e  $\alpha_1(r) = \kappa_4 r^2 / \sqrt{1 + r^2} \in \mathcal{K}_\infty$ , com

$$\kappa_3 = \max \left\{ \varepsilon_1, \frac{1}{\zeta\lambda_m(F_v)} \right\}; \quad (2.15)$$

$$\kappa_4 \leq \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{1}{2}\zeta\lambda_m(F_v), \lambda_m(K_d), \varepsilon_1\lambda_m(K_p) \right\} \quad (2.16)$$

*Prova:* Ver Apêndice C.2 ■

Note que o resultado obtido no Lema 2.1 é independente do valor do parâmetro  $\mu$  do filtro de avanço e dos valores dos ganhos  $K_p$  e  $K_d$  do controlador. Além disso, a existência de uma função de Lyapunov-ISS implica que o sistema em malha fechada (2.8) é ISS com respeito à perturbação de entrada  $d(t)$ .

Os resultados de estabilidade obtidos nesta seção são formalmente enunciados no seguinte Teorema.

**Teorema 2.1** *Considere um robô rígido com  $n$  graus de liberdade e juntas de revolução descrito por (2.1). Se a lei de controle for definida como em (2.4) e (2.5), então o sistema em malha fechada (2.8) é ISS com respeito a uma perturbação de entrada limitada  $d(t)$ . Além disso, se  $d(t) \equiv 0$ , i.e.  $d_i = g(q)$ , então o sistema em malha fechada (2.8) é uniformemente globalmente assintoticamente estável (GAS).* ■

## 2.4 Rastreamento global usando um controlador PD causal com compensação feedforward

Nesta seção, o problema de rastreamento global de trajetória para manipuladores robóticos com modelo dinâmico descrito por (2.1) será abordado. Considera-se que apenas medidas de posição estejam disponíveis. O erro de rastreamento  $e(t) \in \mathbb{R}^n$  é definido como:

$$e(t) = q(t) - q_d(t),$$

onde  $q_d(t)$  é a trajetória desejada. Os sinais  $q_d(t)$ ,  $\dot{q}_d(t)$ ,  $\ddot{q}_d(t)$  são considerados como sendo contínuos e limitados por  $|q_d|_M$ ,  $|\dot{q}_d|_M$  e  $|\ddot{q}_d|_M$ , respectivamente. O objetivo é projetar uma lei de controle de forma que o erro de rastreamento  $e(t)$  tenda assintoticamente para zero, para quaisquer condições iniciais, enquanto todos os sinais do sistema em malha fechada permaneçam uniformemente limitados.

Com o intuito de simplificar a análise e o projeto do controlador, a seguinte hipótese é feita:

**Hipótese 2.1** *O modelo dinâmico (2.1) do robô é considerado como sendo conhecido, o que significa que o vetor de parâmetros constantes  $\theta$ , apresentado na Propriedade 2.7, também é conhecido.*

Como o objetivo é resolver o problema de rastreamento de trajetória, o seguinte termo de compensação *feedforward* é adicionado ao sinal de controle:

$$Y_d \theta = M(q_d) \ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d) \dot{q}_d + \zeta F_v \dot{q}_d + g(q_d) \quad (2.17)$$

Da mesma forma que em (Sadegh & Horowitz 1990, Santibañez & Kelly 2001b), a matriz regressora desejada  $Y_d = Y(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \in \mathbb{R}^{n \times l}$  é uma função dos sinais de trajetória desejados, sendo, portanto, limitada.

Considere o seguinte filtro de avanço de fase para estimar o sinal  $\dot{e}$ :

$$\hat{v}_e = \text{diag} \left\{ \frac{s}{\mu s + 1} e_i \right\}, \quad i = 1, \dots, n$$

com realização no espaço de estado dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= -\frac{1}{\mu} \vartheta - \frac{1}{\mu^2} q - \frac{1}{\mu} \dot{q}_d, \\ \hat{v}_e &= \vartheta + \frac{1}{\mu} q, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde o parâmetro  $\mu$  deve ser escolhido suficientemente pequeno para assegurar convergência assintótica do erro de rastreamento para zero.

Deste modo, o controlador PD causal com compensação *feedforward* é dado por:

$$\tau = -K_p e - K_d \hat{v}_e + Y_d \theta \quad (2.19)$$

Definindo o erro de estimação do filtro de avanço de fase  $\epsilon_e \in \mathbb{R}^n$  por:

$$\epsilon_e(t) = \hat{v}_e(t) - \dot{e}(t), \quad (2.20)$$

a lei de controle (2.19) pode ser reescrita como:

$$\tau = -K_p e - K_d \dot{e} - K_d \epsilon_e + Y_d \theta \quad (2.21)$$

Substituindo a lei de controle (2.21) em (2.1), tem-se:

$$\ddot{e} = M^{-1}(q) [-C(q, \dot{q})\dot{e} - \zeta F_v \dot{e} - K_p e - K_d \dot{e} - K_d \epsilon_e - h_e] \quad (2.22)$$

onde

$$h_e = [M(q) - M(q_d)] \ddot{q}_d + [C(q, \dot{q}) - C(q_d, \dot{q}_d)] \dot{q}_d + g(q) - g(q_d), \quad (2.23)$$

é a chamada dinâmica residual do robô (*residual robot dynamics*) (Arimoto 1995a, Arimoto 1995b).

A seguinte Proposição caracteriza um majorante para a dinâmica residual do robô que será útil nas análises subseqüentes.

**Proposição 2.2** *A dinâmica residual do robô, definida em (2.23), pode ser majorada por:*

$$|h_e| \leq c_1 |\dot{q}_d|_M |\dot{e}| + c_h \Delta_h \text{sat} \left( \frac{|\dot{e}|}{\Delta_h} \right) \quad (2.24)$$

sendo que:

$$c_h = k_g + k_M |\ddot{q}_d|_M + c_2 |\dot{q}_d|_M^2; \quad (2.25)$$

$$\Delta_h = \frac{2 (c_g + \lambda_M(M) |\ddot{q}_d|_M + c_1 |\dot{q}_d|_M^2)}{c_h} \quad (2.26)$$

*Prova:* Ver (Santibañez & Kelly 2001b) ■

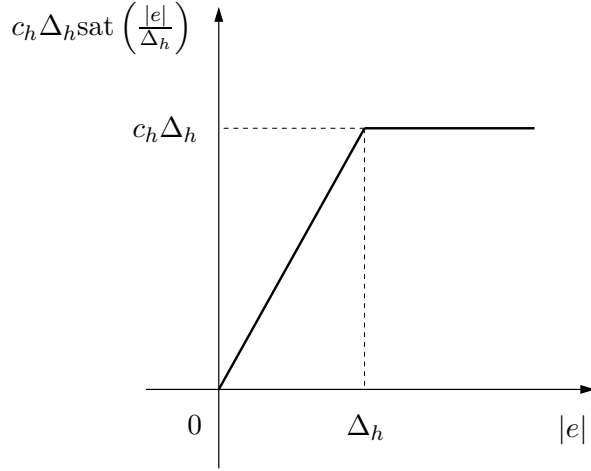


FIGURA 2.1: Função de saturação

A partir da Proposição 2.2, pode ser verificado que a função  $h_e$  pode ser majorada por um termo linear na norma da derivada do erro e por um termo saturado da norma do erro. Para ilustrar, o gráfico da função  $c_h \Delta_h \text{sat} \left( \frac{|e|}{\Delta_h} \right)$  é apresentado na Figura 2.1.

De (2.18) e (2.20), a dinâmica do erro de estimação do filtro de avanço pode ser descrita por:

$$\dot{\epsilon}_e = -\frac{1}{\mu} \epsilon_e - \ddot{e} \quad (2.27)$$

Definindo o estado do erro por:

$$X_e = [z_e^T \ \epsilon_e^T]^T, \quad z_e = [e^T \ \dot{e}^T]^T, \quad (2.28)$$

a dinâmica do sistema do erro em malha fechada pode ser descrita por (2.22) e (2.27).

### 2.4.1 Análise de Estabilidade

A análise de estabilidade será feita através dos seguintes passos. Primeiramente, utilizando o Lema 2.1 e o Teorema 2.1, será provado que o sistema do erro é GApS. Em seguida, será mostrado que o subsistema- $z_e$  definido em (2.22) é ISS com respeito à entrada  $\epsilon_e$  e que o subsistema- $\epsilon_e$  definido em (2.27) é ISS com respeito à  $z_e$ . Finalmente, explorando o fato de que o estado do erro é globalmente limitado, pode-se demonstrar que o sistema do erro é GAS, através do Teorema de Pequenos

Ganhos Generalizado (*Generalized Small-Gain Theorem*) (Jiang et al. 1994, Jiang & Mareels 1997).

Para ilustrar a análise, um diagrama de blocos mostrando a interconexão entre os subsistemas que compõe o sistema completo do erro é apresentado na Figura 2.2

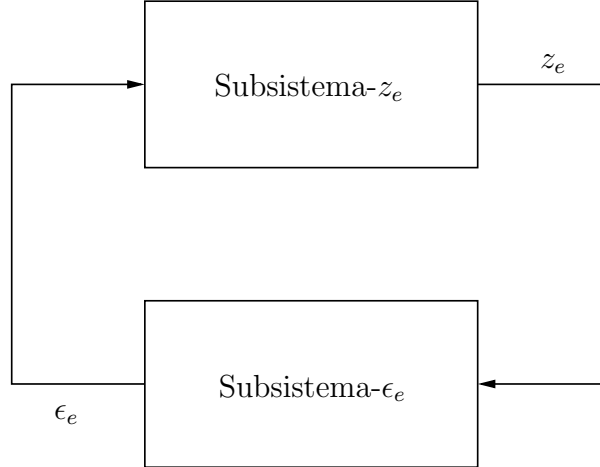


FIGURA 2.2: Interconexão entre os subsistemas que constituem o sistema completo do erro

A estabilidade prática do sistema do erro é caracterizada no seguinte Lema.

**Lema 2.2** *Considere o sistema (2.1). Se a lei de controle for definida por (2.18) e (2.19), então o sistema do erro em malha fechada descrito por (2.22) e (2.27), com estado  $X_e$  definido em (2.28), é uniformemente globalmente assintoticamente praticamente estável (GApS). Além disso, o estado do erro é conduzido num tempo finito  $T_R$  para o seguinte conjunto compacto:*

$$D_R := \{X_e \in \mathbb{R}^{3n}; |X_e| \leq R\},$$

sendo que  $R$  é uma constante independente de  $\mu$ .

*Prova:* Ver Apêndice C.3 ■

Para mostrar que o subsistema- $z_e$  definido em (2.22) é ISS com respeito à entrada  $\epsilon_e$ , será considerada a seguinte função de Lyapunov-ISS candidata, que se assemelha a função utilizada no caso da regulação:

$$V_2(z_e) = \frac{1}{2} \dot{e}^T M(q) \dot{e} + \frac{1}{2} e^T K_p e + \varepsilon_2 \phi^T(e) M(q) \dot{e}, \quad (2.29)$$



na qual  $\varepsilon_2$  é uma constante positiva suficientemente pequena e a função  $\phi(e) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é definida por:

$$\phi(e) = c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2} \frac{\varsigma e}{\sqrt{1 + \varsigma^2 e^T e}} \quad (2.30)$$

onde  $0 < \varsigma \leq 1$  é uma constante positiva que é escolhida de forma conveniente. As seguintes desigualdades serão utilizadas nos desenvolvimentos subseqüentes:

$$|\phi(e)| \geq c_h \Delta_h \text{sat} \left( \frac{|e|}{\Delta_h} \right), \quad \forall e \in \mathbb{R}^n \quad (2.31)$$

$$|\phi(e)| \leq c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2}, \quad \forall e \in \mathbb{R}^n \quad (2.32)$$

$$|\phi(e)|^2 \leq c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \phi^T(e) e, \quad \forall e \in \mathbb{R}^n \quad (2.33)$$

O seguinte majorante para a derivada temporal de  $\phi(e)$  pode ser estabelecido:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(e) &= c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2} \left( \frac{\varsigma \dot{e}}{\sqrt{1 + \varsigma^2 e^T e}} - \frac{\varsigma^3 (\dot{e}^T e) e}{(1 + \varsigma^2 e^T e)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ |\dot{\phi}(e)| &\leq c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \varsigma^2 e^T e}} + \frac{\varsigma^2 |e|^2}{(1 + \varsigma^2 |e|^2)^{\frac{3}{2}}} \right) |\dot{e}| \end{aligned}$$

Como  $1/\sqrt{1 + \varsigma^2 |e|^2} \leq 1$  e  $\varsigma^2 |e|^2 / (1 + \varsigma^2 |e|^2)^{3/2} \leq 1$  para todo  $e \in \mathbb{R}^n$ , segue que:

$$|\dot{\phi}(e)| \leq 2c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} |\dot{e}|, \quad \forall e \in \mathbb{R}^n \quad (2.34)$$

A Proposição 2.3 mostra que para  $\varepsilon_2$  suficientemente pequeno,  $V_2(z_e)$  é uma função de armazenamento suave.

**Proposição 2.3** *A função  $V_2(z_e)$  definida em (2.29) é uma função de armazenamento suave, se  $\varepsilon_2$  for tal que:*

$$\varepsilon_2 \leq \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\lambda_m(M) \lambda_m(K_p)}}{\lambda_M(M) c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}}, \quad (2.35)$$

podendo ser majorada inferiormente e superiormente pelas seguintes desigualdades:

$$\underline{\alpha}_2(|z_e|) = \kappa_5 |z_e|^2 \leq V_2(z_e) \leq \kappa_6 |z_e|^2 = \bar{\alpha}_2(|z_e|) \quad (2.36)$$

$$\kappa_5 \leq \frac{1}{4} \min\{\lambda_m(M), \lambda_m(K_p)\}; \quad (2.37)$$

$$\kappa_6 \geq \frac{1}{2} \lambda_M(P_2), \quad P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_M(K_p) & \chi_1 \\ \chi_1 & \lambda_M(M) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\chi_1 = \varepsilon_2 \lambda_M(M) c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}$$

*Prova:* Segue os mesmos passos da prova apresentada na seção C.1 do Apêndice C. ■

O seguinte Lema prova que o subsistema- $z_e$  é ISS com respeito à entrada  $\epsilon_e$ , se os ganhos de controle  $K_p$  e  $K_d$  forem escolhidos apropriadamente.

**Lema 2.3** *Considere a função  $V_2(z_e)$  definida em (2.29). Se os ganhos  $K_p$  e  $K_d$  forem escolhidos tais que:*

$$\lambda_m(K_d) \geq \chi_2, \quad (2.39)$$

$$\lambda_m(K_p) \geq 2c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \left[ 1 + \frac{\chi_3^2}{4\varepsilon_2 \left( \frac{3}{4} \lambda_m(K_d) - \chi_2 \right)} \right], \quad (2.40)$$

sendo que  $\varepsilon_2$  satisfaz a desigualdade (2.35) e com  $\chi_2$  e  $\chi_3$  definidos por:

$$\chi_2 := c_1 |\dot{q}_d|_M + 2\varepsilon_2 \lambda_M(M) c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} + \varepsilon_2 c_1 c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2} \quad (2.41)$$

$$\chi_3 := 1 + \varepsilon_2 (\zeta \lambda_M(F_v) + \lambda_M(K_d) + 2c_1 |\dot{q}_d|_M); \quad (2.42)$$

então,  $V_2(z_e)$  é uma função de Lyapunov-ISS, cuja derivada temporal ao longo da solução de (2.21) pode ser majorada por:

$$\dot{V}_2(z_e) \leq -\alpha_2(|z_e|) + \sigma_2(|\epsilon_e|), \quad (2.43)$$

sendo que  $\alpha_2(r) = \kappa_7 r^2 / \sqrt{1 + r^2} \in \mathcal{K}_\infty$  e  $\sigma_2(r) = \kappa_8 r^2 \in \mathcal{K}_\infty$  com

$$\kappa_7 = \min \left\{ \lambda_m(Q), \frac{1}{2} \varepsilon_2 \lambda_m(K_p) c_h \sqrt{1 + \Delta_h^2} \right\},$$

$$\kappa_8 = \frac{\lambda_M^2(K_d) \left( \lambda_m(K_p) + 2\varepsilon_2 c_h \sqrt{1 + \Delta_h^2} \lambda_m(K_d) \right)}{2\lambda_m(K_d) \lambda_m(K_p)},$$

onde  $Q$  é uma matriz simétrica dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \lambda_m(K_d) - \chi_2 & -\frac{\chi_3}{2} \\ -\frac{\chi_3}{2} & \varepsilon_2 \left( \frac{\lambda_m(K_p)}{2c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}} - 1 \right) \end{bmatrix}$$

Portanto, o subsistema- $z_e$  definido em (2.22) é ISS com respeito à entrada  $\epsilon_e$ , e o estado  $z_e$  pode ser majorado do seguinte modo:

$$|z_e(t)| \leq \beta_z(|z_e(t_0)|, t - t_0) + \gamma_z(\|\epsilon_e\|) \quad (2.44)$$

sendo que  $\beta_z \in \mathcal{KL}$  e  $\gamma_z(r) = \underline{\alpha}_2^{-1} \circ \bar{\alpha}_2 \circ \alpha_2^{-1} \circ \sigma_2(r) \in \mathcal{K}_\infty$ .

Além disso, dentro de  $D_R$  (ver Lema 2.2), o ganho ISS  $\gamma_z$  é linear e dado por  $\gamma_z(r) = \kappa_z r$ , onde a constante  $\kappa_z$  é independente de  $\mu$  e dada por:

$$\kappa_z = \sqrt{\frac{\kappa_6 \kappa_8}{\kappa_5 \bar{\kappa}_7}}, \quad \text{com } \bar{\kappa}_7 = \frac{\kappa_7}{\sqrt{1+R^2}} \quad (2.45)$$

*Prova:* Ver Apêndice C.4 ■

Agora, considerando a função de Lyapunov-ISS candidata:

$$V_3(\epsilon_e) = \frac{1}{2} \epsilon_e^T \epsilon_e, \quad (2.46)$$

o seguinte Lema prova que para  $\mu$  suficientemente pequeno, o subsistema- $\epsilon_e$  é ISS com respeito à entrada  $z_e$ .

**Lema 2.4** *Considere a função  $V_3(\epsilon_e)$  definida em (2.46). Se o parâmetro  $\mu$  do filtro de avanço for escolhido tal que:*

$$\mu \leq \frac{\lambda_m(M)}{4\lambda_M(K_d)}, \quad (2.47)$$

então,  $V_3(\epsilon_e)$  é uma função de Lyapunov-ISS, cuja derivada temporal ao longo da solução de (2.22) e (2.27) pode ser majorada por:

$$\dot{V}_3(\epsilon_e) \leq -\alpha_3(|\epsilon_e|) + \sigma_3(\mu |z_e|), \quad (2.48)$$

sendo que  $\alpha_3(r) = r^2/4\mu \in \mathcal{K}_\infty$  e  $\sigma_3(\mu r) = \mu r^2(\kappa_9 + \kappa_{10} r^2) \in \mathcal{K}_\infty$ , com

$$\kappa_9 = \frac{2}{\lambda_m^2(M)} \max \{ (\lambda_M(K_p) + c_h)^2, (2c_1 |\dot{q}_d|_M + \zeta \lambda_M(F_v) + \lambda_M(K_d))^2 \},$$

$$\kappa_{10} = \frac{c_1^2}{\lambda_m^2(M)}$$

Portanto, o subsistema- $\epsilon_e$  é ISS com respeito à entrada  $z_e$ , e o estado  $\epsilon_e$  pode ser majorado do seguinte modo:

$$|\epsilon_e(t)| \leq \beta_\epsilon(|\epsilon_e(t_0)|, t - t_0) + \gamma_\epsilon(\mu \|z_e\|) \quad (2.49)$$

Além disso, dentro de  $D_R$ , o ganho ISS  $\gamma_\epsilon$  é linear e dado por  $\gamma_\epsilon(\mu r) = \mu \kappa_\epsilon r$ , onde a constante  $\kappa_\epsilon$  é independente de  $\mu$ , sendo dada por:

$$\kappa_\epsilon = 2\sqrt{\kappa_{11}}, \quad \text{com } \kappa_{11} = \kappa_9 + \kappa_{10}R^2 \quad (2.50)$$

*Prova:* Ver Apêndice C.5 ■

A partir dos Lemas 2.3 e 2.4, é possível verificar que dentro de  $D_R$  o ganho composto  $\gamma_\epsilon \circ \gamma_z(r) = \mu \kappa_z \kappa_\epsilon r$ . Logo, se  $\mu$  for escolhido tal que:

$$\mu \leq \frac{1}{\kappa_z \kappa_\epsilon} \quad (2.51)$$

então, aplicando o Teorema de Pequenos Ganhos Generalizado (Jiang et al. 1994, Jiang & Mareels 1997), pode-se concluir que o sistema do completo do erro é GAS.

Os resultados obtidos acima são formalmente enunciados no Teorema 2.2.

**Teorema 2.2** *Considere um robô rígido com  $n$ -graus de liberdade e juntas de revolução descrito por (2.1). Assuma que a Hipótese 2.1 seja satisfeita. Seja a lei de controle definida por (2.18) e (2.19). Se os ganhos de controle  $K_d$  e  $K_p$  forem selecionados de modo que as desigualdades (2.39) e (2.40) sejam válidas e se o parâmetro  $\mu$  do filtro de avanço de fase for escolhido tal que as condições (2.47) e (2.51) sejam satisfeitas, então o sistema do erro em malha fechada, descrito por (2.22) e (2.27), com estado  $X_e = [e^T \ \dot{e}^T \ \epsilon_e^T]^T$ , é uniformemente globalmente assintoticamente estável (GAS).* ■

**Observação 2.1** *Podemos usar um controle de alto ganho caso os parâmetros do robô fossem conhecidos apenas “nominalmente”. Neste caso, pela análise apresentada, poderíamos concluir que o sistema do erro em malha fechada continuaria sendo praticamente estável. Além disso, poderíamos obter erros arbitrariamente pequenos, fazendo os ganhos de controle  $K_p$  e  $K_d$  suficientemente grandes e escolhendo o parâmetro  $\mu$  suficientemente pequeno.*

**Observação 2.2** *O Teorema 2.2 fornece um resultado de existência em termos da constante de tempo  $\mu$  do filtro de avanço de fase. Em geral, devido ao conservadorismo da análise, o limitante superior (2.51) tende a ser muito pequeno, não podendo ser utilizado para sintonizar o parâmetro  $\mu$  em situações práticas. Entretanto, conforme ficará evidenciado nos resultados de simulação, o valor deste parâmetro pode ser escolhido como sendo muito maior do que aquele que seria permitido pela análise.*

## 2.5 Resultados de Simulação

Nesta seção, serão apresentadas simulações numéricas para verificar os desenvolvimentos teóricos. Considera-se o manipulador real, denominado de *Barrett Whole Arm Manipulator* (WAM). Por simplicidade, 5 elos do WAM são travados numa configuração específica, resultando num manipulador planar com dois graus de liberdade, conforme pode ser visto na figura 2.3.

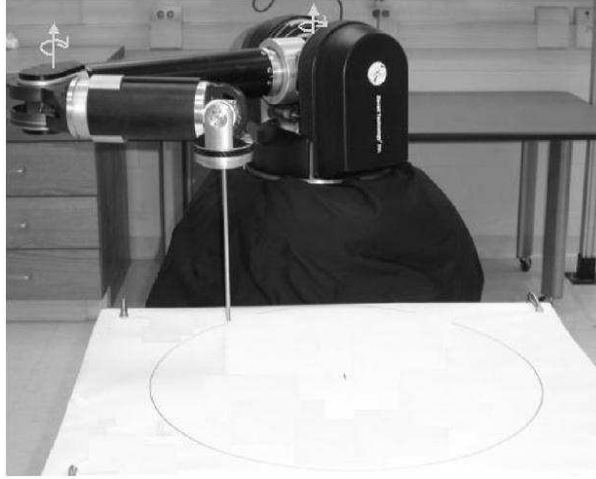


FIGURA 2.3: Configuração planar com dois graus de liberdade do WAM.

Nesta configuração, o modelo dinâmico do manipulador é dado por (McIntyre, Dixon, Dawson & Walker 2005):

$$M(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 + 2\theta_2 \cos(q_2) & \theta_3 + \theta_2 \cos(q_2) \\ \theta_3 + \theta_2 \cos(q_2) & \theta_3 \end{bmatrix}, \quad F_v = \begin{bmatrix} \theta_4 & 0 \\ 0 & \theta_5 \end{bmatrix}, \quad \zeta = 1 \quad (2.52)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -\theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 - \theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ \theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

O vetor de gravidade não é considerado em (2.52), devido ao plano de movimento do manipulador. Além do atrito viscoso, considerado na análise, este robô também apresenta um atrito de Coulomb que é modelado da seguinte maneira:

$$f_c(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \theta_6 \text{sgn}(\dot{q}_1) \\ \theta_7 \text{sgn}(\dot{q}_2) \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

Desta forma, o modelo dinâmico deste manipulador pode ser escrito como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \zeta F_v \dot{q} + f_c(\dot{q}) = \tau, \quad (2.54)$$

O vetor de parâmetros  $\theta$  é dado por:

$$\theta := \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.35 \text{ (Kg}\cdot\text{m}^2) \\ 0.0529 \text{ (Kg}\cdot\text{m}^2) \\ 0.2502 \text{ (Kg}\cdot\text{m}^2) \\ 0.8838 \text{ (N}\cdot\text{m}\cdot\text{s)} \\ 0.66285 \text{ (N}\cdot\text{m}\cdot\text{s)} \\ 1.50246 \text{ (N}\cdot\text{m)} \\ 0.7074 \text{ (N}\cdot\text{m)} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

A mesma trajetória desejada considerada em (McIntyre et al. 2005) é escolhida.

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} 0.8 \sin(t) \\ 0.8 \sin(t) \end{bmatrix} \text{ (rad)} \quad (2.56)$$

Para validar a análise, o controlador é projetado, considerando o modelo dinâmico (2.52) como sendo conhecido e desprezando a presença do atrito de Coulomb, que é visto como uma incerteza.

Usando (2.55) é possível calcular os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} c_M = 0.4232, \quad \lambda_m(M) = 0.1783, \quad \lambda_M(M) = 1.5277, \quad c_1 = 0.2116, \\ c_2 = 0.4232, \quad \lambda_m(F_v) = 0.66285, \quad \lambda_M(F_v) = 0.8838 \end{aligned} \quad (2.57)$$

De (2.56),  $q_d(t)$ ,  $\dot{q}_d(t)$  e  $\ddot{q}_d(t)$  podem ser majorados por:

$$|q_d|_M = |\dot{q}_d|_M = |\ddot{q}_d|_M = 0.8 \quad (2.58)$$

De (2.25) e (2.26), e usando os valores encontrados em (2.57) e (2.58), tem-se:

$$c_h = 0.6094, \quad \Delta_h = 4.4554$$

Selecionando  $\varepsilon_2 = \varsigma = 0.1$ , o seguinte limitante inferior para  $\lambda_m(K_d)$ , pode ser obtido a partir de (2.39) e (2.41):

$$\lambda_m(K_d) \geq 0.5143$$

O seguinte ganho de controle  $K_d$  é escolhido:

$$K_d = \text{diag} \{15, 15\}$$

Para esta escolha de  $K_d$  e usando (2.40)–(2.42), o seguinte limitante inferior para  $\lambda_m(K_p)$  pode ser calculado:

$$\lambda_m(K_p) \geq 2.6222$$

O ganho  $K_p$  é selecionado como:

$$K_p = \text{diag} \{40, 40\}$$

Para satisfazer a desigualdade (2.47), o parâmetro  $\mu$  tem que ser tal que:

$$\mu \leq 0.003$$

Este limitante garante que o subsistema- $\epsilon_e$  seja ISS com respeito à entrada  $z_e$ . Por outro lado, para atender à condição (2.51), o parâmetro  $\mu$  deve ser escolhido tal que:

$$\mu \leq 7.1 \times 10^{-11} \quad (2.59)$$

Como havia sido mencionado anteriormente, este limitante é muito conservativo. Seu papel é garantir que  $X_e$  convirja para zero, para quaisquer valores de  $X_e \in D_R$ , ou seja, seu valor tem que ser tão menor quanto maior for a magnitude de  $X_e$ . Desta forma, a desigualdade (2.59) prevê o pior caso, quando  $|X_e| = R$ . Além disso, devido ao conservadorismo da análise, o majorante  $R$  para o estado  $X_e$  é em geral bastante conservativo, o que leva a crer que, na realidade um valor muito maior poderia ser utilizado para sintonizar o parâmetro  $\mu$ , mesmo para condições iniciais excessivamente grandes. Além disso, como esta situação dificilmente se verifica na prática, este limitante será desconsiderado. Deste modo,  $\mu$  é escolhido como:

$$\mu = 0.002$$

Os valores dos parâmetros  $K_p$  e  $K_d$  foram ajustados, através de simulações numéricas, de modo a respeitar às condições impostas pela análise e ao mesmo tempo tentar reduzir o erro de rastreamento, quando o sistema é perturbado pela presença do atrito de Coulomb, sem, no entanto, diminuir muito o limitante (2.51) para o parâmetro  $\mu$ .

**Considerações Práticas:** para evitar o problema de *peaking*, que consiste em grandes amplitudes de pico nas variáveis de estimação  $\hat{v}_e$ , durante o transitório inicial, as condições iniciais do filtro de avanço de fase são inicializadas, utilizando o

conhecimento da condição inicial do erro de rastreamento  $e(0)$ . Desta forma, evita-se que o problema de *peaking* seja transmitido para o sinal de controle, melhorando a resposta transitória do sistema em malha fechada.

Para corroborar a inferência de que o parâmetro  $\mu$  não precisa ser tão pequeno, mesmo para condições iniciais excessivamente grandes, foram feitas simulações, desprezando o atrito de Coulomb e considerando que as condições iniciais fossem dadas por  $q(0) = \dot{q}(0) = K_R$ , com  $K_R$  sendo uma constante positiva que seria arbitrariamente aumentada até que o estado do erro deixasse de convergir. A condição inicial do filtro foi ajustada como  $\vartheta(0) = -\frac{1}{\mu}e(0)$ , para evitar o problema de *peaking*. Como as simulações envolveriam valores numéricos grandes, decidiu-se utilizar o método de Integração de Euler, reduzindo o passo de integração, conforme necessário. Infelizmente, devido a limitações computacionais, não foi possível determinar se o estado  $X_e$  deixaria de convergir para um valor de  $K_R$  suficientemente grande. O último teste foi realizado com  $K_R = 10^6$  e passo de integração  $h = 10^{-6}$ . Para valores maiores de  $K_R$ , um passo ainda menor teria que ser considerado, de forma que o tempo necessário para efetuar a simulação seria proibitivo.

Para ilustrar os resultados teóricos obtidos, uma nova simulação foi realizada desprezando-se o atrito de Coulomb, e considerando as seguintes condições iniciais:

$$q(0) = [1.5 \quad -0.75]^T \text{ (rad)}, \quad \dot{q}(0) = [1 \quad 1.5]^T \text{ (rad/s)}, \quad \vartheta(0) = -\frac{1}{\mu}e(0) \quad (2.60)$$

Neste caso, o controlador consegue rastreamento exato, como pode ser visto na Figura 2.4. Além disso, na Figura 2.5 mostra-se que o estado completo do erro  $X_e$  converge para zero, conforme esperado. O sinal de controle é apresentado na Figura 2.6.

Para testar a robustez do controlador, a simulação foi refeita com a presença do atrito de Coulomb e considerando as mesmas condições iniciais, apresentadas em (2.60). A figura 2.7 mostra que o desempenho do rastreamento é satisfatório. O erro de rastreamento obtido é inferior a 0.04 rad, conforme pode ser verificado na figura 2.8.



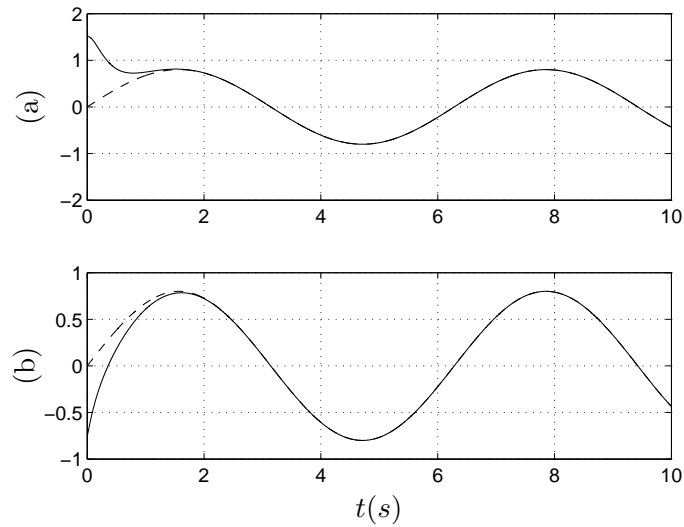


FIGURA 2.4: Manipulador WAM sem atrito de Coulomb controlado por um PD causal: Rastreamento: (a) (- -) posição desejada  $q_{d1}$  e (—) posição  $q_1$  (rad); (b) (- -) posição desejada  $q_{d2}$  e (—) posição  $q_2$  (rad)

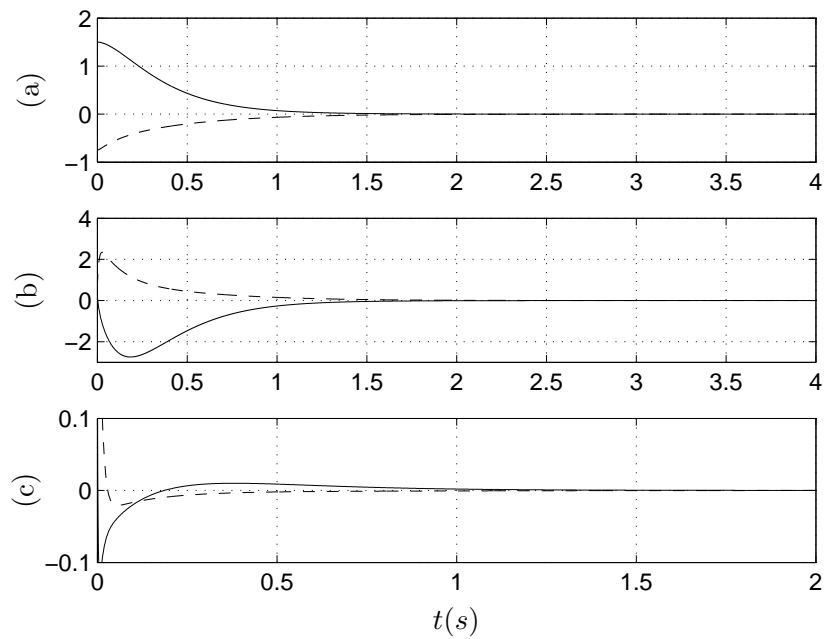


FIGURA 2.5: Manipulador WAM sem atrito de Coulomb controlado por um PD causal: (a) Trecho Ampliado do Sinal  $e(t)$  (rad): (—)  $e_1$  e (- -)  $e_2$ ; (b) Trecho Ampliado do Sinal  $\dot{e}(t)$  (rad/s): (—)  $\dot{e}_1$  e (- -)  $\dot{e}_2$ ; (c) Trecho Ampliado do Sinal  $\epsilon_e(t)$  (rad/s): (—)  $\epsilon_{e1}$  e (- -)  $\epsilon_{e2}$

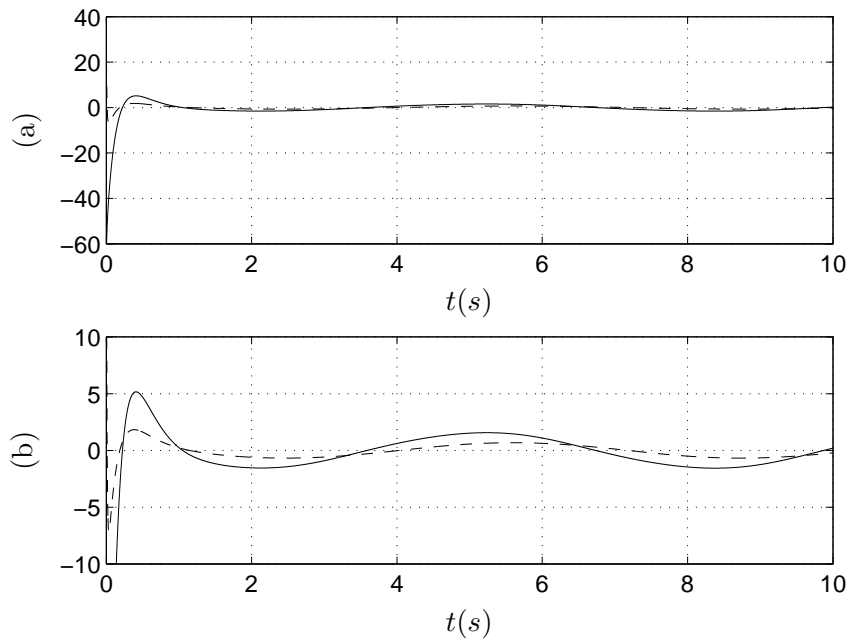


FIGURA 2.6: Manipulador WAM sem atrito de Coulomb controlado por um PD causal: (a) Sinal de Controle  $\tau(t)$  (N·m): (—)  $\tau_1$  e (- -)  $\tau_2$ ; (b) Trecho ampliado do sinal  $\tau(t)$ : (—)  $\tau_1$  e (- -)  $\tau_2$

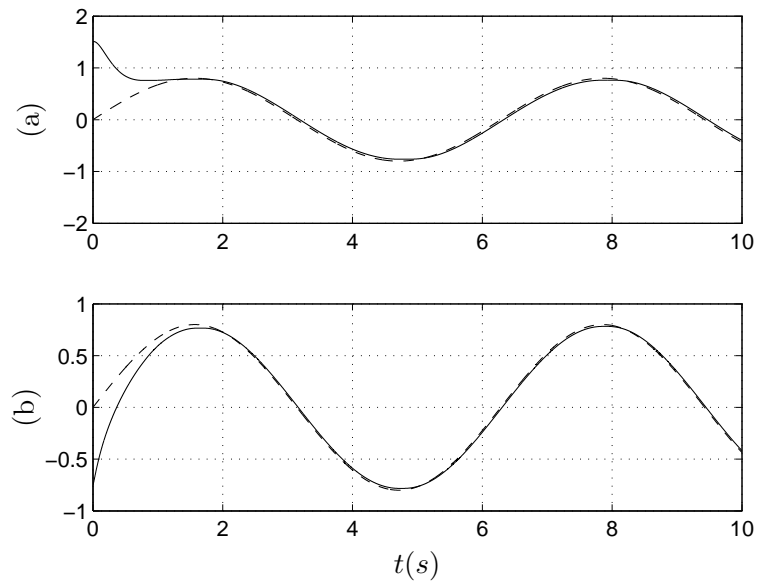


FIGURA 2.7: Manipulador WAM com atrito de Coulomb controlado por um PD causal: Rastreamento: (a) (- -) posição desejada  $q_{d1}$  e (—) posição  $q_1$  (rad); (b) (- -) posição desejada  $q_{d2}$  e (—) posição  $q_2$  (rad)

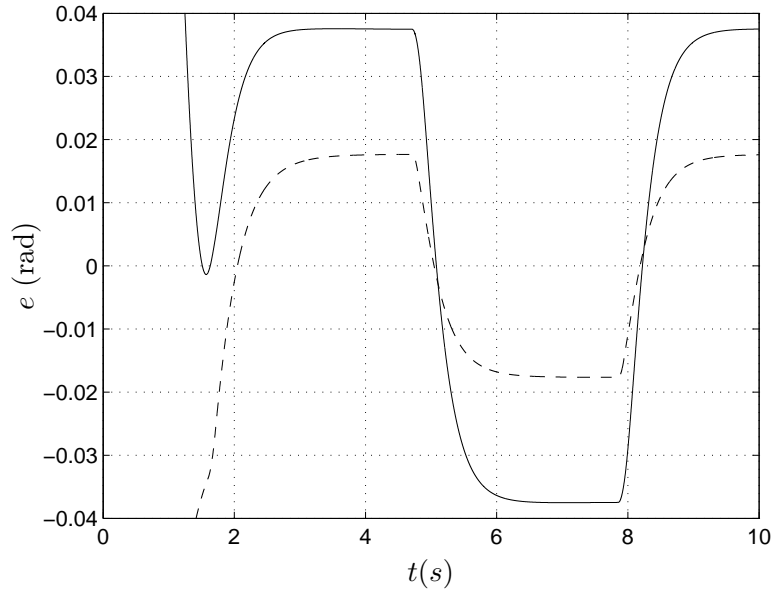


FIGURA 2.8: Manipulador WAM com atrito de Coulomb controlado por um PD causal: Trecho Ampliado do Sinal  $e(t)$  (rad): (—)  $e_1$ ; (- -)  $e_2$

## 2.6 Controlador PD causal não-linear

Na Seção 2.4, foi provado que um controlador PD causal com compensação *feedforward* é capaz de garantir rastreamento global para uma classe de manipuladores robóticos. Para isto, uma nova técnica de análise, chamada de “ISS Regulator-Approach” foi utilizada.

Seria interessante verificar se esta técnica poderia ser estendida para outras leis de controle e para tratar de outros problemas. Neste seção, a técnica de análise proposta é empregada para mostrar que o problema de rastreamento global de manipuladores robóticos, usando apenas realimentação de saída, também pode ser resolvido utilizando uma lei de controle não-linear. A lei considerada consiste do controlador PD causal com compensação *feedforward*, analisado anteriormente, em conjunto com um ganho proporcional não-linear. Além disso, será mostrado que para tal controlador é possível obter valores teóricos menos conservativos para o limitante da constante de tempo do filtro de avanço de fase.

Os desenvolvimentos teóricos necessários para demonstrar o resultado seguem as mesmas linhas gerais dos utilizados anteriormente. Desta forma, primeiro, será apresentado o caso da regulação e em seguida será tratado o problema do rastreamento.

## 2.6.1 Revedo o problema de regulação usando um regulador PD causal não-linear

O objetivo é provar que um robô, com modelo dinâmico dado por (2.1), controlado por um regulador PD causal não-linear é ISS com respeito a perturbações de entrada limitadas. Além disso, mostra-se que a adição de um termo de compensação da gravidade garante que o erro de regulação  $\tilde{q} := q - q_r$  tenda assintoticamente para zero, na ausência de perturbações.

A lei de controle do regulador PD causal com um ganho proporcional não-linear é dada por:

$$\tau = -K_p \tilde{q} - K_d \hat{\nu} - \Psi(\tilde{q}) \tilde{q} \quad (2.61)$$

sendo que  $\hat{\nu}$  é a saída do filtro de avanço de fase (2.4),  $K_p$  e  $K_d$  são matrizes simétricas e positivas definidas, e  $\Psi(\tilde{q}) = \text{diag}\{\psi_i |\tilde{q}_i|\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  com  $\psi_i$  sendo constantes positivas.

Definindo o estado do sistema em malha fechada (2.1), (2.4) e (2.61) como  $x := [\tilde{q}^T \ \dot{q}^T \ \hat{\nu}^T]^T$ , e considerando a presença de uma perturbação aditiva e uniformemente limitada  $d_i$  na entrada, a equação de estado pode ser descrita por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M(q)^{-1} [d - C(q, \dot{q}) \dot{q} - \zeta F_v \dot{q} - K_p \tilde{q} - \Psi(\tilde{q}) \tilde{q} - K_d \hat{\nu}] \\ -\frac{\hat{\nu}}{\mu} + \frac{\dot{q}}{\mu} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

onde  $d = d_i - g(q)$  também é uma perturbação uniformemente limitada.

Agora, considere a seguinte função de Lyapunov-ISS candidata:

$$V_4(x) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \frac{1}{3} \tilde{q}^T \Psi(\tilde{q}) \tilde{q} + \frac{1}{2} \mu \hat{\nu}^T K_d \hat{\nu} + \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T M(q) \dot{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} \quad (2.63)$$

Esta função é igual a função  $V_1(x)$  definida em (2.9) acrescida do termo  $\frac{1}{3} \tilde{q}^T \Psi(\tilde{q}) \tilde{q}$ , utilizado para lidar com o ganho proporcional não-linear.

**Proposição 2.4** *A função  $V_4(x)$  definida em (2.63) é uma função de armazenamento suave, se  $\varepsilon_1$  satisfaz a desigualdade (2.10), podendo ser majorada inferiormente e superiormente por:*

$$\underline{\alpha}_4(|x|) = \kappa_1 |x|^2 \leq V_4(x) \leq \kappa_2 |x|^2 + \psi_M |x|^3 = \bar{\alpha}_4(|x|),$$

em que  $\psi_M = \max\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ ,  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  são definidas em (2.11) e (2.12), respectivamente.

*Prova:* Ver Apêndice C.7 ■

O seguinte Lema mostra que  $V_4(x)$  é uma função de Lyapunov-ISS, se  $\varepsilon_1$  for suficientemente pequeno.

**Lema 2.5** *A função  $V_4(x)$  definida em (2.63) é uma função de Lyapunov-ISS para o sistema (2.62), se  $\varepsilon_1$  for escolhido de modo a satisfazer as desigualdades (2.10) e (2.13). Além disso, a derivada temporal de  $V_4(x)$ , ao longo da solução de (2.62), pode ser majorada por:*

$$\dot{V}_4(x) \leq -\alpha_4(|x|) + \sigma_4(|d|), \quad (2.64)$$

sendo que  $\sigma_4(r) = \kappa_3(r + r^2) \in \mathcal{K}_\infty$ , com  $\kappa_3$  definido em (2.15) e

$$\alpha_4(r) = \begin{cases} \tilde{\kappa}_4 \frac{r^3}{\sqrt{1+r^2}}, & r \geq \frac{\hat{\kappa}_4}{\tilde{\kappa}_4}, \\ \hat{\kappa}_4 \frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}, & r < \frac{\hat{\kappa}_4}{\tilde{\kappa}_4}, \end{cases}$$

$$\tilde{\kappa}_4 \leq \min \left\{ \frac{1}{4} \zeta \lambda_m(F_v), \frac{1}{2} \lambda_m(K_d), \varepsilon_1 \frac{\psi_m}{\sqrt{n}} \right\}, \quad \hat{\kappa}_4 \leq \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{1}{2} \zeta \lambda_m(F_v), \lambda_m(K_d), \varepsilon_1 \lambda_m(K_p) \right\}$$

em que  $\psi_m = \min\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ .

*Prova:* Ver Apêndice C.8 ■

Note que o termo negativo da função  $\dot{V}_4(x)$  é aproximadamente quadrático, quando o estado  $x$  se encontra afastado da origem, enquanto que o termo negativo da função  $\dot{V}_1(x)$  é aproximadamente linear. Esta diferença possibilita que um majorante  $R$  menos conservativo para o estado  $X_e$  possa ser obtido, utilizando o controlador PD causal não-linear, fato que contribui para reduzir o conservadorismo do limitante para a constante de tempo do filtro de avanço, necessário para assegurar a convergência do estado  $X_e$  para zero.

A partir do Lema 2.5, é imediato concluir que o sistema em malha fechada (2.1), (2.4) e (2.61) é ISS com respeito à perturbação de entrada  $d(t)$ . Os resultados de estabilidade obtidos nesta seção são formalmente enunciados no seguinte Teorema.

**Teorema 2.3** *Considere um robô rígido com  $n$  graus de liberdade e juntas de revolução descrito por (2.1). Se a lei de controle for definida como em (2.4) e (2.61), então o sistema em malha fechada (2.62) é ISS com respeito a uma perturbação de entrada limitada  $d(t)$ . Além disso, se  $d(t) \equiv 0$ , então o sistema em malha fechada (2.62) é uniformemente globalmente assintoticamente estável (GAS). ■*

## 2.6.2 Rastreamento global usando um controlador PD causal não-linear com compensação feedforward

Agora, o problema de rastreamento de trajetória para manipuladores robóticos descritos por (2.1) será abordado. As mesmas considerações acerca dos sinais de trajetória desejados são feitas. O objetivo é garantir que o erro de rastreamento  $e = q - q_d$  tenda assintoticamente para zero, para quaisquer condições iniciais. Novamente, assume-se que o modelo dinâmico do manipulador seja conhecido.

A lei de controle é projetada do seguinte modo:

$$\tau = -K_p e - K_d \hat{\nu}_e - \Psi(q)q + \Psi(q_d)q_d + Y_d \theta, \quad (2.65)$$

onde  $\hat{\nu}_e$  é uma estimativa do sinal  $\dot{e}$ , obtida através do filtro de avanço definido em (2.18);  $Y_d \theta$  é o termo de compensação *feedforward* definido em (2.17).

Considerando o erro de estimação  $\epsilon_e$  do filtro de avanço, a lei de controle (2.65) pode ser reescrita como:

$$\tau = -K_p e - K_d \dot{e} - \Psi(q)q + \Psi(q_d)q_d - K_d \epsilon_e + Y_d \theta \quad (2.66)$$

Substituindo a lei de controle (2.66) em (2.1), tem-se:

$$\ddot{e} = M^{-1}(q) [-C(q, \dot{q})\dot{e} - \zeta F_v \dot{e} - K_p e - K_d \dot{e} - K_d \epsilon_e - \Psi(q)q + \Psi(q_d)q_d - h_e] \quad (2.67)$$

onde  $h_e$  é definida em (2.23). Desta forma, o sistema do erro em malha fechada, com estado  $X_e$  definido em (2.28), pode ser descrito por (2.27) e (2.67).

A análise de estabilidade será feita seguindo os mesmos passos utilizados para o controlador PD causal. Desta forma, a estabilidade prática do sistema do erro é caracterizada no Lema 2.6.

**Lema 2.6** *Considere o sistema (2.1). Se a lei de controle for definida por (2.18) e (2.65), então o sistema do erro em malha fechada (2.27) e (2.67), com estado  $X_e = [e^T \dot{e}^T \epsilon_e^T]^T$ , é uniformemente globalmente assintoticamente praticamente estável (GApS). Além disso, o estado do erro é conduzido num tempo finito  $T_R$  para o seguinte conjunto compacto:*

$$D_R := \{X_e \in \mathbb{R}^{3n}; |X_e| \leq R\},$$

onde  $R$  é uma constante independente de  $\mu$ .

*Prova:* Ver Apêndice C.9 ■

Para mostrar que o subsistema- $z_e$  definido em (2.67), com estado  $z_e = [e^T \dot{e}^T]^T$ , é ISS com respeito à entrada  $\epsilon_e$ , será considerada a seguinte função de Lyapunov-ISS candidata:

$$V_5(z_e) = \frac{1}{2}\dot{e}^T M(q)\dot{e} + \frac{1}{2}e^T K_p e + \frac{1}{3}e^T (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d) + \delta\phi^T(e)M(q)\dot{e}, \quad (2.68)$$

onde  $\delta$  é uma constante positiva e a função  $\phi(e) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é definida em (2.30).

Além de possuir um termo para lidar com o ganho não-linear, a principal diferença desta função para a função  $V_2(z_e)$ , considerada anteriormente, é que  $\delta$  não é uma constante suficientemente pequena. Esta modificação é necessária para provar que de fato esta função candidata será uma função de Lyapunov-ISS para o sistema (2.67).

**Proposição 2.5** *A função  $V_5(z_e)$  definida em (2.68) é uma função de armazenamento suave, se o ganho  $K_p$  for tal que:*

$$\lambda_m(K_p) \geq \delta^2 \lambda_M(M) c_h^2 (1 + \varsigma^2 \Delta_h^2), \quad (2.69)$$

podendo ser limitada inferiormente e superiormente pelas seguintes desigualdades:

$$\underline{\alpha}_5(|z_e|) = \kappa_{5n} |z_e|^2 \leq V_5(z_e) \leq \kappa_{6n} |z_e|^2 + \psi_M |z_e|^3 = \bar{\alpha}_5(|z_e|),$$

sendo que  $\underline{\alpha}_5$  e  $\bar{\alpha}_5$  são funções de classe  $\mathcal{K}_\infty$ ;

$$\kappa_{5n} \leq \frac{1}{2} \min_{q, e \in \mathbb{R}^n} \lambda_m(P_5(q, e)), \quad P_5(q, e) = \begin{bmatrix} M(q) & \pi(e)M(q) \\ \pi(e)M(q) & K_p \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

$$\pi(e) = \delta c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2} \frac{\varsigma}{\sqrt{1 + \varsigma^2 e^T e}},$$

$$\kappa_{6n} \geq \frac{1}{2} \lambda_M(\bar{P}_5), \quad \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_M(K_p) + \frac{4}{3} \psi_M |q_d|_M & \chi_{1n} \\ \chi_{1n} & \lambda_M(M) \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

$$\chi_{1n} = \delta \lambda_M(M) c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}$$

*Prova: Ver Apêndice C.10* ■

O seguinte Lema mostra que o subsistema- $z_e$  é ISS com respeito à entrada  $\epsilon_e$ , se os ganhos de controle  $K_p$  e  $K_d$  forem escolhidos apropriadamente.

**Lema 2.7** *Considere a função  $V_5(z_e)$  definida em (2.68). Se  $K_d$  e  $\delta$  forem escolhidos tais que:*

$$\lambda_m(K_d) \geq \chi_{2n}, \quad (2.72)$$

$$\delta \geq \frac{2\sqrt{n}\sqrt{1+\varsigma^2} (|\dot{q}_d|_M \lambda_m(K_d) + \frac{4}{3} |q_d|_M^2)}{3\xi c_h \sqrt{1+\varsigma^2 \Delta_h^2} \lambda_m(K_d)}, \quad (2.73)$$

onde  $0 < \xi < 1$  é uma constante escolhida de forma conveniente,  $\chi_{2n}$  é definido por

$$\chi_{2n} := c_1 |\dot{q}_d|_M + 2\delta \lambda_M(M) c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} + \delta c_1 c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2}; \quad (2.74)$$

e se, adicionalmente,  $K_p$  for escolhido de modo a satisfizer a desigualdade (2.69) e for tal que:

$$\lambda_m(K_p) \geq \max \left\{ \begin{array}{l} 2c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \left( 1 + \frac{\chi_{3n}^2}{4\delta \left( \frac{3}{4} \lambda_m(K_d) - \chi_{2n} \right)} \right), \\ \frac{16\sqrt{1+\varsigma^2} (|\dot{q}_d|_M \lambda_m(K_d) + \frac{4}{3} |q_d|_M^2)}{3\delta c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \lambda_m(K_d)} \end{array} \right\}, \quad (2.75)$$

com  $\chi_{3n}$  definido por:

$$\chi_{3n} := 1 + \delta (\zeta \lambda_M(F_v) + \lambda_M(K_d) + 2c_1 |\dot{q}_d|_M), \quad (2.76)$$

então,  $V_5(z_e)$  é uma função de Lyapunov-ISS, cuja derivada temporal ao longo da solução de (2.67), pode ser majorada por:

$$\dot{V}_5(z_e) \leq -\alpha_5(|z_e|) + \sigma_5(|\epsilon_e|), \quad (2.77)$$

onde  $\alpha_5(r) = \kappa_{7n} r^2$ ,  $\sigma_5(r) = \kappa_{8n} r^2 \in \mathcal{K}_\infty$ . As constantes  $\kappa_{8n}$  e  $\kappa_{7n}$  são dadas por:

$$\kappa_{8n} = \frac{\lambda_M^2(K_d) \left( 2\lambda_m(K_p) + \delta c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \lambda_m(K_d) \right)}{\lambda_m(K_d) \lambda_m(K_p)}, \quad (2.78)$$



$$\kappa_{\tau_n} = \frac{\hat{\kappa}_7}{\sqrt{1 + \kappa_r^2}}, \quad \kappa_r = \frac{\hat{\kappa}_7}{\tilde{\kappa}_7}, \quad (2.79)$$

$$\tilde{\kappa}_7 \leq \min \left\{ \lambda_m(Q_n), \frac{\delta(1-\xi)c_h\sqrt{1+\zeta^2\Delta_h^2}}{2\sqrt{n}} \right\}, \quad \hat{\kappa}_7 \leq \min \left\{ \lambda_m(Q_n), \frac{\delta\lambda_m(K_p)c_h\sqrt{1+\zeta^2\Delta_h^2}}{8} \right\},$$

onde  $Q_n$  é uma matriz simétrica definida dada por:

$$Q_n = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}\lambda_m(K_d) - \chi_{2n} & -\frac{\chi_{3n}}{2} \\ -\frac{\chi_{3n}}{2} & \varepsilon_2 \left( \frac{\lambda_m(K_p)}{2c_h\sqrt{1+\zeta^2\Delta_h^2}} - 1 \right) \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Portanto, para ganhos  $K_p$  e  $K_d$  apropriados, o subsistema- $z_e$  definido em (2.67) é ISS com respeito à entrada  $\epsilon_e$ , e o estado  $z_e$  pode ser majorado do seguinte modo:

$$|z_e(t)| \leq \beta_{z_n}(|z_e(t_0)|, t - t_0) + \gamma_{z_n}(\|\epsilon_e\|), \quad (2.81)$$

onde  $\beta_{z_n} \in \mathcal{KL}$  e  $\gamma_{z_n}(r) = \underline{\alpha}_5^{-1} \circ \bar{\alpha}_5 \circ \alpha_5^{-1} \circ \sigma_5(r) \in \mathcal{K}_\infty$ .

Além disso, dentro de  $D_R$  o ganho ISS  $\gamma_{z_n} = \kappa_{z_n}r$ , onde a constante  $\kappa_{z_n}$  é independente de  $\mu$  e dada por:

$$\kappa_{z_n} = \sqrt{\frac{\bar{\kappa}_{6n}\kappa_{8n}}{\kappa_{5n}\kappa_{7n}}}, \quad \bar{\kappa}_{6n} = \kappa_6 + \psi_M R \quad (2.82)$$

*Prova:* ver Apêndice C.12 ■

Note que a constante  $\delta$  não faz parte da implementação do controle, sendo utilizada apenas para a análise. Sua influência prática fica circunscrita apenas ao ajuste dos parâmetros do controlador.

O termo negativo, presente na derivada da função de Lyapunov  $V_5(z_e)$  é quadrático, em contraste com o termo aproximadamente linear, encontrado na função  $\dot{V}_2(z_e)$ . O ganho ISS  $\gamma_{z_n}(r)$  não é linear devido, apenas, à presença do termo cúbico da função  $\bar{\alpha}_5(r)$ . Note que neste caso, o ganho  $\kappa_{z_n}$  é proporcional a  $\sqrt{R}$ , em contraste com o ganho  $\kappa_z$ , obtido anteriormente, que era proporcional a  $R$ . Por este motivo, e como a constante  $R$  tende a ser relativamente grande, o valor do limitante para o parâmetro  $\mu$  do filtro de avanço tende a ser menos conservativo.

Agora, considerando a função de Lyapunov-ISS candidata:

$$V_6(\epsilon_e) = \frac{1}{2}\epsilon_e^T \epsilon_e, \quad (2.83)$$

o seguinte Lema prova que para  $\mu$  suficientemente pequeno o subsistema- $\epsilon_e$  é ISS com respeito à entrada  $z_e$ .

**Lema 2.8** A função  $V_6(\epsilon_e)$  definida em (2.83) é uma função de Lyapunov-ISS para o sistema (2.27) se o parâmetro  $\mu$  for tal que:

$$\mu \leq \frac{\lambda_m(M)}{4\lambda_M(K_d)} \quad (2.84)$$

Além disso, a derivada temporal de  $V_6(\epsilon_e)$ , ao longo da solução de (2.22) e (2.27), pode ser majorada por:

$$\dot{V}_6(\epsilon_e) \leq -\alpha_6(|\epsilon_e|) + \sigma_6(\mu \|z_e\|), \quad (2.85)$$

sendo que  $\alpha_6(r) = \frac{1}{4\mu}r^2 \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $\sigma_3(\mu r) = \mu r^2(\kappa_{9_n} + \kappa_{10_n}r^2) \in \mathcal{K}_\infty$ , com

$$\kappa_{9_n} = \frac{2}{\lambda_m^2(M)} \max \{ (\lambda_M(K_p) + c_h + 2\psi_M |q_d|_M)^2, (2c_1 |\dot{q}_d|_M + \zeta \lambda_M(F_v) + \lambda_M(K_d))^2 \}, \quad (2.86)$$

$$\kappa_{10_n} = \frac{2}{\lambda_m^2(M)} \max \{ c_1^2, \psi_M^2 \} \quad (2.87)$$

Portanto, o subsistema- $\epsilon_e$  é ISS com respeito à entrada  $z_e$ , e o estado  $\epsilon_e$  pode ser majorado do seguinte modo:

$$|\epsilon_e(t)| \leq \beta_{\epsilon_n}(|\epsilon_e(t_0)|, t - t_0) + \gamma_{\epsilon_n}(\mu \|z_e\|), \quad (2.88)$$

onde  $\beta_{\epsilon_n} \in \mathcal{KL}$  e  $\gamma_{\epsilon_n}(\mu r) = \alpha_6^{-1} \circ \sigma_6(\mu r)$ .

Além disso, dentro de  $D_R$ , o ganho ISS  $\gamma_{\epsilon_n}$  é linear e dado por  $\gamma_{\epsilon_n}(\mu r) = \mu \kappa_{\epsilon_n} r$ , onde a constante  $\kappa_{\epsilon_n}$  é independente de  $\mu$ , sendo dada por:

$$\kappa_{\epsilon_n} = 2\sqrt{\kappa_{11_n}}, \quad \text{com } \kappa_{11_n} = \kappa_{9_n} + \kappa_{10_n} R^2 \quad (2.89)$$

*Prova:* Ver Apêndice C.13 ■

A partir dos Lemas 2.7 e 2.8, pode-se verificar que dentro de  $D_R$  o ganho composto  $\gamma_{\epsilon_n} \circ \gamma_{z_n}(r) = \mu \kappa_{z_n} \kappa_{\epsilon_n} r$ . Logo, se  $\mu$  for tal que:

$$\mu \leq \frac{1}{\kappa_{z_n} \kappa_{\epsilon_n}} \quad (2.90)$$

então, aplicando o Teorema de Pequenos Ganhos Generalizado (Jiang et al. 1994, Jiang & Mareels 1997), pode-se concluir que o sistema do erro descrito por (2.27) e (2.67) é GAS.

Os resultados obtidos acima são formalmente enunciados no Teorema 2.4.

**Teorema 2.4** *Considere um robô rígido com  $n$ -graus de liberdade e juntas de revolução descrito por (2.1). Seja a lei de controle definida por (2.18) e (2.65). Se os ganhos  $K_d$  e  $K_p$  forem selecionados de forma a satisfazer as desigualdades (2.69), (2.72) e (2.75), e se o parâmetro  $\mu$  for escolhido de modo a satisfazer (2.84) e (2.90), então, o sistema do erro em malha fechada (2.27) e (2.67) é uniformemente globalmente assintoticamente estável (GAS) ■*

### 2.6.3 Resultados de Simulação

Para validar os resultados teóricos obtidos, serão apresentadas simulações numéricas, considerando o mesmo manipulador apresentado na Figura 2.3, com modelo dinâmico descrito por (2.52), e a mesma trajetória desejada definida em (2.56).

Novamente, o controlador é projetado considerando o modelo dinâmico (2.52) como sendo conhecido e desprezando a presença do atrito de Coulomb, que é visto como uma incerteza. Selecionando  $\delta = 1.275$ ,  $\xi = 0.65$  e  $\varsigma = 0.3$ , o seguinte limitante inferior para  $\lambda_m(K_d)$  pode ser obtido a partir de (2.72) e (2.74):

$$\lambda_m(K_d) \geq 5.0493 \quad (2.91)$$

O ganho de controle  $K_d$  é escolhido como:

$$K_d = \text{diag} \{15, 15\}$$

Para esta escolha de  $K_d$  e usando (2.73), o seguinte limitante inferior é obtido:

$$\delta \geq 1.275 \quad (2.92)$$

Esta condição é satisfeita para a escolha de  $\delta$  considerada. O ganho  $K_p$  deve ser ajustado de acordo com (2.69) e (2.75), tendo que ser escolhido tal que:

$$\begin{aligned} \lambda_m(K_p) &\geq 2.572 \\ \lambda_m(k_p) &\geq \max\{25.270, 3.677\} \end{aligned}$$

Desta forma, o ganho  $K_p$  é escolhido como:

$$K_p = \text{diag} \{40, 40\}$$

Os ganhos  $K_d$  e  $K_p$  foram sintonizados com os mesmos valores escolhidos na seção 2.5, para possibilitar uma comparação dos resultados obtidos, bem como do valor do limitante para o parâmetro  $\mu$  utilizado na prova dos Pequenos Ganhos.

Os parâmetros  $\psi_1$  e  $\psi_2$  do ganho proporcional não-linear

$$\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d = \begin{bmatrix} \psi_1(|q_1|q_1 - |q_{d1}|q_{d1}) \\ \psi_2(|q_2|q_2 - |q_{d2}|q_{d2}) \end{bmatrix},$$

são escolhidos como:

$$\psi_1 = \psi_2 = 1 \quad (2.93)$$

Esta escolha foi feita com o intuito de aumentar o valor do limitante (2.90) para o parâmetro  $\mu$ . Como a desigualdade (2.84) é igual à desigualdade (2.47) e foram considerados os mesmos ganhos, este limitante para o parâmetro  $\mu$  será o mesmo sendo dado por:  $\mu \leq 0.003$ . Por outro lado, para atender à condição (2.90), o parâmetro  $\mu$  deve ser selecionado do seguinte modo:

$$\mu \leq 2.4 \times 10^{-8} \quad (2.94)$$

Conforme esperado, o resultado obtido é menos conservativo do que aquele encontrado anteriormente. O limitante (2.94) é aproximadamente 338 vezes maior do que o limitante (2.59). Entretanto, o limitante (2.94) continua sendo muito pequeno para poder ser aplicado na prática, sendo novamente desprezado. Desta forma, a constante de tempo do filtro de avanço de fase é escolhida como

$$\mu = 0.002$$

Para tentar obter limitantes ainda menos conservativos, deveria-se encontrar funções de Lyapunov que gerassem um ganho ISS composto linear, sem que para isso fosse necessário linearizar qualquer função durante o desenvolvimento do mesmo, uma vez que o limitante  $R$  para o estado tende a ser conservativo.

Para verificar os resultados teóricos obtidos, a simulação é realizada desprezando-se o atrito de Coulomb e considerando as seguintes condições iniciais:

$$q(0) = [1.5 \quad -0.75]^T \text{ (rad)}, \quad \dot{q}(0) = [1 \quad 1.5]^T \text{ (rad/s)}, \quad \vartheta(0) = -\frac{1}{\mu}e(0)$$

Note que as condições iniciais do filtro de avanço são novamente escolhidas de modo a reduzir o problema de *peaking*, melhorando, assim, o desempenho transitório do controlador. Esta sintonia pode ser feita, porque utiliza apenas sinais conhecidos.

Caso as condições iniciais do filtro não fossem ajustadas, o resultado teórico continuaria sendo válido, ou seja, o estado completo do erro continuaria convergindo para zero, e a única diferença seria uma degradação da resposta transitória do sistema.

Neste caso, o controlador PD causal com ganho proporcional não-linear também consegue rastreamento exato, como pode ser visto na Figura 2.9. Além disso, na Figura 2.10 mostra-se que o estado completo do erro  $X_e$  converge para zero, conforme esperado. O sinal de controle é apresentado na figura 2.11.

Comparando os resultados obtidos com os dois controladores, pode-se verificar que seus desempenhos são praticamente iguais. Este fato já era esperado, porque os mesmos valores para os parâmetros  $K_p$ ,  $K_d$  e  $\mu$  foram utilizados, enquanto os ganhos  $\psi_1$  e  $\psi_2$  foram sintonizados com um valor pequeno, quando comparados com os valores dos ganhos  $K_p$  e  $K_d$ . Se os parâmetros  $\psi_1$  e  $\psi_2$  fossem escolhidos com valores maiores, os erros de rastreamento iriam convergir para zero mais rapidamente, apresentando, porém, um “overshoot” mais acentuado.

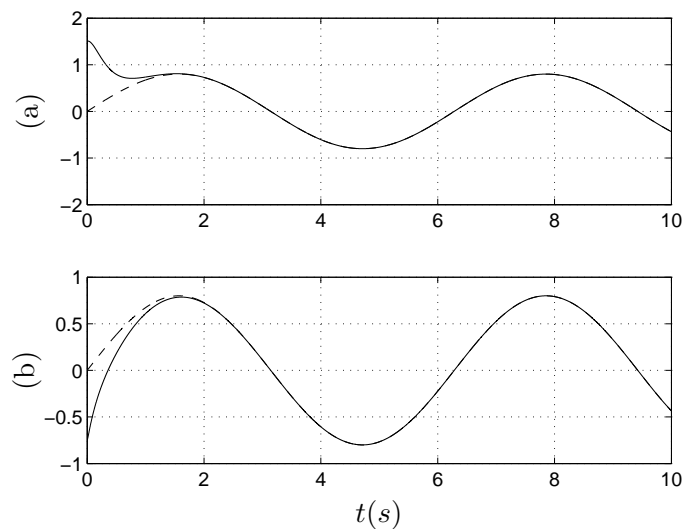


FIGURA 2.9: Manipulador WAM sem atrito de Coulomb controlado por um PD causal não-linear: Rastreamento: (a) (- -) posição desejada  $q_{d1}$  e (—) posição  $q_1$  (rad); (b) (- -) posição desejada  $q_{d2}$  e (—) posição  $q_2$  (rad)

Para testar a robustez do controlador, a simulação é refeita com a presença do atrito de Coulomb e considerando as mesmas condições iniciais. Na figura 2.12 mostra-se que o desempenho do rastreamento é satisfatório. O erro de rastreamento obtido é novamente inferior a 0.04 rad, conforme pode ser verificado na Figura 2.13.

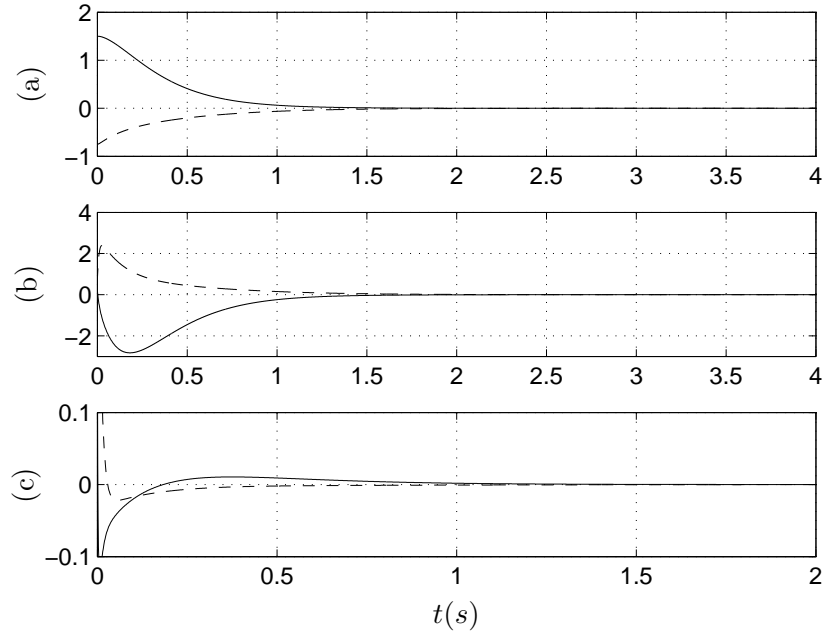


FIGURA 2.10: Manipulador WAM sem atrito de Coulomb controlado por um PD causal não linear: (a) Trecho Ampliado do Sinal  $e(t)$  (rad): (—)  $e_1$  e (- -)  $e_2$ ; (b) Trecho Ampliado do Sinal  $\dot{e}(t)$  (rad/s): (—)  $\dot{e}_1$  e (- -)  $\dot{e}_2$ ; (c) Trecho Ampliado do Sinal  $\epsilon_e(t)$  (rad/s): (—)  $\epsilon_{e1}$  e (- -)  $\epsilon_{e2}$

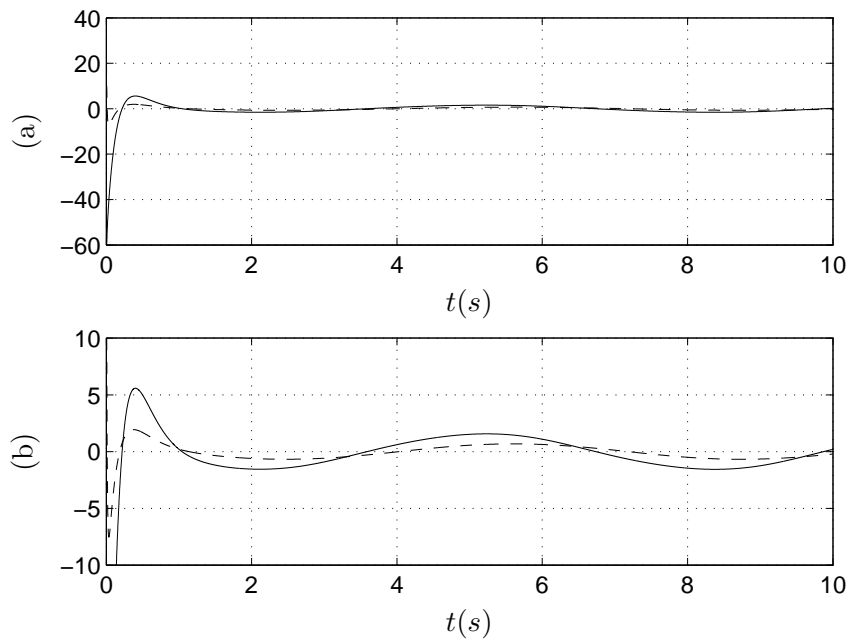


FIGURA 2.11: Manipulador WAM sem atrito de Coulomb controlado por um PD causal não-linear: (a) Sinal de Controle  $\tau(t)$  (N.m): (—)  $\tau_1$  e (- -)  $\tau_2$ ; (b) Trecho ampliado do sinal  $\tau(t)$ : (—)  $\tau_1$  e (- -)  $\tau_2$

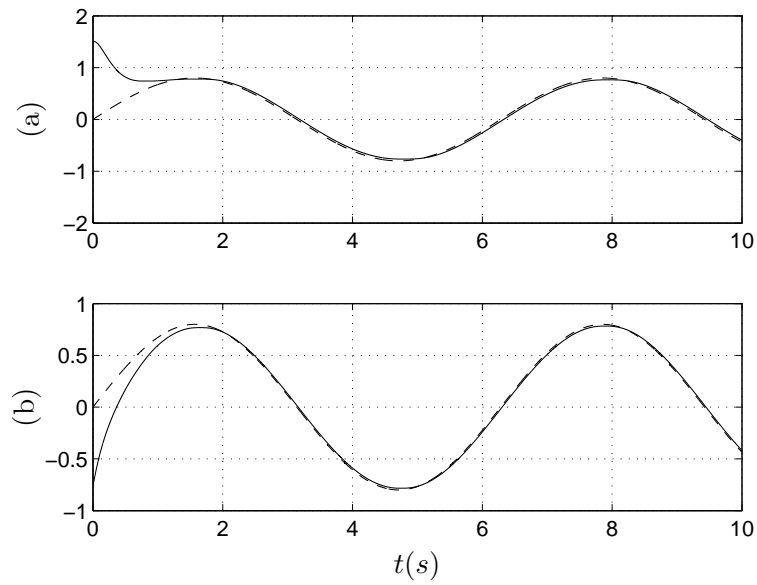


FIGURA 2.12: Manipulador WAM com atrito de Coulomb controlado por um PD causal não-linear: Rastreamento: (a) (- -) posição desejada  $q_{d1}$  e (—) posição  $q_1$  (rad); (b) (- -) posição desejada  $q_{d2}$  e (—) posição  $q_2$  (rad)

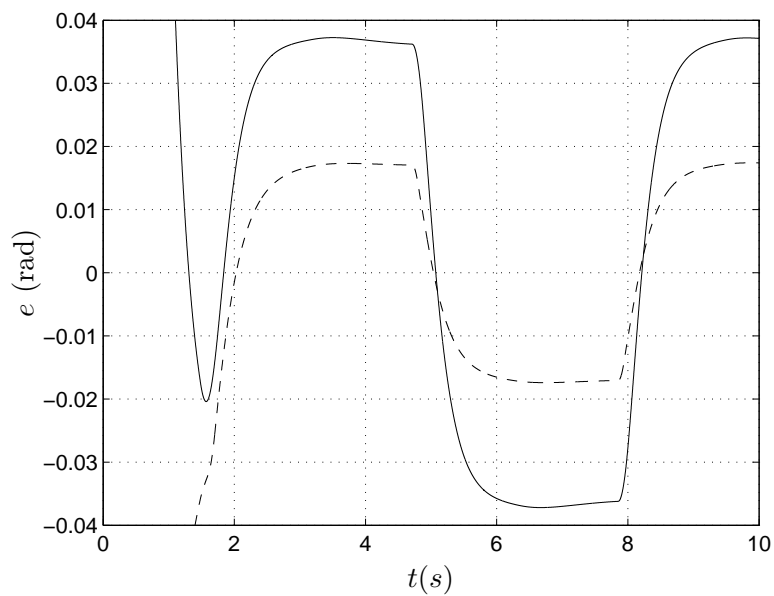


FIGURA 2.13: Manipulador WAM com atrito de Coulomb controlado por um PD causal não-linear: Trecho Ampliado do Sinal  $e(t)$  (rad): (—)  $e_1$ ; (- -)  $e_2$

## 2.7 Conclusões e Comentários

Neste capítulo, foi mostrado que um simples controlador PD causal com compensação *feedforward* soluciona o problema de rastreamento global para manipuladores robóticos, usando apenas realimentação de posição. Para esta finalidade, uma nova técnica de análise denominada de “ISS-regulator approach” foi utilizada. Inicialmente, foi provado que o robô controlado por um regulador PD causal é globalmente ISS. Um elemento chave para atingir este resultado foi utilizar o amortecimento natural do robô. Em seguida, foi mostrado que um controlador PD causal em conjunto com uma compensação *feedforward* é capaz de assegurar que o erro de rastreamento tenda assintoticamente para zero, quando o modelo dinâmico é conhecido e na ausência de perturbações. Aparentemente, este é o primeiro trabalho a demonstrar que um controlador por realimentação de saída para o caso geral com  $n$  graus de liberdade é global no sentido usual, considerando apenas a existência do amortecimento natural.

Em seguida, utilizando a mesma técnica de análise proposta, foi provado que um controlador PD causal com um ganho proporcional não-linear em conjunto com uma compensação *feedforward* também é capaz de resolver o problema de rastreamento global para manipuladores robóticos, usando apenas medidas de posição. Durante os desenvolvimentos teóricos, foi mostrado que para este controlador, é possível obter um limitante menos conservativo para a constante de tempo do filtro de avanço.

Além disso, foram apresentados resultados de simulação para verificar os desenvolvimentos teóricos e validar os resultados obtidos. A partir das simulações numéricas apresentadas verificou-se que a constante de tempo do filtro de avanço pode ser sintonizada com um valor muito maior do que aquele que seria permitido pela análise, e ainda assim assegurar convergência do estado completo do erro para zero, mesmo para condições iniciais excessivamente grandes. Na realidade, devido a limitações computacionais, não foi possível determinar se, de fato, o estado deixaria de convergir para alguma condição inicial suficientemente grande. Este resultado motiva a elaboração de outras funções de Lyapunov e novas técnicas de análise, para se determinar com mais precisão o maior valor que a constante de tempo do filtro deve ter para assegurar convergência global do estado do erro.



# Capítulo 3

## Rastreamento Global para Sistemas de Euler-Lagrange via Realimentação de Posição

### 3.1 Introdução

Sistemas de Euler-Lagrange englobam diversos sistemas físicos de interesse prático, como por exemplo: manipuladores robóticos, satélites, navios, veículos submarinos, conversores de potência, circuitos elétricos, dentre outros (Ortega et al. 1998, Brogliato, Lozano, Maschke & Egeland 2007, Fossen 1994).

No capítulo 2, utilizando a técnica de análise “ISS regulator approach” foi mostrado que um simples controlador PD causal é capaz de resolver o problema de rastreamento global para manipuladores robóticos usando apenas medidas de posição. Neste capítulo, será provado que a técnica de análise proposta pode ser utilizada para estender o resultado obtido para uma classe de Sistemas de Euler-Lagrange mais abrangente.

Mais especificamente, será provado que um simples controlador PD causal com compensação *feedforward* é capaz de garantir rastreamento global para uma classe de sistemas de Euler-Lagrange com  $n$  graus de liberdade, que inclui por exemplo: manipuladores robóticos com juntas de revolução, sistemas mecânicos simples, navios, veículos submarinos, dentre outros. Novamente, o resultado de estabilidade obtido é global no sentido usual, i.e., nenhuma restrição sobre qualquer condição

inicial do sistema em malha fechada é imposta.

Neste capítulo, também será provado que o sistema do erro em malha fechada é robusto à presença de uma perturbação de entrada aditiva e limitada. Este resultado pode ser utilizado para analisar a possibilidade do modelo dinâmico do sistema ser incerto, e será de fundamental importância para os desenvolvimentos teóricos do capítulo 6.

## 3.2 Equações de Euler-Lagrange

Um sistema de Euler-Lagrange (Sistema EL) é um sistema cuja dinâmica é governada pelas equações de Euler-Lagrange. A forma geral das Equações de Euler-Lagrange para um sistema dinâmico com  $n$  graus de liberdade é dada por (Ortega et al. 1998, Brogliato et al. 2007):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) - \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) = Q \quad (3.1)$$

onde  $q \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de coordenadas generalizadas,  $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de velocidades generalizadas,  $Q \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de forças generalizadas que atuam no sistema, e  $L(q, \dot{q})$  é a função Lagrangiana que é definida por:

$$L(q, \dot{q}) = \mathcal{T}(q, \dot{q}) - \mathcal{V}(q)$$

sendo que  $\mathcal{T}(q, \dot{q})$  é a Energia Cinética, que é assumida como sendo da seguinte forma:

$$\mathcal{T}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q},$$

onde  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de inércia generalizada, e  $\mathcal{V}(q)$  é a Energia Potencial. Considerando esta sub-classe de sistemas de Euler-Lagrange com  $n$  graus de liberdade, as Equações de Euler-Lagrange (3.1) podem ser reescritas da seguinte forma equivalente (Ortega et al. 1998, Brogliato et al. 2007):

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + f_D(q, \dot{q}) + g(q) = \tau, \quad (3.2)$$

onde  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$ ,  $\ddot{q}(t) \in \mathbb{R}^n$  denotam a posição, a velocidade e a aceleração generalizada, respectivamente; a matriz de inércia generalizada  $M(q)$  é simétrica, positiva definida e uniformemente limitada em  $q$ ;  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz das forças

centrípetas/Coriolis, que é definida através dos símbolos de Christoffel (Ortega et al. 1998);  $f_D(q, \dot{q})$  representa o amortecimento do sistema;  $\tau \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de forças generalizadas;  $g(q) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de forças potenciais, sendo definido do seguinte modo:

$$g(q) := \frac{\partial \mathcal{V}(q)}{\partial q}$$

A função  $f_D(q, \dot{q}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é continuamente diferenciável nos seus argumentos, uniformemente limitada em  $q$ , e pode ser escrita como:

$$f_D(q, \dot{q}) = D_l(q)\dot{q} + D_{nl}(q, \dot{q})\dot{q}, \quad (3.3)$$

Além disso, esta função satisfaz as seguintes desigualdades  $\forall q \in \mathbb{R}^n$  e  $\forall \dot{q} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ :

$$D_l(q) = D_l^T(q) \geq 0 \quad (3.4)$$

$$0 < \delta_m |\dot{q}| \leq D_{nl}(q, \dot{q}) \leq \delta_M |\dot{q}|, \quad (D_{nl}(q, \dot{q}) = D_{nl}^T(q, \dot{q})) \quad (3.5)$$

onde  $\delta_m$  e  $\delta_M$  são constantes não negativas. As matrizes  $D_l(q)$  e  $D_{nl}(q, \dot{q})$  são assumidas como sendo simétricas, por simplicidade.

No capítulo 2, a matriz  $D_l(q)$  correspondente ao termo linear (com respeito as velocidades generalizadas) do amortecimento era suposta como sendo positiva definida. Entretanto, para embarcações e estruturas marinhas cujo atrito hidrodinâmico seja modelado pela equação de Morison, e para barcos que não possuam estabilidade em linha reta, a matriz  $D_l(q)$  é apenas positiva semi-definida (Aamo et al. 2001), fato registrado pela desigualdade (3.4). Por outro lado, para manipuladores robóticos o termo não-linear  $D_{nl}(q, \dot{q}) = 0$ . Neste caso, as constantes  $\delta_m = \delta_M = 0$

A dinâmica do sistema (3.2) exhibe as seguintes propriedades (Spong & Vidyasagar 1989, Ortega et al. 1998, Santibañez et al. 2005, Fossen 1994):

**Propriedade 3.1** *A matriz de inércia generalizada é limitada superiormente e inferiormente pelas seguintes desigualdades:*

$$\lambda_m(M) |x|^2 \leq x^T M(q)x \leq \lambda_M(M) |x|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

sendo que

$$\lambda_m(M) := \min_{q \in \mathbb{R}^n} \lambda_m(M(q)), \quad \lambda_M(M) := \max_{q \in \mathbb{R}^n} \lambda_M(M(q))$$

**Propriedade 3.2** A matriz de inércia generalizada satisfaz a seguinte desigualdade:

$$|M(x)z - M(y)z| \leq k_M |x - y| |z|, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$$

na qual  $c_M$  pode ser calculada da seguinte maneira:

$$k_M = n^2 \left( \max_{i,j,k,q} \left| \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right| \right),$$

sendo que  $M_{ij}(q)$  é o elemento  $ij$  da matriz  $M(q)$ .

**Propriedade 3.3** As matrizes de inércia generalizada e de Coriolis satisfazem a seguinte relação:

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q}), \quad \forall q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$$

**Propriedade 3.4** A matriz  $\frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q, \dot{q})$  é anti-simétrica, i.e.,

$$x^T \left( \frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right) x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

**Propriedade 3.5** A matriz de Coriolis/centrípeta satisfaz a seguinte desigualdade:

$$|C(x, z)w - C(y, v)w| \leq c_1 |z - v| |w| + c_2 |z| |x - y| |w|, \quad \forall x, y, z, v, w \in \mathbb{R}^n$$

na qual os parâmetros  $c_1$  e  $c_2$  podem ser calculados do seguinte modo:

$$c_1 = n^2 \left( \max_{i,j,k,q} |c_{ijk}(q)| \right),$$

$$c_2 = n^3 \left( \max_{i,j,k,l,q} \left| \frac{\partial c_{ijk}(q)}{\partial q_l} \right| \right),$$

sendo  $c_{ijk}$  é o símbolo de Christoffel  $ijk$ .

**Propriedade 3.6** O vetor de forças potenciais satisfaz a seguinte desigualdade:

$$|g(x) - g(y)| \leq k_g |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

na qual o parâmetro  $c_g$  pode ser calculado do seguinte modo:

$$k_g = n \left( \max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right| \right),$$

sendo que  $g_i(q)$  é o elemento  $i$  do vetor  $g(q)$ .

**Propriedade 3.7** *A dinâmica do sistema pode ser parametrizada linearmente:*

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + f_D(q, \dot{q}) + g(q) = \tau,$$

onde  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times l}$  é a matriz regressora e  $\theta \in \mathbb{R}^l$  é um vetor constante de parâmetros.

**Propriedade 3.8** *Os seguintes majorantes são válidos:*

$$|C(q, \dot{q})| \leq c_1 |\dot{q}|, \quad \left| \dot{M}(q) \right| \leq c_m |\dot{q}|, \quad |g(q)| \leq c_g, \quad |\theta| \leq c_\theta$$

**Propriedade 3.9** *A matriz de Coriolis  $C(x, y)$  é linear em  $y$ , de modo que:*

$$C(x, y)z = C(x, z)y, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$$

**Propriedade 3.10** *A função  $f_D$  satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$(x - y)^T [f_D(z, x) - f_D(z, y)] \geq 0, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \quad (3.6)$$

**Propriedade 3.11** *A função  $\frac{\partial f_D(x, y)}{\partial y}$  pode ser majorada da seguinte forma:*

$$\left| \frac{\partial f_D(x, y)}{\partial y} \right| \leq K_1 + K_2 |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (K_1, K_2 \geq 0) \quad (3.7)$$

Deve ser destacado que a equação dinâmica (3.2) pode ser utilizada para modelar manipuladores robóticos com juntas de revolução, navios e veículos submarinos (Spong & Vidyasagar 1989, Ortega et al. 1998, Fossen 1994, Aamo et al. 2001). Para ilustrar este fato considere o seguinte exemplo:

**Exemplo 3.1 Omni-Directional Intelligent Navigator (ODIN):**

*ODIN é um veículo submarino esférico e autônomo, cujo movimento no plano horizontal (profundidade constante) é governado por (Aamo et al. 2001):*

$$\begin{aligned} M_b \dot{\xi} + C_b(\xi)\xi + D_b(\xi)\xi &= \tau_b \\ \dot{\eta} &= J(\eta)\xi \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde:

$$M_b = \begin{bmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{15}\pi\rho R^5 \end{bmatrix}, \quad C_b(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2mv \\ 0 & 0 & 2mu \\ 2mv & -2mu & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_b(\xi) = \begin{bmatrix} d_t |u| & 0 & 0 \\ 0 & d_t |v| & 0 \\ 0 & 0 & d_1 |r| + d_2 \end{bmatrix}, \quad J(\eta) = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\xi = [u \ v \ r]^T$  é a velocidade considerando um referencial de coordenadas no corpo,  $\eta = [x \ y \ \psi]^T$  é a posição e a orientação considerando um referencial de coordenadas inercial. Os símbolos  $s\psi$  e  $c\psi$  denotam o seno e o cosseno de  $\psi$ , respectivamente.  $M$  é a matriz de massa, incluindo a massa adicional hidrodinâmica;  $C(\xi)$  é a matriz de Coriolis;  $D(\xi)$  é a matriz de amortecimento hidrodinâmico,  $m$  e  $R$  representam a massa e o raio do veículo, respectivamente;  $d_t$ ,  $d_1$  e  $d_2$  são constantes positivas relacionadas com as forças de amortecimento hidrodinâmico;  $\rho$  é a densidade da água. A equação (3.8) pode ser reescrita em coordenadas inerciais do seguinte modo:

$$M\ddot{\eta} + C(\dot{\eta})\dot{\eta} + f_D(\eta, \dot{\eta}) = \tau \quad (3.9)$$

onde:

$$M = J(\psi)M_b J^T(\psi) = M_b$$

$$C(\dot{\eta}) = J(\psi) \left[ C_b(\xi) - M_b J^T(\psi) \dot{J}(\psi) \right] J^T(\psi) = \begin{bmatrix} 0 & 2m\dot{\psi} & -2m\dot{y} \\ -2m\dot{\psi} & 0 & 2m\dot{x} \\ 2m\dot{y} & -2m\dot{x} & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_D = J(\psi)D_b(\xi)J^T(\psi) = D_l(\eta) + D_{nl}(\eta, \dot{\eta})$$

$$D_l(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \end{bmatrix},$$

$$D_{nl}(\eta, \dot{\eta}) = \begin{bmatrix} c^2\psi d_t |u| + s^2\psi d_t |v| & s\psi c\psi d_t |u| - s\psi c\psi d_t |v| & 0 \\ s\psi c\psi d_t |u| - s\psi c\psi d_t |v| & s^2\psi d_t |u| + c^2\psi d_t |v| & 0 \\ 0 & 0 & d_1 |\dot{\psi}| \end{bmatrix}$$

onde  $u = c\psi\dot{x} + s\psi\dot{y}$  e  $v = -s\psi\dot{x} + c\psi\dot{y}$  foram mantidos na expressão de  $D_{nl}(\eta, \dot{\eta})$  por simplicidade notacional. Note que a equação (3.9) é um caso particular da

equação (3.2). Além disso, deve ser ressaltado que a equação (3.9) satisfaz todas as propriedades consideradas.

### 3.3 Análise de robustez a perturbações de entrada considerando um regulador PD causal

Nesta seção, considera-se o problema de regulação global de saída para um ponto de operação constante desejado  $q_r$ , usando apenas medidas de posição. O objetivo é demonstrar que a sub-classe de sistemas EL descrita por (3.2) controlada por um regulador PD causal é ISpS com respeito a perturbações de entrada limitadas. O erro de regulação é definido por  $\tilde{q} := q - q_r$ .

Como é considerado que apenas medidas das posições estão disponíveis, as velocidades podem ser estimadas através do filtro de avanço de fase descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= -\frac{1}{\mu}\vartheta - \frac{1}{\mu^2}q \\ \hat{\nu} &= \vartheta + \frac{1}{\mu}q\end{aligned}\tag{3.10}$$

onde  $\mu$  é a constante de tempo do filtro de avanço de fase. Desta forma, a lei de controle relativa ao regulador PD causal é dada por:

$$\tau = -K_p\tilde{q} - K_d\hat{\nu}\tag{3.11}$$

Considerando a presença de uma perturbação de entrada limitada, o sinal de entrada é dado por:

$$\tau = -K_p\tilde{q} - K_d\hat{\nu} + d_i\tag{3.12}$$

onde  $K_p$  e  $K_d$  são matrizes simétricas e positivas definidas.

Definindo o estado do sistema em malha fechada (3.2), (3.10) e (3.12) como  $x^T := [\tilde{q}^T \ \dot{q}^T \ \hat{\nu}^T]$ , a equação de estado pode ser descrita por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M(q)^{-1} [d - C(q, \dot{q})\dot{q} - f_D(q, \dot{q}) - K_p\tilde{q} - K_d\hat{\nu}] \\ -\frac{\hat{\nu}}{\mu} + \frac{\dot{q}}{\mu} \end{bmatrix}\tag{3.13}$$

onde a perturbação de entrada limitada  $d = d_i - g(q)$  foi considerada, por simplicidade.

Considere a seguinte função de Lyapunov-ISpS candidata igual àquela usada na seção 2.3.1:

$$V_1(x) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \frac{1}{2}\mu\hat{v}^T K_d \hat{v} + \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T M(q)\dot{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} \quad (3.14)$$

onde  $\varepsilon_1$  é uma constante positiva suficientemente pequena.

De acordo com a Proposição 2.1,  $V_1(x)$  é uma função de armazenamento suave, se  $\varepsilon_1$  satisfizer a seguinte desigualdade:

$$\varepsilon_1 \leq \frac{\sqrt{\lambda_m(M)\lambda_m(K_p)}}{2\lambda_M(M)} \quad (3.15)$$

O seguinte Lema mostra que  $V_1(x)$  é uma função de Lyapunov-ISpS, se  $\varepsilon_1$  for suficientemente pequeno.

**Lema 3.1** *A função  $V_1(x)$  definida em (3.14) é uma função de Lyapunov-ISpS para o sistema (3.13), se  $\varepsilon_1$  for suficientemente pequeno. Além disso, a derivada temporal de  $V_1(x)$  ao longo da solução de (3.13), pode ser majorada por:*

$$\dot{V}_1(x) \leq -\alpha_1(|x|) + \sigma_1(|d|) + \bar{c}_1 \quad (3.16)$$

onde  $\alpha_1(r), \sigma_1(r) \in \mathcal{K}_\infty$  e  $\bar{c}_1 \geq 0$  é uma constante. Se a matriz  $D_l(q)$  do termo linear do amortecimento (ver (3.3)) for positiva definida, então  $\bar{c}_1 = 0$  e a função  $V_1(x)$  é uma função de Lyapunov-ISS para o sistema (3.13).

*Prova:* Ver Apêndice D.1 ■

A existência de uma função de Lyapunov-ISpS (Lyapunov-ISS), implica que o sistema em malha fechada (3.13) é ISpS (ISS) com respeito à perturbação de entrada  $d(t)$ . Os resultados de estabilidade obtidos nesta seção são formalmente enunciados no seguinte Teorema.

**Teorema 3.1** *Considere um sistema de Euler-Lagrange com  $n$  graus de liberdade descrito por (3.2). Se a lei de controle for definida como em (3.10) e (3.11), então o sistema em malha fechada (3.13) é ISpS com respeito a uma perturbação de entrada limitada  $d(t)$ . Além disso, se a matriz  $D_l(q)$  for positiva definida, então o sistema é ISS com respeito à  $d(t)$ .* ■



### 3.4 Rastreamento global usando um controlador PD causal com compensação feedforward

Nesta seção, o problema de rastreamento global para uma classe de sistemas de Euler-Lagrange com  $n$  graus de liberdade e modelo dinâmico descrito por (3.2) será abordado. Considera-se que apenas medidas de posição estejam disponíveis. O erro de rastreamento  $e(t) \in \mathbb{R}^n$  é definido como:

$$e(t) = q(t) - q_d(t)$$

onde  $q_d(t)$  é a trajetória desejada. Os sinais  $q_d(t)$ ,  $\dot{q}_d(t)$ ,  $\ddot{q}_d(t)$  são considerados como sendo contínuos e limitados por  $|q_d|_M$ ,  $|\dot{q}_d|_M$  e  $|\ddot{q}_d|_M$ , respectivamente. O objetivo é projetar uma lei de controle de forma que o erro de rastreamento  $e(t)$  tenda assintoticamente para zero, na ausência de perturbações e para quaisquer condições iniciais do sistema em malha fechada.

Para simplificar a análise e o projeto do controlador a seguinte hipótese é feita:

**Hipótese 3.1** *O modelo dinâmico (3.2) do sistema é considerado como sendo conhecido, o que significa que o vetor de parâmetros constantes  $\theta$ , apresentado na Propriedade 3.7, também é conhecido.*

Com o intuito de obter rastreamento exato de trajetória, o seguinte termo de compensação *feedforward* é adicionado ao sinal de controle:

$$Y_d \theta = M(q_d) \ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d) \dot{q}_d + f_D(q, \dot{q}_d) + g(q_d) \quad (3.17)$$

Neste caso, o termo de compensação *feedforward* não pode mais ser escolhido como função apenas dos sinais de trajetória desejados. Entretanto, como a função  $f_D(q, \dot{q}_d)$  é uniformemente limitada em  $q$ , o termo de *feedforward* continua sendo uma função uniformemente limitada.

O sinal  $\hat{v}$  pode ser estimado através do seguinte filtro de avanço de fase descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= -\frac{1}{\mu} \vartheta - \frac{1}{\mu^2} q - \frac{1}{\mu} \dot{q}_d \\ \hat{v}_e &= \vartheta + \frac{1}{\mu} q \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde o parâmetro  $\mu$  deve ser suficientemente pequeno para assegurar convergência assintótica do erro de rastreamento para zero.

A lei de controle é projetada da seguinte forma:

$$\tau = -K_p e - K_d \hat{v}_e + Y_d \theta \quad (3.19)$$

### 3.4.1 Análise de Estabilidade

Na análise de estabilidade será considerada a presença de uma perturbação aditiva e limitada  $d_e$ , que será utilizada no capítulo 6 para representar incertezas no modelo e a presença de uma perturbação na saída do filtro de avanço descrito por (3.18). Desta forma, o sinal de entrada é dado por:

$$\tau = -K_p e - K_d \hat{v}_e + Y_d \theta + d_e \quad (3.20)$$

Para tratar deste caso a seguinte hipótese é feita acerca da perturbação  $d_e$ :

**Hipótese 3.2** *A perturbação  $d_e$  é uniformemente limitada, e possui um limitante superior  $\bar{d}_e$  conhecido que satisfaz a  $\bar{d}_e \geq |d_e(t)|$  ( $\forall t$ ).*

Definindo o erro de estimação do filtro de avanço de fase  $\epsilon_e \in \mathbb{R}^n$  por:

$$\epsilon_e(t) = \hat{v}_e(t) - \dot{e}(t), \quad (3.21)$$

o sinal de entrada (3.20) pode ser reescrito como:

$$\tau = -K_p e - K_d \dot{e} - K_d \epsilon_e + Y_d \theta + d_e \quad (3.22)$$

Substituindo o sinal de entrada (3.22) em (3.2), tem-se:

$$\ddot{e} = M^{-1}(q) [-C(q, \dot{q})\dot{e} - f_D(q, \dot{q}) + f_D(q, \dot{q}_d) - K_p e - K_d \dot{e} - K_d \epsilon_e - h_e + d_e] \quad (3.23)$$

onde  $h_e = [M(q) - M(q_d)]\ddot{q}_d + [C(q, \dot{q}) - C(q_d, \dot{q}_d)]\dot{q}_d + g(q) - g(q_d)$ . Um majorante para a função  $h_e$  é apresentado na Proposição 2.2.

De (3.18) e (3.21) a dinâmica do erro de estimação do filtro de avanço pode ser descrita por:

$$\dot{\epsilon}_e = -\frac{1}{\mu}\epsilon_e - \ddot{e} \quad (3.24)$$

Definindo o estado do sistema do erro por:

$$X_e = [z_e^T \ \epsilon_e^T]^T, \quad z_e = [e^T \ \dot{e}^T]^T, \quad (3.25)$$

a dinâmica do sistema do erro em malha fechada pode ser descrita por (3.23) e (3.24).

Pode-se mostrar que o sinal de entrada (3.20) é equivalente ao sinal (3.12). Desta forma, utilizando o resultado obtido no Lema 3.1 é possível provar que o sistema do erro (3.23) e (3.24) é GApS. Este resultado de estabilidade é formalmente enunciado no Lema 3.2

**Lema 3.2** *Considere o sistema (3.2). Assuma que as Hipóteses 3.1 e 3.2 são satisfeitas. Se o sinal de entrada for dado por (3.18) e (3.20), então o sistema do erro em malha fechada descrito por (3.23) e (3.24), com estado  $X_e$  definido em (3.25), é uniformemente globalmente assintoticamente praticamente estável (GApS). Além disso, o estado do sistema completo do erro é conduzido num tempo finito  $T_R$  para o seguinte conjunto compacto:*

$$D_R := \{X_e \in \mathbb{R}^{3n}; |X_e| \leq R\},$$

onde  $R$  é uma constante que independe do parâmetro  $\mu$  do filtro de avanço de fase.

*Prova:* Ver Apêndice D.2 ■

### 3.4.2 Análise de Convergência

Nesta seção, será fornecida uma análise das propriedades de convergência do sistema (3.2) com lei de controle dada por (3.19) e sujeito a uma perturbação de entrada  $d_e$  uniformemente limitada. Será provado que para  $\mu$  suficientemente pequeno o sistema do erro converge para um conjunto compacto determinado pelo majorante  $\bar{d}_e$  da perturbação  $d_e$ . Além disso, será mostrado que se  $d_e \equiv 0$  o sistema do erro converge assintoticamente para zero.

A análise das propriedades de convergência do sistema do erro em malha fechada será feita de forma similar ao procedimento adotado na seção 2.4. Primeiramente, será provado que o subsistema- $z_e$  definido em (3.23) é ISS com respeito à entrada  $\epsilon_e$ . Em seguida será demonstrado que o subsistema- $\epsilon_e$  definido em (3.24) é ISS com

respeito à entrada  $z_e$ . Finalmente, explorando o fato de que o estado do sistema completo do erro é globalmente limitado, pode-se demonstrar que este estado converge globalmente para zero na ausência de perturbações.

Para ilustrar a análise, um diagrama de blocos que mostra a interconexão entre os subsistemas que compõe o sistema completo do erro é apresentado na Figura 3.1

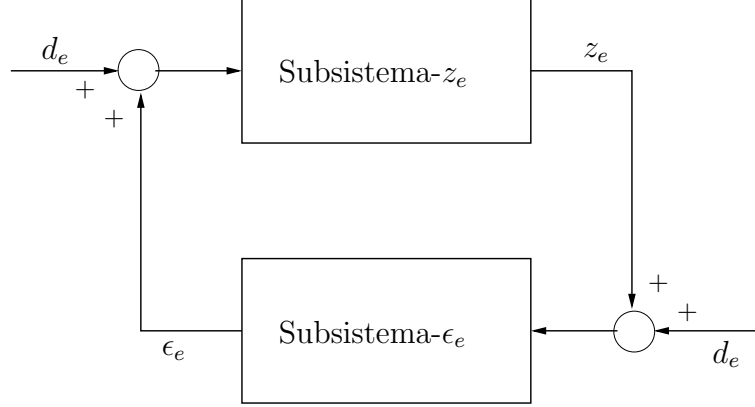


FIGURA 3.1: Interconexão entre os subsistemas que constituem o sistema completo do erro, incluindo perturbações de entrada

O seguinte Lema mostra que o subsistema- $z_e$  é ISS com respeito às entradas  $\epsilon_e$  e  $d_e$ , se os ganhos de controle  $K_p$  e  $K_d$  forem escolhidos apropriadamente.

**Lema 3.3** *Se os ganhos  $K_p$  e  $K_d$  forem escolhidos tais que:*

$$\lambda_m(K_d) \geq \chi_2 \quad (3.26)$$

$$\lambda_m(K_p) \geq 2c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \left[ 1 + \frac{\chi_3^2}{4\varepsilon_2(\lambda_m(K_d) - \chi_2)} \right] \quad (3.27)$$

com  $\chi_2$  e  $\chi_3$  definidos por:

$$\chi_2 := c_1 |\dot{q}_d|_M + 2\varepsilon_2 \lambda_M(M) c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} + \varepsilon_2 c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2} (c_1 + K_2) \quad (3.28)$$

$$\chi_3 := 1 + \varepsilon_2 (K_1 + 2K_2 |\dot{q}_d|_M + \lambda_M(K_d) + 2c_1 |\dot{q}_d|_M); \quad (3.29)$$

então, o subsistema- $z_e$  definido em (3.23) é ISS com respeito às entradas  $\epsilon_e$  e  $d_e$ :

$$|z_e(t)| \leq \beta_z(|z_e(t_0)|, t - t_0) + \gamma_z^\epsilon(\|\epsilon_e\|) + \gamma_z^d(\|d_e\|), \quad (3.30)$$

onde  $\beta_z \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma_z^\epsilon(r), \gamma_z^d(r) \in \mathcal{K}_\infty$

Além disso, dentro de  $D_R$ , o ganho ISS  $\gamma_z^\epsilon$  é linear e dado por  $\gamma_z^\epsilon(r) = \kappa_z r$  onde a constante  $\kappa_z$  é independente de  $\mu$ .

*Prova:* ver Apêndice D.3 ■

O seguinte Lema prova que para  $\mu$  suficientemente pequeno o subsistema- $\epsilon_e$  é ISS com respeito às entradas  $z_e$  e  $d_e$ .

**Lema 3.4** *Se  $\mu$  for escolhido tal que:*

$$\mu \leq \frac{\lambda_m(M)}{4\lambda_M(K_d)}, \quad (3.31)$$

então, o subsistema- $\epsilon_e$  definido em (3.24) é ISS com respeito às entradas  $z_e$  e  $d_e$ :

$$|\epsilon_e(t)| \leq \beta_\epsilon(|\epsilon_e(t_0)|, t - t_0) + \gamma_\epsilon^z(\mu \|z_e\|) + \gamma_\epsilon^d(\mu \|d_e\|) \quad (3.32)$$

Além disso, dentro de  $D_R$ , o ganho ISS  $\gamma_\epsilon^z$  é linear e dado por  $\gamma_\epsilon^z(\mu r) = \mu \kappa_\epsilon r$ , onde a constante  $\kappa_\epsilon$  é independente de  $\mu$ .

*Prova:* ver Apêndice D.4 ■

De acordo com os Lemas 3.3 e 3.4, pode-se verificar que dentro de  $D_R$  o ganho composto  $\gamma_\epsilon^z \circ \gamma_z^\epsilon(r) = \mu \kappa_z \kappa_\epsilon r$ . Logo, se  $\mu$  satisfizer

$$\mu \leq \frac{1}{\kappa_z \kappa_\epsilon}, \quad (3.33)$$

aplicando o Teorema de Pequenos Ganhos Generalizado (Jiang et al. 1994, Jiang & Mareels 1997), pode-se concluir que:

$$|X_e(t)| \leq \beta_\epsilon(|X_e(t_0)|, t - t_0) + \gamma_d(\|d_e\|), \quad (3.34)$$

onde  $\beta_\epsilon \in \mathcal{KL}$ , e  $\gamma_d \in \mathcal{K}_\infty$ . Logo, o sistema do erro em malha fechada é ISS com respeito à perturbação de entrada  $d_e$ . Portanto, na ausência de perturbações ( $d_e \equiv 0$ ) o estado do erro converge para zero. Neste caso, é possível concluir que o sistema do erro descrito por (3.23) e (3.24) é GAS. Por outro lado, usando o fato que  $d_e(t) \leq \bar{d}_e, \forall t$ , pode-se verificar que:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{t_s \geq t} |X_e(t_s)| \leq \gamma_d(\bar{d}_e)$$

Logo, o estado do erro converge para um conjunto compacto determinado pelo majorante  $\bar{d}_e$ . Os resultados obtidos acima são formalmente enunciados no Teorema 3.2.

**Teorema 3.2** *Considere um sistema de Euler-Lagrange com  $n$ -graus de liberdade descrito por (3.2). Assuma que as Hipóteses 3.1 e 3.2 sejam satisfeitas. Seja a lei de controle definida por (3.18) e (3.20). Se os ganhos  $K_d$  e  $K_p$  forem selecionados de forma a satisfazer as desigualdades (3.26) e (3.27) e se o parâmetro  $\mu$  for escolhido de modo a satisfazer (3.31) e (3.33), então o estado do erro  $X_e = [e^T \dot{e}^T \epsilon_e^T]^T$  é ISS com respeito à perturbação de entrada  $d_e$ . Além disso o estado  $X_e$  é globalmente uniformemente limitado por:*

$$|X_e(t)| \leq \beta_e(|X_e(t_0)|, t - t_0) + \gamma_d(\bar{d}_e)$$

onde  $\beta_e \in \mathcal{KL}$  e  $\gamma_d \in \mathcal{K}_\infty$ . Portanto, na ausência de perturbações ( $d_e \equiv 0$ ) o estado do erro converge para zero e o sistema do erro em malha fechada descrito por (3.23) e (3.24) é uniformemente globalmente assintoticamente estável (GAS). ■

## 3.5 Conclusões

Neste capítulo, foi mostrado que um simples controlador PD causal com compensação *feedforward* soluciona o problema de rastreamento global para uma classe de sistemas de Euler-Lagrange com  $n$  graus de liberdade, usando apenas realimentação de posição. A classe considerada inclui importantes sistemas físicos como: manipuladores robóticos, navios, veículos submarinos, dentre outros.

O resultado de estabilidade global é obtido considerando-se apenas a existência de amortecimento que pode ser tanto linear quanto não-linear com respeito as velocidades. Além disso, foi provado que o rastreamento é exato se o modelo dinâmico do sistema for conhecido e na ausência de perturbações. Por outro lado, foi mostrado que se o modelo dinâmico for incerto ou se o sistema for perturbado, os erros de rastreamento convergem para um conjunto compacto, relacionado com a magnitude das perturbações presentes no sistema.

# Capítulo 4

## Sistemas a Estrutura Variável

As estratégias de controle propostas nos capítulos 5 e 6 são baseadas no controle a estrutura variável, que é caracterizado pela utilização de uma lei de controle descontinua que chaveia, seguindo uma dada regra, entre um conjunto de funções das variáveis de estado da planta, mudando, assim, a estrutura do sistema em malha fechada.

Embora o controle a estrutura variável seja um tema bastante extenso, o objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos básicos de sistemas a estrutura variável, além de introduzir um novo tipo de diferenciador não linear que é capaz de fornecer a derivada exata para uma classe de sinais de entrada. Este diferenciador será fundamental para as estratégias de controle consideradas nos capítulos 5 e 6.

Em geral, além das trajetórias características de cada uma das estruturas do sistema realimentado, um novo movimento no espaço de estado pode ser criado denominado de **modo deslizante** (Emelyanov 1970, Itkis 1976, Utkin 1992). Neste caso, a estratégia de controle é chamada de Controle por Modos Deslizantes (*Sliding Mode Control - (SMC)*).

A estratégia de chaveamento é desenvolvida de tal forma que as trajetórias do sistema alcancem e mantenham-se em uma superfície no espaço de estado (*superfície de deslizamento*), especificada conforme um comportamento dinâmico desejado (Emelyanov 1970, Utkin 1992). Uma vez que o modo deslizante tenha sido alcançado, o desempenho do sistema torna-se insensível a incertezas paramétricas da planta e a algumas classes de perturbações externas. Esta característica é conhecida por **propriedade da invariância**, i.e., quando o regime deslizante é alcançado a

dinâmica invariante do sistema é tal que ele permanece na superfície de deslizamento

No modo deslizante convencional, a trajetória do sistema fica restrita a uma superfície de deslizamento definida por  $s(x) = 0$ . Este conceito foi recentemente generalizado em (Levant 1993) com a introdução dos modos deslizantes de ordem superior (Higher Order Sliding Modes - HOSM). Neste caso a superfície de deslizamento passa a ser definida por  $s(x) = \dot{s}(x) = \dots = s^{(r-1)}(x) = 0$ , onde  $r$  é a ordem do deslizamento.

Embora o modo deslizante convencional seja um caso particular dos modos deslizantes de ordem superior, ele será chamado simplesmente por modo deslizante, por razões históricas. Em algumas situações, por motivo de clareza, o termo modo deslizante convencional será empregado.

Do ponto de vista matemático, os Sistemas a Estrutura Variável (*VSS*) são representados por equações diferenciais com lado direito descontínuo. O problema básico destas equações diferenciais é que as teorias convencionais de existência e unicidade de soluções não podem ser aplicadas, nos pontos nos quais o lado direito da equação não for analítico. Nesta tese será adotada a definição de Filippov para a solução de equações diferenciais com lado direito descontínuo (Filippov 1964, Filippov 1988)

## 4.1 Sistema de Controle Descontínuo

Considere sistemas de controle do seguinte tipo:

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u \quad (4.1)$$

sendo que  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $f(x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  são campos vetoriais suaves e  $u \in \mathbb{R}$ , é uma lei de controle descontínua.

Suponha que a dinâmica desejada para o sistema seja obtida com trajetórias restritas à superfície de deslizamento  $\mathcal{S} = \{x : s(x) = 0\}$ , sendo que  $s(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função continuamente diferenciável. Além disso, considera-se que a superfície  $\mathcal{S}$  satisfaça a seguinte condição de regularidade:

$$\frac{\partial}{\partial x}s(x) = \nabla_x s(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{S} \quad (4.2)$$



O sinal de controle é descontínuo e dado por:

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & \text{se } s(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{se } s(x) < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

sendo que  $u^+(x)$  e  $u^-(x)$  são funções localmente Lipschitz. Note que  $u(x)$  não é definido em  $s(x) = 0$ .

## 4.2 Noções Básicas de Controladores por Modos Deslizantes

Nesta seção serão apresentadas as principais características do controle por modos deslizantes. Para tornar o processo mais intuitivo e visando a facilitar o entendimento, os conceitos serão passados através de exemplos ilustrativos.

Considere o seguinte sistema de controle a estrutura variável:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ u = -\text{sgn}(s) \\ s = x_1 + x_2 \end{cases} \quad (4.4)$$

sendo que  $\text{sgn}(s) = 1$ , se  $s > 0$  e  $\text{sgn}(s) = -1$ , se  $s < 0$ . Este sistema é analiticamente definido em duas regiões do plano de fase por dois modelos matemáticos distintos:

- Na região I onde  $s(x) > 0$ , o modelo é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

- Na região II onde  $s(x) < 0$ , o modelo é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 1 \end{cases} \quad (4.6)$$

Os planos de fase para os sistemas representados pelas equações (4.5) e (4.6) são apresentados nas Figuras 4.1 e 4.2, respectivamente. Para facilitar a visualização da região de validade de cada modelo, a reta de chaveamento ( $s(x) = 0$ ) foi traçada nos dois planos de fase. Observando a Figura 4.1, pode ser visto que na região de validade do modelo matemático todas as trajetórias do sistema apontam na direção da reta de chaveamento. Este fenômeno também pode ser observado na Figura 4.2.

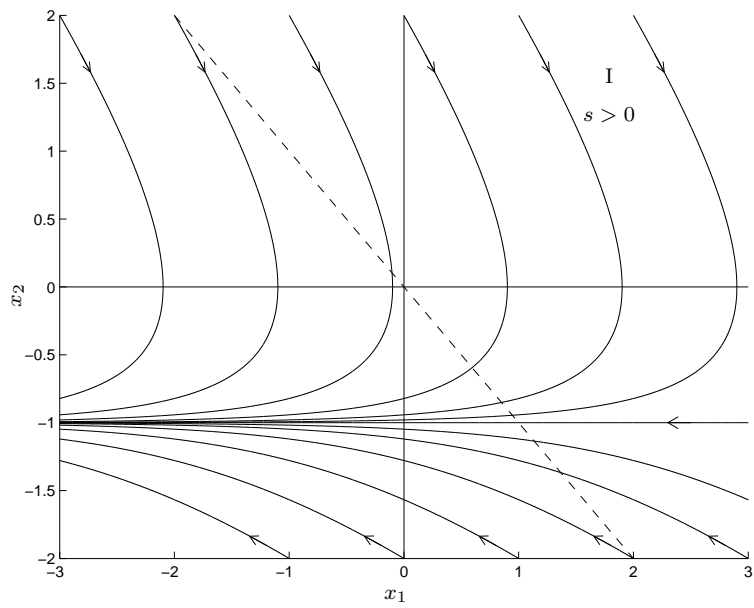


FIGURA 4.1: Plano de fase para o sistema (4.5). A linha tracejada representa a superfície de deslizamento definida por  $s(x) = 0$ .

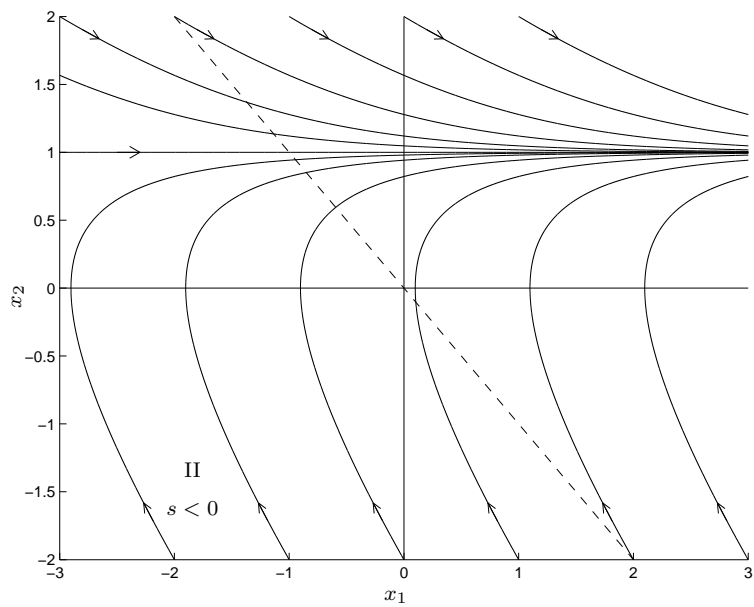


FIGURA 4.2: Plano de fase para o sistema (4.6). A linha tracejada representa a superfície de deslizamento definida por  $s(x) = 0$ .

O plano de fase para o sistema (4.4), apresentado na Figura 4.3, é formado através do desenho do plano de fase do sistema (4.5) na região I e do plano de fase do sistema (4.6) na região II. Para se obter o plano de fase completo é necessário descrever a trajetória do sistema no conjunto  $s(x) = 0$ .

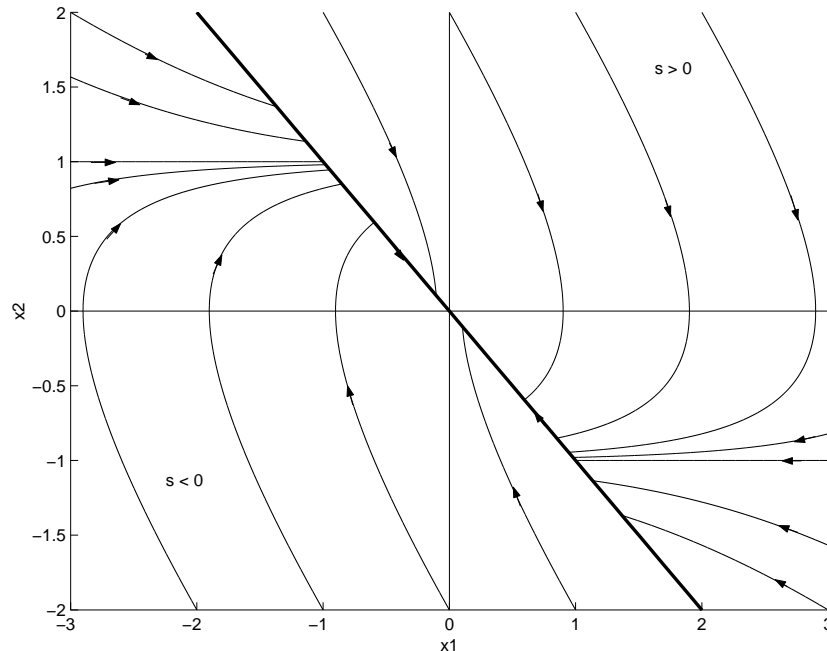


FIGURA 4.3: Plano de fase para o sistema (4.4).

Para esta finalidade, será utilizado um argumento intuitivo, ilustrado na Figura 4.4. Imagine que exista um atraso no chaveamento, ou seja, a mudança do sinal do controle ocorra um pouco depois da trajetória do sistema passar pela superfície de chaveamento.

Na Figura 4.4 apresenta-se a trajetória do sistema e o sinal de controle para diferentes condições de atraso. Na Figura 4.4 (a) pode ser visto que se o atraso for igual a  $0.1s$ , a trajetória do sistema irá oscilar em torno da superfície de chaveamento. Na Figura 4.4 (b) pode ser observado que à medida que o atraso diminui ( $0.05s$ ) a amplitude das oscilações é reduzida e a trajetória do sistema se aproxima cada vez mais da reta de chaveamento. Finalmente na Figura 4.4 (c) pode ser visto que para um atraso de  $0.01s$  a trajetória do sistema fica praticamente sobre a superfície de chaveamento. Deve-se destacar também que à medida que o sistema vai se aproximando do caso ideal (sistema sem atraso) a frequência de chaveamento vai crescendo indefinidamente, conforme pode ser visto nas Figuras 4.4 (d), (e) e (f).

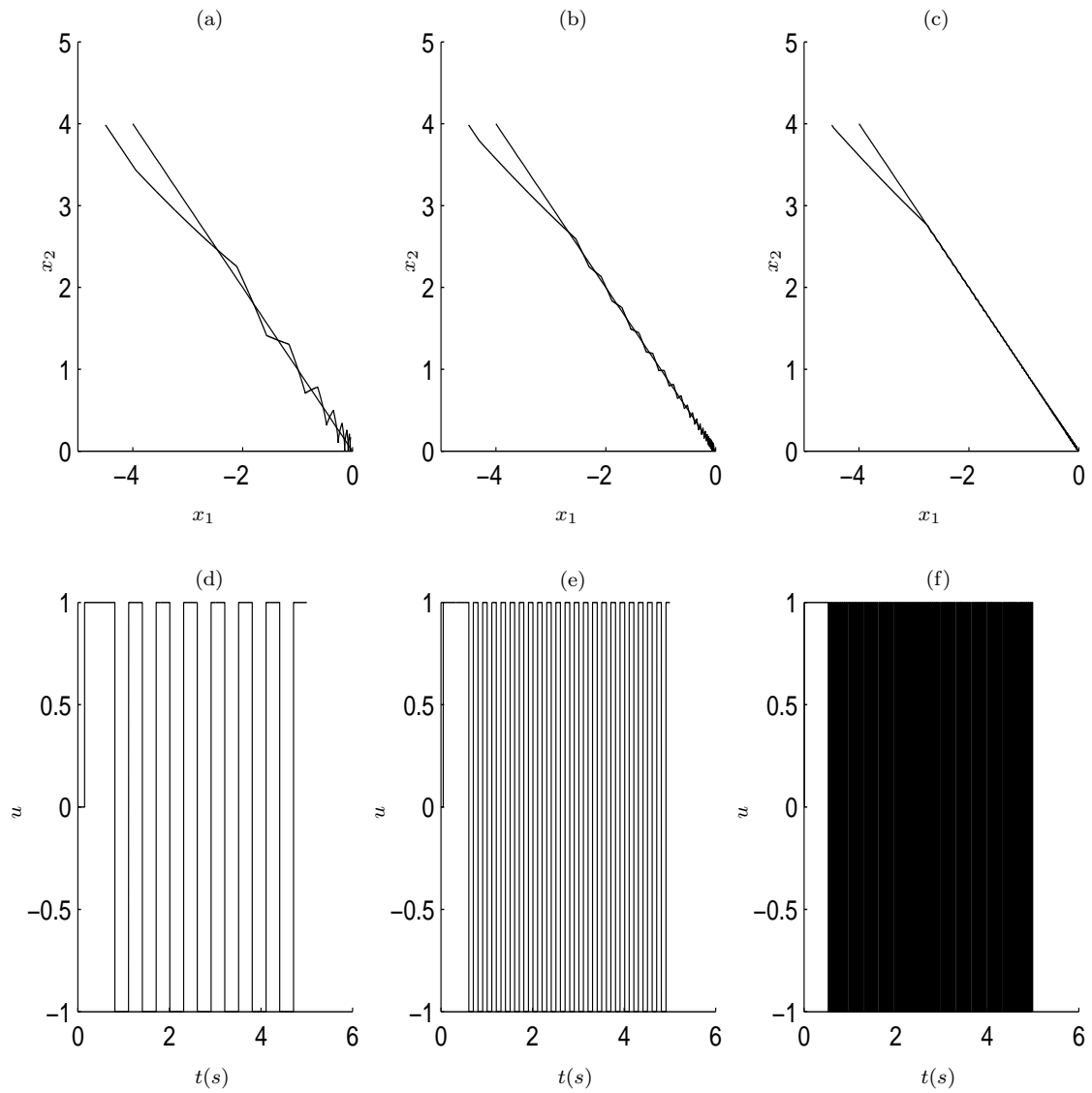


FIGURA 4.4: Trajetórias do sistema (4.4) para diferentes condições de atraso: (a) atraso igual a  $0.1s$ ; (b) atraso igual a  $0.05s$ ; (c) atraso igual a  $0.01s$ . Sinal de controle do sistema (4.4) para diferentes condições de atraso: (d) atraso igual a  $0.1s$ ; (e) atraso igual a  $0.05s$ ; (f) atraso igual a  $0.01s$ .

Por meio deste raciocínio é possível concluir que, no deslizamento ideal, a trajetória do sistema fica confinada à superfície deslizante, gerando um novo tipo de movimento, já que esta trajetória não pertence a nenhum dos dois sistemas que estão sendo chaveados. Além disso, a frequência de chaveamento se torna infinita e o sinal de controle passa a não ser mais definido no tempo.

Neste movimento, denominado de **modo deslizante**, a trajetória do estado se desloca por uma superfície denominada de **superfície de deslizamento**, denotada por  $s(x) = 0$ . Por outro lado, no espaço de estado, o chaveamento ocorre em uma superfície denominada de **superfície de chaveamento**. Embora no caso analisado estas duas superfícies se confundam, este fato nem sempre é verdadeiro.

De modo geral, o movimento das trajetórias do sistema pode ser dividido em duas fases. Na fase de aproximação, a trajetória iniciada em qualquer lugar do plano de fase é conduzida em tempo finito para a superfície de deslizamento. Na segunda fase, o sistema entra em modo deslizante, ocorrendo uma redução na ordem dinâmica do sistema, que passa a evoluir segundo a equação da superfície de deslizamento. Para o caso analisado, no deslizamento o sistema irá ser governado pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{x}_1 = x_2 \text{ e } x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_1 = -x_1$$

Neste momento o sistema apresentará um comportamento idêntico ao de um sistema de primeira ordem, apresentando, assim, uma convergência exponencial do estado para a origem.

Outro aspecto que deve ser ressaltado é a robustez deste tipo de controlador. Se apesar das incertezas e das perturbações existentes, as trajetórias do sistema continuarem apontando em direção à superfície de deslizamento, o sistema continuará entrando em modo deslizante, apresentando o mesmo desempenho, governado pela dinâmica referente à equação da superfície deslizante.

Para ilustrar este fato considere o seguinte exemplo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0.5 \sin(x_1) - x_2 + u \\ u = -\text{sgn}(s) \\ s = x_1 + x_2 \end{cases} \quad (4.7)$$

Observando o plano de fase do sistema (4.7), apresentado na Figura 4.5, pode

ser visto que apesar da perturbação existente no sistema, as trajetórias continuam apontando na direção da superfície de deslizamento, garantindo, assim, que o sistema entre em modo deslizante. Quando em deslizamento o sistema se torna insensível à perturbação.

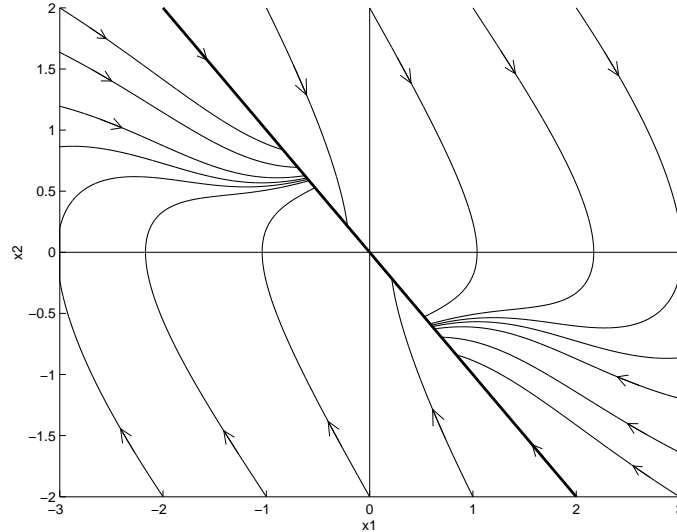


FIGURA 4.5: Plano de fase para o sistema (4.7).

### 4.2.1 Existência de Modo Deslizante

Intuitivamente, para que o sistema entre em modo deslizante, a superfície de deslizamento deve ser pelo menos localmente atrativa, i.e., deve existir um domínio envolvendo a superfície no qual as trajetórias do sistema apontem na sua direção. Este fato pode ser matematicamente expresso da seguinte forma:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0 \quad (4.8)$$

em algum domínio  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ . Neste caso a superfície de deslizamento seria:

$$\mathcal{D} = S \cap \Omega = \{x \in \Omega : s(x) = 0\}$$

A expressão dada em (4.8) é frequentemente substituída, pelo critério mais sucinto, porém equivalente, dado por:

$$\dot{s}s < 0 \quad (4.9)$$

As condições (4.8) e (4.9) são chamadas de **condições de alcançabilidade**.

Embora as condições (4.8) e (4.9) sejam freqüentemente encontradas na literatura, elas não garantem a existência de um modo deslizante ideal, já que estas condições garantem apenas que a superfície de deslizamento seja alcançada assintoticamente.

Para garantir que a superfície de deslizamento seja alcançada em tempo finito, uma condição mais restritiva deve ser satisfeita. Uma condição muito utilizada na literatura é a condição de alcançabilidade- $\eta$  dada por:

$$\dot{s}s \leq -\eta |s| \quad (4.10)$$

onde  $\eta$  é uma constante positiva.

Reescrevendo a equação (4.10) como

$$\frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt} \leq -\eta |s|$$

e integrando de 0 a  $t_s$ , segue que:

$$|s(t_s)| - |s(0)| \leq -\eta t_s$$

Deste modo, o tempo necessário para atingir a superfície  $s = 0$ , representado por  $t_s$ , satisfaz:

$$t_s \leq \frac{|s(0)|}{\eta} \quad (4.11)$$

Nos casos analisados anteriormente esta condição é satisfeita, garantindo, assim, o aparecimento do deslizamento ideal.

- Exemplo 1:

$$\begin{aligned} s &= x_1 + x_2 \\ \dot{s} &= -\text{sgn}(s) \\ s\dot{s} &\leq -|s| \end{aligned}$$

- Exemplo 2:

$$\begin{aligned} s &= x_1 + x_2 \\ \dot{s} &= 0.5 \sin(x_1) - \text{sgn}(s) \\ s\dot{s} &\leq -|s|(1 - 0.5 \sin(x_1)) \\ s\dot{s} &\leq -0.5 |s| \end{aligned} \quad (4.12)$$

## 4.3 Descrição Matemática de Modos Deslizantes

A descrição matemática de modos deslizantes não é simples, devido ao fato de que o sinal de controle descontínuo (equação (4.3)) e, conseqüentemente, o sistema (4.1), não serem definidos sobre a superfície de deslizamento. Além disso, a condição de *Lipschitz* para a existência e unicidade de solução de equações diferenciais é violada na vizinhança da superfície de chaveamento. Os métodos a seguir apresentam soluções para descrever, de maneira formal, o movimento durante o deslizamento.

### 4.3.1 Método de *Filippov*

Este método trata de forma axiomática a solução de equações diferenciais com lado direito descontínuo. Considere a seguinte equação diferencial:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (4.13)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função mensurável (no sentido de *Lebesgue*) definida para quase todo  $(t, x)$  em um domínio  $E$  do espaço de fase  $(t, x)$ .

Além disso, para qualquer subconjunto compacto  $D \subset E$ , existe uma função  $A(t)$  finita (localmente integrável) em quase todo  $(t, x)$  em  $D$ , tal que:

$$|f(t, x)| < A(t) \quad (4.14)$$

A solução da equação diferencial com lado direito descontínuo é dada pela definição a seguir, devido a (Filippov 1964, Filippov 1988).

#### **Definição 4** (*Solução no sentido de Filippov*)

Uma função vetorial  $x(\cdot)$  é denominada uma solução de (4.13), definida em  $[t_0, t_1]$  se  $x(\cdot)$  é absolutamente contínua em  $[t_0, t_1]$ , e se, para quase todo  $t \in [t_0, t_1]$ , tem-se:

$$\dot{x} \in \mathcal{K}[f(t, x)] \quad (4.15)$$

com

$$\mathcal{K}[f(t, x)] = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \text{conv}\{f[t, B(x, \delta) - N]\} \quad (4.16)$$

onde “conv” denota o fecho convexo,  $B(x, \delta)$  é uma bola de raio  $\delta$  centrada em  $x$  e  $\mu$  é a medida no sentido de *Lebesgue*. A notação  $\bigcap_{\mu N = 0}$  denota a intersecção de



todos os conjuntos  $N$  de medida nula (no sentido de Lebesgue), e  $f[t, B(x, \delta) - N]$  é o conjunto de todos os valores de  $f(t, x)$  para  $x \in \{B(x, \delta) - N\}$ .

Esta definição é interpretada da seguinte forma:

- **Interpretação de  $\mathcal{K}[f(t, x)]$**  - considere um ponto  $x^s$  da superfície de descontinuidade  $s(x) = 0$ .  $\mathcal{K}[f(t, x)]$  é o conjunto convexo mínimo que contém todos os valores de  $f(t, x)$  para  $x$  variando em quase (a menos de um conjunto de medida nula) toda uma vizinhança  $\delta$  ( $\delta \rightarrow 0$ ) do ponto  $x^s$ . Considere agora um ponto  $x^p$  que não pertença à superfície.  $\mathcal{K}[f(t, x)]$  corresponde ao próprio campo vetorial  $f(t, x^p)$ .
- **Interpretação da relação (4.15)** - esta relação, denominada de inclusão diferencial, define, de forma axiomática, que o campo vetorial da solução no sentido de *Filippov* pertence a  $\mathcal{K}[f(t, x)]$ . A possibilidade de se rejeitar qualquer conjunto de medida nula em  $\mathcal{K}[f(t, x)]$  é que permite a definição do campo vetorial na superfície de chaveamento.

Para o sistema de controle considerado (4.1) e (4.3), como  $u(x)$  é uma função do estado, o sistema em malha fechada pode ser representado por:

$$\dot{x} = \begin{cases} f^+(t, x) & \text{se } s(x) > 0 \\ f^-(t, x) & \text{se } s(x) < 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

A superfície de chaveamento  $\mathcal{S}$  particiona o espaço de estados em duas regiões mutuamente excludentes, que são denotadas por  $\mathcal{F}^+ := \{x : s(x) > 0\}$  e  $\mathcal{F}^- := \{x : s(x) < 0\}$ . A normal em um ponto  $x \in \mathcal{S}$  é denotada<sup>1</sup> por  $N_S(x)$  e os escalares<sup>2</sup>  $f_N^+(t, x) := N_S(x) \cdot f^+(t, x)$  e  $f_N^-(t, x) := N_S(x) \cdot f^-(t, x)$  indicam o sentido das projeções de  $f^+(t, x)$  e  $f^-(t, x)$  em  $N_S(x)$ , respectivamente.

Se a trajetória do sistema (4.1), iniciada em  $\mathcal{F}^+$  ou  $\mathcal{F}^-$ , atingir a superfície  $\mathcal{S}$ , i.e.,  $x(t^*) = x^* \in \mathcal{S}$ , ela pode cruzar  $\mathcal{S}$  ou ser forçada a permanecer sobre  $\mathcal{S}$ . Por exemplo, se  $f_N^+(t^*, x^*)$  e  $f_N^-(t^*, x^*)$  possuírem o mesmo sinal, i.e.,  $f_N^+ f_N^- > 0$ , então

<sup>1</sup>Por conveniência de notação, a direção positiva da normal  $N_S(x)$  será definida como sendo de  $\mathcal{F}^-$  para  $\mathcal{F}^+$ . Portanto, se o gradiente  $\nabla_x s(x) \in \mathbb{R}^n$  da superfície  $\mathcal{S}$  em  $x \in \mathcal{S}$  é direcionado de  $\mathcal{F}^-$  para  $\mathcal{F}^+$ , então  $N_S(x) = \nabla_x s(x)$  caso contrário  $N_S(x) = -\nabla_x s(x)$ .

<sup>2</sup>O produto escalar ou produto interno entre dois vetores  $u, v \in \mathbb{R}^n$  é denotado por  $u \cdot v$ , sendo igual a  $u \cdot v = u^T v = |u| |v| \cos(\theta)$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $u$  e  $v$ .

os dois vetores  $f^+(t^*, x^*)$  e  $f^-(t^*, x^*)$  apontarão para a mesma região e portanto a trajetória irá cruzar a superfície  $s(x) = 0$ . Se  $f_N^+(t^*, x^*) \leq 0$ ,  $f_N^-(t^*, x^*) \geq 0$  e  $f_N^-(t^*, x^*) - f_N^+(t^*, x^*) > 0$  os dois vetores  $f^+(t^*, x^*)$  e  $f^-(t^*, x^*)$  estarão direcionados para a superfície  $\mathcal{S}$ . Neste caso pode ser mostrado que para  $x^* \in \mathcal{S}$ , o campo vetorial  $f_0(t^*, x^*)$ , da solução no sentido de Filippov, pode ser determinado pelos campos vetoriais  $f^+(t^*, x^*)$  e  $f^-(t^*, x^*)$  que são os valores limites de  $f(t, x)$  obtidos através da aproximação da superfície  $\mathcal{S}$  a partir de  $\mathcal{F}^+$  e  $\mathcal{F}^-$  respectivamente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_0(t^*, x^*) \\ f_0(t^*, x^*) &= \alpha f^+(t^*, x^*) + (1 - \alpha) f^-(t^*, x^*), \quad \alpha \in [0, 1],\end{aligned}$$

sendo que  $\alpha$  é um escalar que depende de  $f_N^+(t^*, x^*)$  e  $f_N^-(t^*, x^*)$ , sendo definido do seguinte modo:

$$\alpha = \frac{f_N^-(t^*, x^*)}{f_N^-(t^*, x^*) - f_N^+(t^*, x^*)} \quad (4.18)$$

Note que para esta definição é fácil verificar que o campo vetorial  $f_0(t^*, x^*)$  é ortogonal ao gradiente de  $\mathcal{S}$ , sendo, portanto, tangente a superfície  $s(x) = 0$ . Deste modo, as trajetórias do sistema são forçadas a permanecer sobre a superfície de deslizamento.

A interpretação geométrica da solução de Filippov na superfície de deslizamento  $\mathcal{S}$  é apresentada na Figura 4.6. No ponto  $x^* \in \mathcal{S}$ , os vetores  $f^+$ ,  $f^-$  estão direcionados para as regiões  $\mathcal{F}^-$ ,  $\mathcal{F}^+$ , respectivamente. O vetor  $f_0$  do modo deslizante é formado pela intersecção do hiperplano tangente a  $\mathcal{S}$  em  $x^*$  com o segmento de reta que une  $f^+$  e  $f^-$ , pertencendo ao fecho convexo que contém os vetores  $f^+$  e  $f^-$ .

Até este momento foram apresentadas as condições necessárias para a existência da solução do sistema (4.13) no sentido de Filippov. Para concluir, basta mostrar as condições para as quais esta solução seja única. Se  $f^+$  e  $f^-$  forem localmente Lipschitz (em  $x$ ) nas regiões  $\mathcal{F}^+$  e  $\mathcal{F}^-$ , respectivamente; e se  $f$  for contínua por partes, uma condição suficiente para garantir unicidade da solução, a partir de um instante inicial  $t_0$ , é que pelo menos uma das desigualdades

$$f_N^- > 0, \quad f_N^+ < 0, \quad (4.19)$$

seja satisfeita para cada  $x \in \mathcal{S}$ .

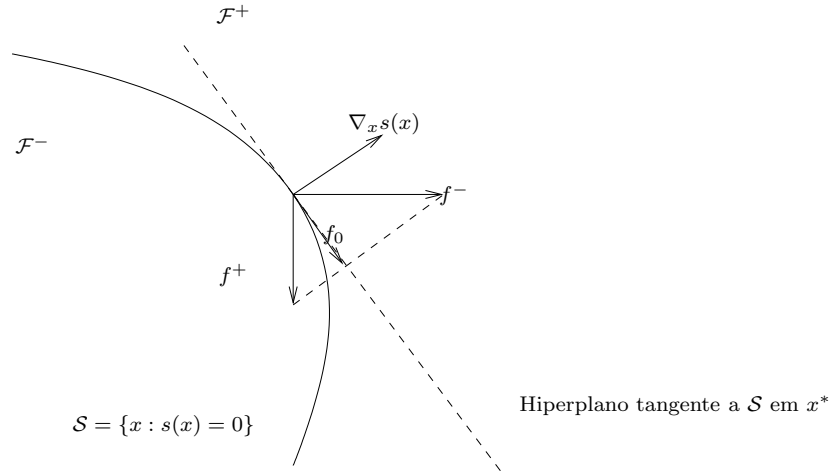


FIGURA 4.6: Interpretação geométrica da solução de Filippov.

### 4.3.2 Controle Equivalente Estendido

O *controle equivalente* em sistemas dinâmicos com modos deslizantes é usualmente definido durante a fase de deslizamento (Utkin 1978, Capítulo II). O *controle equivalente estendido* foi definido por (Hsu & Costa 1996, Definição 1.2) como uma generalização que se aplica ao movimento completo do sistema, i.e., dentro e fora da superfície de deslizamento  $s(x)=0$ .

Considere o seguinte sistema não-linear genérico, afim no controle  $u$ :

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u, \quad (4.20)$$

sujeito a uma lei de controle descontínua  $u \in \mathbb{R}^m$  que assegure deslizamento ideal na superfície de deslizamento  $s(x) = 0$ , sendo que  $s(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função continuamente diferenciável e  $g(t, x) = [g_1(t, x) \dots g_m(t, x)]$ . Os campos vetoriais  $f(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g_i(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$  são suaves. Durante o modo deslizante, as trajetórias de (4.20) são definidas no sentido de Filippov (Filippov 1964, Filippov 1988), isto é, elas são definidas como soluções satisfazendo a inclusão diferencial correspondente a (4.20), em quase todo lugar.

Seja  $x(t)$  uma solução de (4.20) definida no intervalo  $t \in [0, T)$ . Então, o *controle equivalente estendido* é uma função localmente integrável definida em quase todo o intervalo  $[0, T)$ , obtida a partir da derivada total  $\frac{d}{dt}s(x)$  e de (4.20), e é dado por

$$u_{eq}(t) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} s(x) g(x(t), t) \right]^{-1} \left[ \frac{d}{dt} s(x) - \frac{\partial}{\partial x} s(x) f(x(t), t) \right], \quad (4.21)$$

onde  $\det[\frac{\partial}{\partial x}s(x)g(x(t), t)] \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, T]$ , por hipótese. Essa expressão está bem definida uma vez que a solução  $x(t)$  é absolutamente contínua por definição e, portanto, possui derivadas para quase todo o tempo.

No sentido usual, o *controle equivalente* é definido como sendo a ação de controle necessária para manter a solução sobre a superfície de deslizamento  $s(x) = 0$ . Para determinar este controle, deve-se fazer  $\dot{s} = \frac{d}{dt}s(x) = 0$  em (4.21). Pode-se verificar que, para o caso particular em que  $f(t, x) = Ax, g(t, x) = B$  e  $s(x) = Sx$  (onde  $A, B$  e  $S$  são matrizes constantes) o controle equivalente estendido é igual a  $u_{eq} = u$ , fora da superfície  $s(x) = 0$ , e é dado pela realimentação de estados  $u_{eq} = -(SB)^{-1}SAx$ , durante o deslizamento.

## 4.4 Modos Deslizantes de Ordem Superior

A idéia básica no controle por modos deslizantes é garantir que o sistema satisfaça uma restrição apropriadamente escolhida. Para isto, o controlador deve reagir imediatamente a qualquer desvio que o sistema apresente, conduzindo-o novamente para a restrição através de um controle suficientemente intenso.

O controle por modos deslizantes, por apresentar esta característica, é muito eficaz para o controle de sistemas incertos, tendo provado sua robustez e grande acurácia com respeito a diversas perturbações internas e externas.

Entretanto, a reação intensa e imediata, ao mínimo desvio da restrição, pode provocar oscilações indesejadas de alta frequência no sistema. Este fenômeno denominado de *chattering* é um dos principais problemas deste tipo de controlador.

Recentemente proposto (Levant 1993), o controle por modos deslizantes de ordem superior (*Higher Order Sliding Modes* - HOSM) generaliza a idéia básica do controle por modos deslizantes, atuando nas derivadas temporais de ordem superior do desvio em relação à restrição, em vez de influenciar a primeira derivada do desvio, como acontece no controle por modos deslizantes convencional.

O controle por modos deslizantes de ordem superior, além de preservar as principais vantagens do controle por modos deslizantes e fornecer uma acurácia ainda maior, também possibilita a remoção do *chattering* (Fridman & Levant 2002).

O principal problema na implementação de um HOSM é o acréscimo de in-

formação requerida. De forma geral, um controlador por modos deslizantes de ordem  $r$ , para manter a restrição  $s = 0$ , necessita que os sinais  $s, \dot{s}, \dots, s^{(r-1)}$  estejam disponíveis. Este problema foi resolvido, pelo menos de forma teórica, através dos diferenciadores exatos e robustos (Robust Exact Differentiators - REDs), apresentados em (Levant 1999, Levant 2001b, Levant 2001a).

Estes diferenciadores são capazes de fornecer em tempo real derivadas exatas até a ordem  $l$ , desde que a derivada de ordem  $l + 1$  seja limitada. Na prática, devido à existência de atrasos e ruídos o diferenciador apresenta erros na estimativa das derivadas, embora possua uma performance assintoticamente ótima na presença de pequenos ruídos de medição (Levant 2003).

#### 4.4.1 Definições de Modos Deslizantes de Ordem Superior

Seja  $s$  uma função suave com respeito ao estado  $x$  do sistema dinâmico, i.e. todas as derivadas parciais de  $s$  com respeito a  $x$ , de qualquer ordem, existem e são contínuas. Se a tarefa for garantir que  $s$  seja mantida igual a zero, então a ordem do deslizamento é o número total de derivadas contínuas de  $s$  com respeito ao tempo (incluindo a derivada zero, i.e.,  $s^{(0)} = s$ ), na vizinhança do modo deslizante. Desta forma, o modo deslizante de ordem  $r$  é determinado pelas igualdades

$$s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0,$$

que formam uma condição de dimensão  $r$  no espaço de estado do sistema dinâmico.

Deve ser ressaltado que, para um deslizamento de ordem  $r$ , a derivada  $s^{(r)}$  não é uma função contínua das variáveis do espaço de estado. Logo, a ordem do deslizamento caracteriza o grau de suavidade dinâmica na vizinhança do modo deslizante. O modo deslizante convencional, no qual a maior parte dos sistemas a estrutura variável é baseada, caracteriza-se por um deslizamento de primeira ordem ( $\dot{s}$  é descontínua).

Segundo a definição, para que o modo deslizante convencional se estabeleça, a convergência deve ocorrer em tempo finito. Já no caso dos modos deslizantes de ordem superior a convergência também pode ser assintótica.

Casos triviais de HOSM assintoticamente estáveis são encontrados em diversas estratégias de controle a estrutura variável. Por exemplo, considere um VSC que

mantém a restrição  $x + \dot{x} = 0$  por meio de um modo deslizante de primeira ordem. Neste caso, existe um modo deslizante de segunda ordem assintoticamente estável com respeito a restrição  $x = 0$  na origem  $x = \dot{x} = 0$  (somente neste ponto).

No modo deslizante convencional a precisão obtida é proporcional ao intervalo de tempo entre duas medições, ou ao atraso de chaveamento<sup>3</sup>, i.e.  $|s| = O(\tau)$ . Já o modo deslizante de ordem  $r$  pode fornecer uma precisão de até a ordem  $r$  com respeito ao intervalo de medição, ou ao atraso de chaveamento, i.e.  $|s| = O(\tau^r)$ .

Embora o controle por modos deslizantes de ordem superior apresente algumas vantagens sobre o controle por modos deslizantes convencional, o fato de não existir uma condição de alcançabilidade generalizada, dificulta muito o desenvolvimento de controladores baseados em modos deslizantes de ordem superior.

## Modos Deslizantes sobre Variedades

Seja  $\mathcal{S}$  uma variedade suave. O próprio conjunto  $\mathcal{S}$  é chamado de conjunto deslizante de primeira ordem com respeito à superfície  $\mathcal{S}$ . O conjunto deslizante de segunda ordem  $\mathcal{S}_2$  é definido como sendo o conjunto de pontos  $x$ , para os quais  $\mathcal{K}[f(x)]$  esteja contido no espaço tangente  $T_x\mathcal{S}$  à variedade  $\mathcal{S}$  no ponto  $x$ .

**Definição 5** *Existe um modo deslizante de primeira (ou segunda) ordem sobre uma variedade  $\mathcal{S}$  numa vizinhança de um ponto  $x$ , se nesta vizinhança o conjunto deslizante de primeira (ou segunda) ordem for um conjunto integral, i.e. consistir de trajetórias no sentido de Filippov.*

Seja  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$ . Denote o conjunto de pontos deslizantes de segunda ordem com respeito à variedade  $\mathcal{S}$  por  $\mathcal{S}_2$ . Assuma que a própria variedade  $\mathcal{S}_2$  pode ser considerada com sendo suficientemente suave. Então a mesma construção pode ser empregada para  $\mathcal{S}_2$ . Denote o conjunto de pontos deslizantes de segunda ordem com respeito à variedade  $\mathcal{S}_2$  por  $\mathcal{S}_3$ . O conjunto  $\mathcal{S}_3$  é chamado de conjunto deslizante de terceira ordem com respeito à variedade  $\mathcal{S}$ . Continuando este processo, pode-se obter conjuntos deslizantes de qualquer ordem.

---

<sup>3</sup>Por conveniência de notação será utilizado o mesmo símbolo  $\tau$  para representar tanto o intervalo de tempo entre duas medições quanto o atraso de chaveamento.

**Definição 6** *Existe um modo deslizante de ordem  $r$  sobre uma variedade  $\mathcal{S}$  numa vizinhança de um ponto  $x \in \mathcal{S}_r$ , se nesta vizinhança o conjunto deslizante  $\mathcal{S}_r$  de ordem  $r$  for um conjunto integral, i.e. consistir de trajetórias que sejam soluções para o sistema dinâmico no sentido de Filippov.*

Para ilustrar estes conceitos, considere o seguinte exemplo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = v \\ s = x_1 + x_2 \\ v = -2\text{sgn}(\dot{s} + |s|^{1/2}\text{sgn}(s)) \end{cases} \quad (4.22)$$

Considere a variedade suave  $\mathcal{S} := \{x : x_1 + x_2 = 0\}$ . Como  $\mathcal{S}$  é um plano, o espaço tangente  $T_x\mathcal{S}$  será igual à  $\mathcal{S}$ . Desta forma, o conjunto deslizante de segunda ordem corresponde ao conjunto de pontos  $x$ , para os quais  $\mathcal{K}[f(x)]$  esteja completamente situado dentro do plano  $\mathcal{S}$ .

Considere o conjunto  $\mathcal{S}_2 := \{x : x_1 + x_2 = 0, x_3 = 0\}$ , formado pela intersecção da variedade suave  $\mathcal{S}$  com a variedade suave  $\mathcal{M} := \{x : x_3 = 0\}$ , conforme pode ser visto na figura 4.7.

Considere um ponto  $x^*$  pertencente ao conjunto  $\mathcal{S}_2$ . Para este ponto, tem-se:

$$f^+(x^*) = \begin{bmatrix} x_2^* \\ -x_2^* \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f^-(x^*) = \begin{bmatrix} x_2^* \\ -x_2^* \\ 2 \end{bmatrix}$$

Note que os vetores  $f^+(x^*)$  e  $f^-(x^*)$  pertencem ao plano  $\mathcal{S}$ . Logo o fecho convexo de Filippov  $\mathcal{K}[f(x)]$  estará completamente situado dentro do plano  $\mathcal{S}$ . Desta forma, o conjunto  $\mathcal{S}_2$  corresponde a um conjunto deslizante de segunda ordem. Como  $\mathcal{S}_2$  é um conjunto integral, pode-se concluir que existe um modo deslizante de segunda ordem sobre a variedade  $\mathcal{S}$  no conjunto  $\mathcal{S}_2$ .

### Modos Deslizantes com Respeito a Funções de Restrição

Considere que a restrição seja dada pela equação  $s(x) = 0$ , onde  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de restrição suficientemente suave. Assuma que todas as derivadas temporais ao longo das trajetórias  $s, \dot{s}, \ddot{s}, \dots, s^{(r-1)}$  sejam funções contínuas das variáveis de

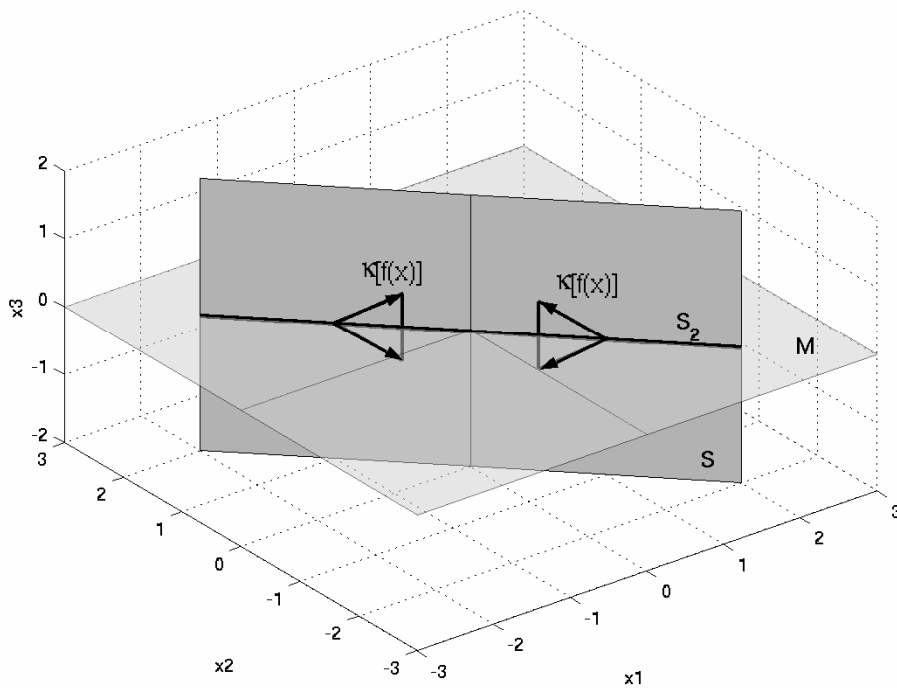


FIGURA 4.7: Exemplo de um modo deslizante de segunda ordem.

estado do sistema em malha fechada. Então o conjunto deslizante de ordem  $r$  é determinado pelas seguintes igualdades:

$$s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots s^{(r-1)} = 0 \quad (4.23)$$

**Definição 7** *Seja o conjunto deslizante de ordem  $r$  não vazio, e assuma que ele seja localmente um conjunto integral no sentido de Filippov (i.e. consiste de trajetórias de Filippov do sistema dinâmico descontínuo). Então o movimento resultante, satisfazendo a restrição (4.23) é chamado de modo deslizante de ordem  $r$  com respeito à função de restrição  $s$  (ver Figura 4.8 (Levant 2003)).*

Suponha que  $s, \dot{s}, \ddot{s}, \dots, s^{(r-1)}$  sejam funções diferenciáveis de  $x$  e que

$$\text{posto}([\nabla_x s, \nabla_x \dot{s}, \dots, \nabla_x s^{(r-1)}]) = r \quad (4.24)$$

A igualdade (4.24) em conjunto com o requerimento que as correspondentes derivadas de  $s$  sejam funções diferenciáveis de  $x$  formam uma condição chamada de **condição de regularidade de deslizamento de ordem  $r$** . Se esta condição for satisfeita, então o conjunto deslizante de ordem  $r$  será uma variedade diferenciável (ver Teorema B.1) e a Definição 7 será equivalente à Definição 6.



**Proposição 4.1** *Considere que a condição de regularidade (4.24) seja satisfeita e que a variedade deslizante de ordem  $r$  não seja vazia. Então um modo deslizante de ordem  $r$  com respeito a função de restrição  $s$  existe se e somente se a intersecção do fecho convexo de Filippov com o espaço tangente à variedade (4.23) não for vazia para qualquer ponto de deslizamento de ordem  $r$ .*

*Prova: ver (Levant 2003).* ■

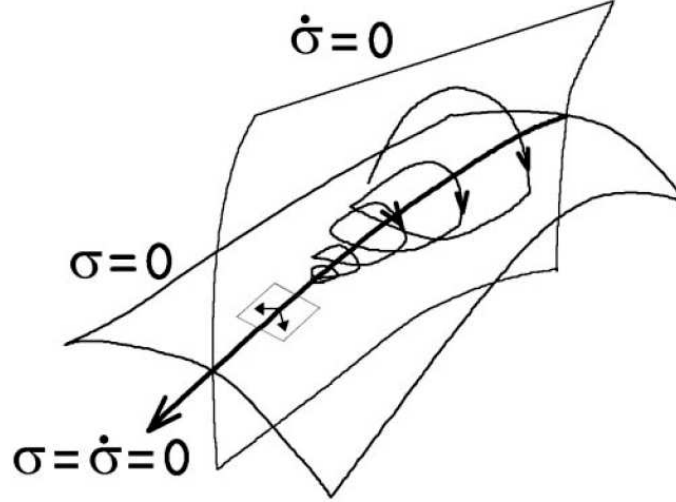


FIGURA 4.8: Modo deslizante de segunda ordem com respeito a função de restrição  $\sigma$

Um modo deslizante é chamado de estável, se o conjunto deslizante integral correspondente for estável.

Para ilustrar estes conceitos, considere o sistema (4.22). Derivando-se  $s(x)$  com respeito ao tempo ao longo das trajetórias de (4.22), obtém-se:

$$\dot{s}(x) = x_3$$

Portanto,  $s(x)$  e  $\dot{s}(x)$  são funções diferenciáveis de  $x$ . O conjunto deslizante de segunda ordem, determinado pelas igualdades  $s(x) = \dot{s}(x) = 0$ , é dado por  $\mathcal{S}_2 := \{x : x_1 + x_2 = 0, x_3 = 0\}$ , ver Figura 4.7.

Como a condição de regularidade é satisfeita

$$\text{posto}([\nabla_x s, \nabla_x \dot{s}]) = \text{posto} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2$$

as variedades  $\mathcal{S} = \{x : s(x) = 0\}$ ,  $\mathcal{M} = \{x : \dot{s}(x) = 0\}$  e  $\mathcal{S}_2 = \{x : s(x) = \dot{s}(x) = 0\}$  são variedades suaves, conforme pode ser verificado através do Teorema B.1. Neste caso,  $\mathcal{S}_2$  é uma reta no espaço tridimensional, sendo, portanto, uma variedade suave de dimensão 1.

O espaço tangente  $T_x\mathcal{S}_2$  é igual à  $\mathcal{S}_2$ , já que  $\mathcal{S}_2$  é uma reta. Como para qualquer ponto  $x$  pertencente a  $\mathcal{S}_2$ , a intersecção do fecho convexo de Filippov com o espaço tangente  $T_x\mathcal{S}_2$  não é vazia, de acordo com a Proposição 4.1, existe um modo deslizante de segunda ordem com respeito a função de restrição  $s$ , ou de forma equivalente, existe um modo deslizante de segunda ordem sobre a variedade  $\mathcal{S}$  no conjunto  $\mathcal{S}_2$ .

**Observação 4.1** *As definições acima também incluem casos triviais de variedades integrais em sistemas que não possuam descontinuidades. Para excluir estes casos, pode-se, por exemplo, chamar um modo deslizante de “não trivial” se o conjunto de velocidades admissíveis de Filippov  $\mathcal{K}[f(x)]$  correspondente consistir de mais de um vetor.*

**Observação 4.2** *As definições acima podem ser facilmente estendidas para incluir o caso de equações diferenciais não autônomas por meio da introdução do estado fictício  $\dot{t} = 1$ , com condição inicial  $t(0) = t_0$ . Note que isto difere levemente da definição de Filippov, considerando tempo e coordenadas de estado separadamente.*

## 4.4.2 Controlador por Modos Deslizantes de Segunda Ordem

Dentre os diferentes controladores por modos deslizantes conhecidos pode-se destacar: Controlador Sub-Ótimo (Bartolini, Ferrara & Usai 1998, Bartolini, Pisano & Usai 2001), Controlador Twisting (Emelyanov, Korovin & Levantovsky 1986, Levant 1993, Emelyanov & Korovin 2000, Fridman & Levant 2002), Controlador com uma Lei de Convergência Pré-Estabelecida (Emelyanov et al. 1986, Levant 1993, Fridman & Levant 2002), Controlador Super-Twisting (Levant 1998, Fridman & Levant 2002). Nesta seção serão apresentados alguns exemplos de controladores por modos deslizantes de segunda ordem.

## Controlador Sub-Ótimo

Este controlador proposto em (Bartolini et al. 1998) foi inspirado no problema de controle em tempo mínimo de um duplo integrador. Ele foi desenvolvido como sendo uma implementação sub-ótima deste controlador clássico.

Considere o seguinte sistema auxiliar:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = H(z_1, z_2) + d(z_1, z_2)w(t) \end{cases} \quad (4.25)$$

no qual  $H(z_1, z_2)$  e  $d(z_1, z_2)$  são funções incertas e  $z_2$  é um sinal não mensurável do sistema. As seguintes hipóteses são feitas sobre o sistema:

**Hipótese 4.1** *Assume-se que as funções  $H(z_1, z_2)$  e  $d(z_1, z_2)$  sejam uniformemente limitadas e que a função  $d(z_1, z_2)$  seja positiva. Desta forma, é requerido que as seguintes condições sejam satisfeitas, para algumas constantes positivas  $D_1, D_2, H$ :*

$$\begin{cases} |H(z_1, z_2)| \leq H \\ 0 < D_1 \leq |d(z_1, z_2)| \leq D_2 \end{cases} \quad (4.26)$$

**Hipótese 4.2** *Assume-se que os valores extremos de  $z_1(t)$ , denominados de  $z_M$ , possam ser obtidos com precisão ideal.*

O objetivo do controlador é manter o sistema confinado na região formada por arcos parabólicos limites (ver figura 4.9), de forma que as variáveis  $z_1(t)$  e  $z_2(t)$  converjam para zero em tempo finito. Para isto, o seguinte algoritmo é utilizado:

### Algoritmo 1:

1. Escolha  $\alpha^* \in (0, 1] \cap (0, 3D_1/D_2)$

2. Faça  $z_M = z_1(0)$

3.

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha^*, & \text{se } (z_1(t) - \frac{z_M}{2})(z_M - z_1(t)) > 0 \\ 1, & \text{se } (z_1(t) - \frac{z_M}{2})(z_M - z_1(t)) \leq 0 \end{cases}$$

4. Se  $z_1(t)$  é um valor extremo, então  $z_M = z_1(t)$

5. Aplique a seguinte lei de controle:

$$w(t) = -\alpha(t)U_M \operatorname{sgn}\left(z_1(t) - \frac{z_M}{2}\right)$$

onde:

$$U_M > \max\left(\frac{H}{\alpha^* D_1}; \frac{4H}{3D_1 - \alpha^* D_2}\right)$$

6. Retorne ao passo 3

O resultado de convergência para esta estratégia de controle é apresentado no Teorema a seguir.

**Teorema 4.1** *Considere o sistema (4.25). Se as hipóteses 4.1 e 4.2 forem satisfeitas, então a estratégia de controle definida no Algoritmo 1 garante que o sistema converge em tempo finito para a origem.*

*Prova: ver (Bartolini et al. 1998)*

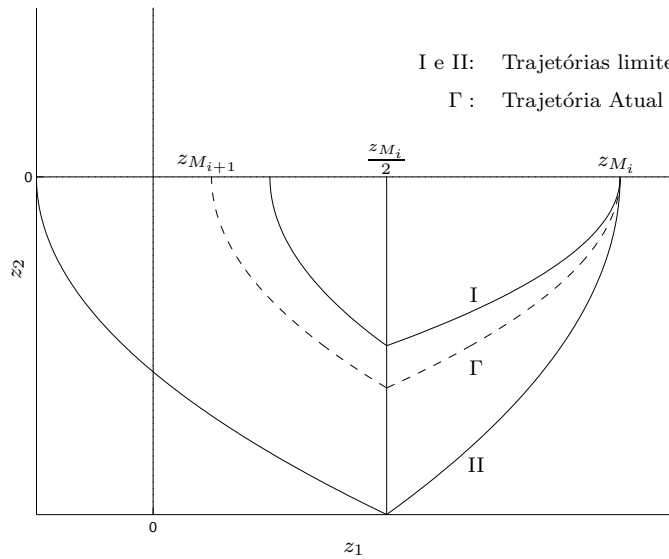


FIGURA 4.9: Idéia do controlador sub-ótimo.

A prova deste teorema consiste, basicamente, em mostrar que a propriedade de contração  $|z_{M_{i+1}}| < |z_{M_i}|$  é válida para a trajetória II (ver figura 4.9), que representa o pior caso em termos de convergência do sistema, e que esta convergência ocorre em tempo finito.

Uma extensão desta estratégia de controle foi apresentada em (Bartolini et al. 2001) para que o algoritmo pudesse ser aplicado para uma classe mais abrangente de sistemas.

O algoritmo do controlador sub-ótimo requer que os valores de pico da variável de deslizamento  $z_1 = s$  possam ser detectados com uma precisão ideal. Entretanto, na prática esta condição não pode ser satisfeita. Na verdade, o que pode ser feito é uma estimativa destes valores, o que seria equivalente a se estimar os momentos nos quais a derivada  $z_2 = \dot{s}$  se anula. Por este motivo, o valor do sinal de controle  $u$  depende na verdade do histórico das medições de  $s$  e  $\dot{s}$ , i.e. de  $s(\cdot)$  e  $\dot{s}(\cdot)$ , conforme foi observado em (Levant 2003).

### Controlador Super-Twisting

Este controlador foi desenvolvido para evitar o problema de *chattering* em sistemas com grau relativo  $\rho = 1$ , sendo caracterizado por um movimento em espiral ao redor da origem no plano de fase  $(s-\dot{s})$ , conforme pode ser visto na figura 4.10.

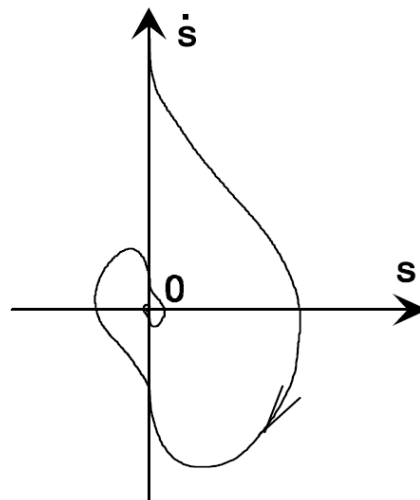


FIGURA 4.10: Trajetórias do controlador Super-Twisting.

A principal vantagem deste controlador com relação a outros controladores de segunda ordem reside no fato de que o controlador *Super-Twisting* não necessita de nenhuma informação sobre a derivada temporal da variável de deslizamento. Além disso, por ser extremamente robusto este controlador pode ser usado com sucesso no problema de diferenciação exata e robusta em tempo real (Levant 1998).

Considere o seguinte sistema com grau relativo  $\rho = 1$ :

$$\dot{x} = a(t) + bu \quad (4.27)$$

no qual  $x \in \mathbb{R}$  é o estado,  $a(\cdot) \in \mathbb{R}$  é uma função suficientemente suave e  $b$  é uma constante positiva. Considere que a função  $a(\cdot)$  e a constante  $b$  sejam incertas e assumamos que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas:

$$|\dot{a}| \leq C; \quad 0 < K_m \leq b \leq K_M; \quad (4.28)$$

sendo que  $C$ ,  $K_m$  e  $K_M$  são constantes positivas.

Se o sinal de controle puder ser ilimitado, o controlador Super-Twisting pode ser definido da seguinte forma simplificada:

$$\begin{cases} u &= -\lambda |x|^{1/2} \operatorname{sgn}(x) + u_1 \\ \dot{u}_1 &= -\alpha \operatorname{sgn}(x) \end{cases} \quad (4.29)$$

**Teorema 4.2** *Considere o sistema (4.27). Assuma que as condições (4.28) sejam válidas. Se  $\alpha > C/K_m$  e se  $\lambda$  for suficientemente grande, então o controlador (4.29) garante, para quaisquer condições iniciais, a existência de um modo deslizante de segunda ordem  $x = \dot{x} = 0$ , atraindo as trajetórias em um tempo finito.*

*Prova: ver (Levant 1998, Emelyanov & Korovin 2000)* ■

Substituindo (4.29) em (4.27), tem-se:

$$\dot{x} = a(t) - b\lambda |x|^{1/2} \operatorname{sgn}(x) + bu_1 \quad (4.30)$$

$$\dot{u}_1 = -\alpha \operatorname{sgn}(x) \quad (4.31)$$

Utilizando a identidade  $\frac{d}{dt}|x| = \dot{x} \operatorname{sgn}(x)$  e diferenciando a equação (4.30), o seguinte resultado pode ser obtido para  $x \neq 0$ :

$$\ddot{x} = \dot{a} - b\frac{1}{2}\lambda \frac{\dot{x}}{|x|^{1/2}} - b\alpha \operatorname{sgn}(x) \quad (4.32)$$

Deve ser destacado que de acordo com a Teoria de Filippov (Filippov 1964, Filippov 1988), valores pertencentes a conjuntos de medida nula podem ser descartados. Desta forma, a solução é bem definida para quaisquer condições iniciais  $x(t_0)$  e  $\dot{x}(t_0)$  e para qualquer  $t > t_0$ .

Para entender o comportamento qualitativo do sistema, a equação (4.32) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\ddot{x} + b\frac{1}{2}\lambda \frac{\dot{x}}{|x|^{1/2}} = -b \left( \alpha \operatorname{sgn}(x) - \frac{1}{b} \dot{a} \right) \quad (4.33)$$

O sistema (4.33) pode ser interpretado como sendo um simples sistema mecânico amortecido controlado por um relé com função de modulação  $\varrho = \alpha$  e sujeito a uma perturbação de entrada  $\dot{a}(t)$ . A constante  $b$  pode ser interpretada como sendo o inverso da massa do sistema  $b = 1/M$ . A função de modulação é projetada de forma a rejeitar a perturbação de entrada. O amortecimento seria representado pela seguinte função não-linear:

$$b\frac{1}{2}\lambda\frac{\dot{x}}{|x|^{1/2}}$$

Analisando esta função é possível perceber que a força de amortecimento é inversamente proporcional a  $|x|^{1/2}$ . Desta forma, à medida que a posição se aproxima de zero, o amortecimento vai crescendo indefinidamente. Por este raciocínio é possível ter uma noção intuitiva da convergência em tempo finito das trajetórias para a origem do plano  $x-\dot{x}$ .

A prova do Teorema 4.2 é similar à prova do Teorema 4.1. A idéia principal é mostrar uma propriedade de contração, considerando uma curva limite que envolve a trajetória real.

Qualquer solução de (4.32), satisfaz a seguinte inclusão diferencial:

$$\ddot{x} \in -[K_m, K_M]\frac{1}{2}\lambda\frac{\dot{x}}{|x|^{1/2}} - [K_m\alpha - C, K_M\alpha + C]\text{sgn}(x) \quad (4.34)$$

Considere que num instante inicial  $t_0$ , o sistema possua as seguintes condições iniciais:  $x(t_0) = 0$  e  $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 > 0$  (ver Figura 4.11). Neste caso, qualquer trajetória  $\Gamma$  de (4.34) se situa entre as trajetórias limites I e II, definidas por:

$$\text{Trajetória I:} \quad \ddot{x} = -K_m\frac{1}{2}\lambda\frac{\dot{x}}{|x|^{1/2}} - (K_m\alpha - C)\text{sgn}(x)$$

$$\text{Trajetória II:} \quad \ddot{x} = -K_M\frac{1}{2}\lambda\frac{\dot{x}}{|x|^{1/2}} - (K_M\alpha + C)\text{sgn}(x)$$

Analisando a equação (4.32), pode ser verificado que se  $x > 0$ ,  $\dot{x} > 0$ , a trajetória real  $\Gamma$  do sistema é confinada pelos eixos  $\dot{x}$ ,  $x$  e pelo segmento C1, definido por:  $\ddot{x} = -(K_m\alpha - C)$ , conforme pode ser visto na Figura 4.11. Seja  $x_M$  a intersecção deste segmento com o eixo  $x$ . Resolvendo analiticamente a equação  $\ddot{x} = -(K_m\alpha - C)$  em função de  $x$  e  $\dot{x}$ , tem-se:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2(t) - \frac{1}{2}\dot{x}^2(t_0) = -(K_m\alpha - C)x(t) + (K_m\alpha - C)x(t_0)$$

Deste modo, é fácil verificar que:

$$x_M = \frac{\dot{x}_0^2}{2(K_m\alpha - C)} \quad (4.35)$$

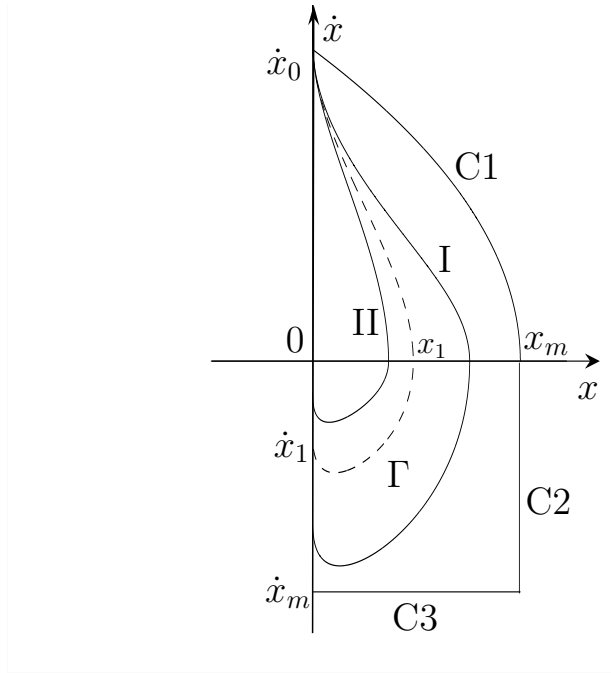


FIGURA 4.11: Trajetórias do controlador Super-Twisting: I e II: trajetórias limites;  $\Gamma$ : trajetória real; C1, C2 e C3: curvas majorantes.

Conforme pode ser observado na Figura 4.11, no quarto quadrante a trajetória real  $\Gamma$  parte de um ponto inicial  $x = x_1$ ,  $\dot{x} = 0$ . Como inicialmente  $\ddot{x} < 0$ , o sinal  $\dot{x}(t)$  será negativo e seu módulo crescerá até que  $\ddot{x} \geq 0$ . Desta forma, o sinal  $x(t)$  que é positivo irá decrescer, de modo que seu valor máximo é alcançado no ponto inicial. Para  $x > 0$  e  $\dot{x} < 0$  a equação (4.32), pode ser reescrita como:

$$\ddot{x} = b \frac{1}{2} \lambda \frac{|\dot{x}|}{x^{1/2}} - b \left( \alpha - \frac{1}{b} \dot{a} \right)$$

Considerando o pior caso em termos de convergência, o módulo da abscissa  $\dot{x}$  irá crescer enquanto a seguinte condição for válida:

$$|\dot{x}| < \frac{2}{\lambda} \left( \alpha + \frac{C}{K_m} \right) x^{1/2} \Rightarrow \ddot{x} < 0$$

Seja  $\dot{x}_M$  o menor valor assumido por  $\dot{x}$ . O pior caso, claramente, ocorre se  $x_1 = x_M$ . Desta forma, uma estimativa bem conservativa para  $\dot{x}_M$  é dada por:

$$\dot{x}_M = -\frac{2}{\lambda} \left( \alpha + \frac{C}{K_m} \right) x_M^{1/2} \quad (4.36)$$

Portanto, uma curva majorante que envolve a trajetória real  $\Gamma$ , pode ser obtida do



seguinte modo (ver Figura 4.11):

$$\begin{aligned} \text{Segmento C1:} \quad \dot{x}^2 &= 2(K_m\alpha - C)(x_M - x), & \text{para } \dot{x} > 0 \\ \text{Segmento C2:} \quad x &= x_M, & \text{para } \dot{x}_M < \dot{x} < 0 \\ \text{Segmento C3:} \quad \dot{x} &= \dot{x}_M, & \text{para } 0 < x < x_M \end{aligned}$$

A condição  $|\dot{x}_M/\dot{x}_0| < 1$  é suficiente para a convergência do algoritmo. Substituindo a igualdade (4.35) em (4.36), pode-se verificar que esta condição é satisfeita, se as seguintes desigualdades forem válidas:

$$\frac{2(K_m\alpha + C)^2}{\lambda^2 K_m^2 (K_m\alpha - C)} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda > \sqrt{\frac{2}{(K_m\alpha - C)} \frac{(K_m\alpha + C)}{K_m}}$$

Estendendo a trajetória  $\Gamma$ , obtém-se uma seqüência de valores  $\dot{x}_0, \dot{x}_1, \dots$  que correspondem a intersecções de  $\Gamma$  com o eixo  $\dot{x}$ . Usando argumentos de simetria, pode-se mostrar que a seguinte condição é satisfeita (Levant 1998, Emelyanov & Korovin 2000):

$$\left| \frac{\dot{x}_{i+1}}{\dot{x}_i} \right| \leq K < 1$$

sendo que  $K$  é uma constante positiva. Logo,  $\dot{x}_i$  converge para zero numa progressão geométrica. Além disso, a convergência ocorre num tempo finito, que pode ser estimado por:

$$T \leq \frac{1}{K_m\alpha - C} \sum_{i=0}^{\infty} |\dot{x}_i|$$

### 4.4.3 Controlador por Modos Deslizantes de Ordem Arbitrária

O objetivo é obter uma lei de controle descontínua que garanta o aparecimento de um modo deslizante de ordem  $r$  num tempo finito.

Considere sistemas de controle com grau relativo  $\rho = r$ , bem definido e constante em todo o espaço de estado:

$$\begin{cases} \dot{x} &= a(t, x) + b(t, x)u \\ \sigma &= s(t, x) \end{cases} \quad (4.37)$$

sendo que  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u \in \mathbb{R}$  é o sinal de controle,  $\sigma \in \mathbb{R}$  é uma variável de deslizamento medida,  $a : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $s : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves e incertas. Embora a dimensão do sistema seja desconhecida, o grau relativo é suposto como sendo conhecido.

O objetivo é garantir que a restrição  $\sigma = 0$  seja satisfeita num tempo finito, e que seja mantida exata através de uma realimentação. No controle por modos deslizantes convencional ( $r = 1$ ), este objetivo é alcançado através da seguinte lei de controle:

$$u = -k\text{sgn}(\sigma)$$

Como o conceito de modos deslizantes de ordem superior é uma generalização do conceito de modos deslizantes convencional, seria apropriado que o controle por modos deslizantes de ordem arbitrária fosse uma generalização do controle por modos deslizantes convencional.

Como o sistema possui grau relativo  $\rho = r$  o sinal de controle só aparece explicitamente na derivada de ordem  $r$  de  $\sigma$ , i.e.

$$\frac{\partial \sigma^{(i)}}{\partial u} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, r-1), \quad \frac{\partial \sigma^{(r)}}{\partial u} \neq 0$$

Deste modo, a saída  $\sigma$ , satisfaz a seguinte equação:

$$\sigma^{(r)} = h(t, x) + g(t, x)u \quad (4.38)$$

onde  $h(t, x) = \sigma^{(r)}|_{u=0}$  e  $g(t, x) = \frac{\partial \sigma^{(r)}}{\partial u}$ .

**Hipótese 4.3** *Assume-se que as funções  $h(t, x)$  e  $g(t, x)$  são uniformemente limitadas e que a função  $g(t, x)$  é positiva. Desta forma, é requerido que para algumas constantes positivas  $K_m, K_M, H$  as seguintes condições sejam satisfeitas:*

$$\begin{cases} |h(t, x)| \leq H \\ 0 < K_m \leq |g(t, x)| \leq K_M \end{cases} \quad (4.39)$$

Considere o seguinte controlador, para plantas de grau relativo  $\rho = r$ , proposto inicialmente em (Levant 2001b, Levant 2003).

$$u = -\alpha \text{sgn}(\phi_{r-1,r}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)})) \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \phi_{0,r} &= \sigma \\ \phi_{1,r} &= \dot{\sigma} + \beta_1 N_{1,r} \text{sgn}(\sigma) \\ \phi_{i,r} &= \sigma^{(i)} + \beta_i N_{i,r} \text{sgn}(\phi_{i-1,r}), \quad i = 1, \dots, r-1 \\ N_{1,r} &= |\sigma|^{(r-1)/r} \\ N_{i,r} &= \left( |\sigma|^{p/r} + |\dot{\sigma}|^{p/(r-1)} + \dots + |\sigma^{(i-1)}|^{p/(r-i+1)} \right)^{(r-i)/p}, \quad i = 1, \dots, r-1 \\ N_{r-1,r} &= \left( |\sigma|^{p/r} + |\dot{\sigma}|^{p/(r-1)} + \dots + |\sigma^{(r-2)}|^{p/2} \right)^{1/p} \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde  $p \geq r$  e  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, r - 1$  são constantes positivas.

**Teorema 4.3** *Considere que o sistema (4.37) possua grau relativo  $\rho = r$  com respeito a função de saída  $\sigma$  e que a hipótese 4.3 seja satisfeita. Então, para parâmetros  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$  escolhidos apropriadamente o controlador*

$$u = -\alpha \operatorname{sgn}(\phi_{r-1,r}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}))$$

*garante o aparecimento de um modo deslizante de ordem  $r$  ( $\sigma \equiv 0$ ), atraindo as trajetórias em tempo finito.*

*Prova: ver (Levant 2003)*

Os parâmetros positivos  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$  devem ser escolhidos suficientemente grandes na ordem dos índices. Cada escolha determina uma família de controladores aplicáveis para todos os sistemas representados por (4.37) com grau relativo  $\rho = r$  que satisfaçam a hipótese 4.3. O parâmetro  $\alpha > 0$  deve ser escolhido especificamente para cada conjunto  $H$ ,  $K_m$  e  $K_M$  de um determinado sistema.

Certamente o número de escolhas de  $\beta_i$  é infinito. Aqui serão mostrados alguns exemplos com  $\beta_i$  testados para  $r \leq 4$  e para  $p$  definido como sendo o mínimo múltiplo comum de  $1, 2, \dots, r$ .

1.  $u = -\alpha \operatorname{sgn}(\sigma)$
2.  $u = -\alpha \operatorname{sgn}(\dot{\sigma} + |\sigma|^{1/2} \operatorname{sgn}(\sigma))$
3.  $u = -\alpha \operatorname{sgn} \left\{ \ddot{\sigma} + 2(|\dot{\sigma}|^3 + |\sigma|^2)^{1/6} \operatorname{sgn} \left[ \dot{\sigma} + |\sigma|^{2/3} \operatorname{sgn}(\sigma) \right] \right\}$
4.  $u = -\alpha \operatorname{sgn}(\sigma^{(3)} + 3(|\ddot{\sigma}|^6 + |\dot{\sigma}|^4 + |\sigma|^3)^{1/12} \operatorname{sgn} \{ \ddot{\sigma} + (|\dot{\sigma}|^4 + |\sigma|^3)^{1/6} \operatorname{sgn}[\dot{\sigma} + 0.5 |\sigma|^{3/4} \operatorname{sgn}(\sigma)] \})$

A idéia do controlador é que um deslizamento de primeira ordem é estabelecido nas partes suaves do conjunto descontínuo  $\Gamma$  de (4.40) (ver Figuras 4.12 e 4.13). Este modo deslizante é descrito pela equação diferencial  $\phi_{r-1,r} = 0$ , que por sua vez possibilita o aparecimento de um modo deslizante de primeira ordem  $\phi_{r-2,r} = 0$ . Entretanto o modo deslizante primário desaparece no momento no qual o modo secundário está para aparecer. O movimento resultante se dá numa vizinhança de um subconjunto cilíndrico de  $\Gamma$  que satisfaz  $\phi_{r-2,r} = 0$ , transferindo as trajetórias

em um tempo finito para uma vizinhança do conjunto que satisfaz  $\phi_{r-3,r} = 0$  e assim por diante. Enquanto as trajetórias se aproximam do conjunto deslizante de ordem  $r$ , o conjunto  $\Gamma$  se retrai para a origem nas coordenadas  $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ , de modo que um modo deslizante do ordem  $r$  seja estabelecido:

$$\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$$

O conjunto  $\Gamma$  para  $r = 3$  é mostrado na figura 4.13.

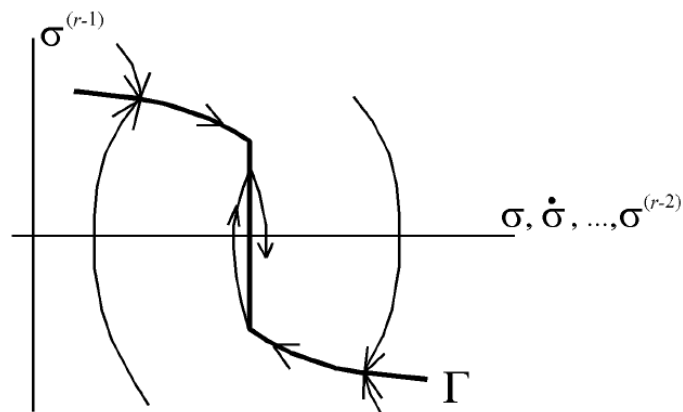


FIGURA 4.12: Idéia do controlador por modos deslizantes de ordem  $r$ .

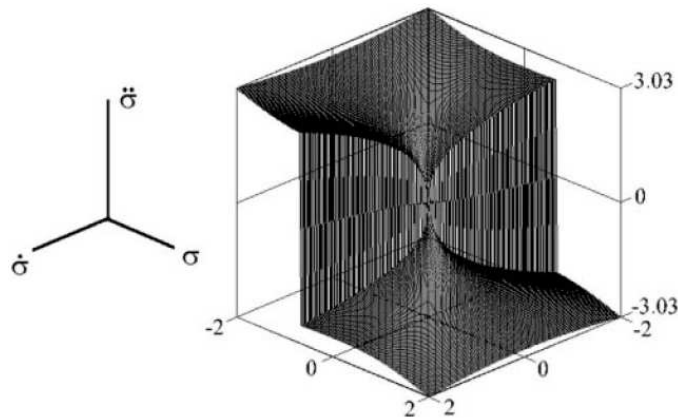


FIGURA 4.13: Conjunto de descontinuidade  $\Gamma$  para o controlador por modos deslizantes de ordem 3.

## 4.5 Diferenciador Robusto e Exato (RED)

A diferenciação de sinais em tempo real é um problema antigo e bem conhecido. Um diferenciador ideal deveria ser capaz de fornecer como saída a derivada exata de qualquer sinal de entrada. Entretanto, na prática, como os sinais são corrompidos por ruídos de alta frequência, que possuem derivadas com amplitudes muito elevadas, seria impossível para estes diferenciadores fornecerem uma estimativa razoável da derivada do sinal base de interesse.

Desta forma, o objetivo é encontrar um diferenciador capaz não só de fornecer a derivada exata para uma classe de sinais de entrada, mas também de rejeitar pequenos ruídos de alta frequência.

A maior parte dos diferenciadores conhecidos fornecem estimativas muito próximas das derivadas dos sinais de entrada, além de serem capazes de rejeitar parcialmente a presença de ruídos de alta frequência. No entanto, estes diferenciadores não são capazes de fornecer derivadas exatas na ausência de ruídos. Deste modo, estes diferenciadores são robustos, mas não são exatos.

Considere a seguinte classe de sinais de entrada: seja o sinal de entrada  $f(t)$  uma função definida em  $[0, \infty)$  constituída por um sinal base  $f_0(t)$  desconhecido, cuja derivada de ordem  $n$  possua constante de Lipschitz  $C_{n+1}$ , e por um ruído aditivo mensurável (no sentido de Lebesgue) e limitado com demais propriedades estocásticas desconhecidas.

Para esta classe de sinais foi provado em (Levant 1998) que a melhor acurácia possível obtida por um diferenciador para a derivada de ordem  $i$  é proporcional a

$$C_{n+1}^{i/(n+1)} \varepsilon^{(n-i+1)/(n+1)}, \quad i = 0, \dots, n$$

sendo que  $C_{n+1}$  é a constante de Lipschitz da derivada de ordem  $n$  e  $\varepsilon$  é a magnitude máxima do ruído de medição.

O problema é encontrar estimativas em tempo real de  $\dot{f}_0(t), \ddot{f}_0(t), \dots, f_0^{(n)}(t)$  que sejam robustas na presença de ruídos de medição, sendo exatas na sua ausência.

### 4.5.1 Diferenciador de Primeira Ordem

Considere o seguinte sistema auxiliar:

$$\dot{z} = v \tag{4.42}$$

Defina a variável de erro  $e = z - f_0$ . O objetivo é manter  $e = 0$  num modo deslizante de segunda ordem. Desta forma  $e = \dot{e} = 0$ , o que implica que  $z = f_0$  e  $v = \dot{f}_0$ . O sistema pode ser reescrito do seguinte modo:

$$\dot{e} = -\dot{f}_0(t) + v, \quad \left| \ddot{f}_0(t) \right| \leq C_2, \forall t \quad (4.43)$$

Para resolver este problema o seguinte controlador Super-Twisting pode ser utilizado:

$$\begin{cases} v = -\lambda |e|^{1/2} \operatorname{sgn}(e) + z_1 \\ \dot{z}_1 = -\alpha \operatorname{sgn}(e) \end{cases} \quad (4.44)$$

Deste modo, o diferenciador de primeira ordem, apresentado em (Levant 1998), assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{z} = v, & v = -\lambda |z - f(t)|^{1/2} \operatorname{sgn}(z - f(t)) + z_1 \\ \dot{z}_1 = -\alpha \operatorname{sgn}(z - f(t)) \end{cases} \quad (4.45)$$

onde  $v$  e  $z_1$  podem ser usados como saída do diferenciador e  $f(t)$  é o sinal de entrada. Se os parâmetros  $\lambda$  e  $\alpha$  forem ajustados adequadamente, então as seguintes igualdades são válidas após um tempo finito e na ausência de ruído:

$$z = f_0, \quad z_1 = v = \dot{f}_0$$

## 4.5.2 Diferenciadores de Ordem Arbitrária

O diferenciador de primeira ordem, proposto em (Levant 1998), foi recentemente generalizado para o caso arbitrário, sendo descrito por (Levant 2003):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\zeta}_0 = v_0, \\ v_0 = -\lambda_0 |\zeta_0 - f(t)|^{n/(n+1)} \operatorname{sgn}(\zeta_0 - f(t)) + \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 = v_1, \\ v_1 = -\lambda_1 |\zeta_1 - v_0|^{(n-1)/n} \operatorname{sgn}(\zeta_1 - v_0) + \zeta_2 \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_i = v_i, \\ v_i = -\lambda_i |\zeta_i - v_{i-1}|^{(n-i)/(n-i+1)} \operatorname{sgn}(\zeta_i - v_{i-1}) + \zeta_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{n-1} = v_{n-1}, \\ v_{n-1} = -\lambda_{n-1} |\zeta_{n-1} - v_{n-2}|^{1/2} \operatorname{sgn}(\zeta_{n-1} - v_{n-2}) + \zeta_n \\ \dot{\zeta}_n = -\lambda_n \operatorname{sgn}(\zeta_n - v_{n-1}) \end{array} \right. \quad (4.46)$$

sendo que os parâmetros  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são constantes positivas e  $f(t)$  é o sinal de entrada. É possível verificar que o diferenciador apresentado em (4.46) pode ser expresso na seguinte forma não recursiva:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\zeta}_0 = -\kappa_0 |\zeta_0 - f(t)|^{n/(n+1)} \operatorname{sgn}(\zeta_0 - f(t)) + \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 = -\kappa_1 |\zeta_0 - f(t)|^{(n-1)/(n+1)} \operatorname{sgn}(\zeta_0 - f(t)) + \zeta_2 \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_i = -\kappa_i |\zeta_0 - f(t)|^{(n-i)/(n+1)} \operatorname{sgn}(\zeta_0 - f(t)) + \zeta_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_n = -\kappa_n \operatorname{sgn}(\zeta_0 - f(t)) \end{array} \right. \quad (4.47)$$

para algumas constantes  $\kappa_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , calculadas com base em  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ .

O Teorema a seguir mostra a propriedade de convergência em tempo finito do diferenciador (4.46).

**Teorema 4.4** *Considere o diferenciador (4.46) de ordem  $n$ . Seja o sinal de entrada  $f_0(t)$  uma função definida em  $[0, \infty)$ , cuja derivada de ordem  $n$  possua uma constante de Lipschitz  $C_{n+1} > 0$  conhecida. Se as constantes  $\lambda_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  forem escolhidas apropriadamente, então as seguintes igualdades são satisfeitas após um processo transiente de tempo finito e na ausência de ruídos.*

$$\zeta_0 = f_0(t); \quad \zeta_i = v_{i-1} = f_0^{(i)}(t), \quad i = 1, \dots, n$$

*Prova: ver (Levant 2003)*

A partir deste Teorema é possível concluir que as igualdades  $\zeta_i = f_0^{(i)}$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$  são mantidas num modo deslizante de ordem superior.

O sistema (4.46) é homogêneo, suas trajetórias são invariantes com respeito a transformação  $\mathcal{G}_\eta : (t, f, \zeta_i, v_i) \mapsto (\eta t, \eta^{n+1} f, \eta^{n-i+1} \zeta_i, \eta^{n-i} v_i)$ . Desta forma, utilizando o conceito de campos vetoriais homogêneos (Rosier 1992) é possível provar que o sistema (4.46) é estável no sentido de Lyapunov.

No Teorema a seguir o desempenho do diferenciador (4.46) na presença de um ruído é caracterizado.

**Teorema 4.5** *Considere o diferenciador (4.46) de ordem  $n$ . Se o ruído de entrada satisfizer  $|f(t) - f_0(t)| \leq \varepsilon$ , então as seguintes desigualdades são estabelecidas em*

tempo finito para algumas constantes positivas  $\mu_i$  e  $\nu_i$  que dependem exclusivamente dos parâmetros do diferenciador.

$$\begin{aligned} \left| \zeta_i - f_0^{(i)}(t) \right| &\leq \mu_i \varepsilon^{(n-i+1)/(n+1)}, \quad i = 1, \dots, n \\ \left| v_i - f_0^{(i+1)}(t) \right| &\leq \nu_i \varepsilon^{(n-i)/(n+1)}, \quad i = 0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

*Prova: ver (Levant 2003)*

**Observação 4.3** *Analisando o Teorema 4.5 verifica-se que o diferenciador de ordem  $k$  fornece uma derivada de ordem  $l$  ( $l < k$ ), com uma acurácia maior do que a fornecida pelo diferenciador de ordem  $l$ , supondo  $\varepsilon < 1$ .*

Os parâmetros  $\lambda_i$  podem ser ajustado de acordo com a seguinte regra prática, apresentada em (Levant 2003). Uma possível escolha para os parâmetros do diferenciador de ordem 3, considerando que  $\left| f_0^{(4)}(t) \right| \leq C_4$ , é apresentada a seguir:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_0 = v_0, & v_0 = -5C_4^{1/4} |\zeta_0 - f_0(t)|^{3/4} \operatorname{sgn}(\zeta_0 - f_0(t)) + \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 = v_1, & v_1 = -3C_4^{1/3} |\zeta_1 - v_0|^{2/3} \operatorname{sgn}(\zeta_1 - v_0) + \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = v_2, & v_2 = -1.5C_4^{1/2} |\zeta_2 - v_1|^{1/2} \operatorname{sgn}(\zeta_2 - v_1) + \zeta_3 \\ \dot{\zeta}_3 = -1.1C_4 \operatorname{sgn}(\zeta_3 - v_2) \end{cases} \quad (4.48)$$

A sintonia dos parâmetros apresentada em (4.48) também pode ser utilizada para o caso de diferenciadores de ordem menor. Por exemplo, para o caso do diferenciador de segunda ordem, considerando  $\left| f_0^{(3)}(t) \right| \leq C_3$ , tem-se:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_0 = v_0, & v_0 = -3C_3^{1/3} |\zeta_0 - f_0(t)|^{2/3} \operatorname{sgn}(\zeta_0 - f_0(t)) + \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 = v_1, & v_1 = -1.5C_3^{1/2} |\zeta_1 - v_0|^{1/2} \operatorname{sgn}(\zeta_1 - v_0) + \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = -1.1C_3 \operatorname{sgn}(\zeta_2 - v_1) \end{cases} \quad (4.49)$$

Já no caso do diferenciador de primeira ordem, considerando  $\left| f_0^{(2)}(t) \right| \leq C_2$ , tem-se:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_0 = v_0, & v_0 = -1.5C_2^{1/2} |\zeta_0 - f_0(t)|^{1/2} \operatorname{sgn}(\zeta_0 - f_0(t)) + \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 = -1.1C_2 \operatorname{sgn}(\zeta_1 - v_0) \end{cases} \quad (4.50)$$

Por outro lado, os valores  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ , utilizados para o diferenciador de ordem  $n-1$ , também podem ser aplicados para o diferenciador de ordem  $n$ , e portanto para este diferenciador é necessário, apenas, escolher mais um parâmetro. Por exemplo,



a sintonia dos parâmetros para o diferenciador de ordem  $n = 4$ , considerando que  $|f_0^{(5)}(t)| \leq C_5$  é apresentada a seguir:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_0 = v_0, & v_0 = -8C_5^{1/5} |\zeta_0 - f_0(t)|^{4/5} \operatorname{sgn}(\zeta_0 - f_0(t)) + \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 = v_1, & v_1 = -5C_5^{1/4} |\zeta_1 - v_0|^{3/4} \operatorname{sgn}(\zeta_1 - v_0) + \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = v_2, & v_2 = -3C_5^{1/3} |\zeta_2 - v_1|^{2/3} \operatorname{sgn}(\zeta_2 - v_1) + \zeta_3 \\ \dot{\zeta}_3 = v_3, & v_3 = -1.5C_5^{1/2} |\zeta_3 - v_2|^{1/2} \operatorname{sgn}(\zeta_3 - v_2) + \zeta_3 \\ \dot{\zeta}_4 = -1.1C_5 \operatorname{sgn}(\zeta_4 - v_3) \end{cases} \quad (4.51)$$

No Lema a seguir será demonstrado que se a derivada de ordem  $n + 1$  do sinal de entrada for limitada, então todos os sinais presentes no diferenciador (4.46) de ordem  $n$  não poderão escapar em tempo finito.

**Lema 4.1** *Considere o sistema (4.46) e assuma que os sinais  $f(t), \dot{f}(t), \dots, f^{(n)}(t)$  são limitados. Se  $|f^{(n+1)}(t)| \leq K_{n+1} \forall t$ , para alguma constante positiva  $K_{n+1}$ , então o estado do sistema não pode divergir em tempo finito.*

*Prova: ver apêndice E* ■

# Capítulo 5

## Controle por Modos Deslizantes Baseado num Estimador Híbrido para Sistemas SISO Incertos

### 5.1 Introdução

Uma das principais dificuldades de se aplicar o controle por modos deslizantes convencional é a necessidade de se ter acesso a todos os estados do sistema, fato que nem sempre é possível na prática. Uma solução simples para superar este problema seria usar filtros de avanço de fase para reconstruir os estados não medidos.

Seguindo este conceito o controlador adaptativo por modelo de referência e a estrutura variável (VS-MRAC - *variable structure model reference adaptive control*), apresentado em (Hsu & Costa 1989, Hsu et al. 1997), foi aplicado a sistemas lineares e monovariáveis, garantindo estabilidade exponencial global com respeito a um pequeno conjunto residual. Entretanto, para plantas com grau relativo maior do que um, este controlador não consegue assegurar rastreamento exato.

Recentemente, uma nova classe de controladores via realimentação de saída, baseados em modos deslizantes de ordem superior, para plantas com grau relativo arbitrário, foi considerada por diversos autores (Emelyanov & Korovin 2000, Bartolini et al. 2002, Fridman & Levant 2002, Levant 2003). Uma ferramenta fundamental para a implementação destes controladores é o diferenciador exato, denominado de RED. Teoricamente, controladores baseados neste diferenciador podem conseguir

rastreamento exato; entretanto, apenas propriedades locais de estabilidade e/ou convergência para o sistema em malha fechada podem ser garantidas, mesmo para sistemas lineares, uma vez que um RED de ordem  $n$  requer que a derivada de ordem  $n + 1$  do sinal de entrada seja uniformemente limitada.

Neste capítulo, um novo controlador por modos deslizantes via realimentação de saída, baseado num estimador híbrido, é proposto para uma classe de plantas não-lineares e monovariáveis com grau relativo arbitrário. Este controlador é capaz de assegurar simultaneamente estabilidade global e rastreamento exato. Um elemento chave para implementação deste controlador é o estimador híbrido, denominado de Diferenciador Global, Robusto e Exato (*Global Robust Exact Differentiator - GRED*), que combina um filtro de avanço de fase com um RED, através de um esquema de chaveamento. A idéia principal do esquema proposto é preservar as propriedades de estabilidade que são obtidas utilizando-se apenas o filtro de avanço de fase, além de garantir propriedades de convergência global.

## 5.2 Formulação do Problema

Considere o seguinte sistema não-linear, monovariável (SISO) e com grau relativo global e arbitrário  $\rho \geq 1$ , bem definido e constante em todo o espaço de estado:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)[u + d_c(t, x)], \quad y_p = h(x) \quad (5.1)$$

sendo que  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado da planta,  $u \in \mathbb{R}$  é a entrada,  $y_p \in \mathbb{R}$  é a saída medida e  $d_c(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função localmente Lipschitz em  $x$ , sendo contínua por partes em  $t$ . A função  $d_c(t, x)$  é encarada como sendo uma perturbação não-linear incerta e casada com respeito à entrada  $u$ . Os campos vetoriais  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  são incertos, localmente Lipschitz em  $x$  e suficientemente suaves. A função  $h(x)$  é suficientemente suave e também é assumida como sendo desconhecida.

**Hipótese 5.1** *Existe um difeomorfismo global  $T(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que a mudança de coordenadas  $\bar{x} = T(x)$  transforma o sistema (5.1) em:*

$$\dot{\bar{x}} = A_p \bar{x} + b_p[u + d(t, \bar{x})], \quad y_p = h_p^T \bar{x}, \quad (5.2)$$

onde  $d(t, \bar{x}) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função localmente Lipschitz em  $x$ , sendo contínua

por partes em  $t$ , a matriz  $A_p$  e os vetores  $b_p$  e  $h_p$  são constantes, sendo considerados incertos.

O modelo entrada-saída correspondente a (5.2) é dado por:

$$y_p = G_p(s)[u + d], \quad G_p(s) = K_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)},$$

sendo que  $K_p \in \mathbb{R}$  é o ganho de alta frequência,  $N_p(s)$  e  $D_p(s)$  são polinômios mônicos.

Supõe-se que todos os parâmetros incertos de (5.1) pertençam a um subconjunto compacto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^k$ , de forma que limitantes para as incertezas paramétricas estejam disponíveis para o projeto de leis de controle por modos deslizantes via realimentação de saída. Sendo assim, a função de transferência  $G_p(s)$ , que é incerta, pertence a um subconjunto  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}(s)$ .

As hipóteses apresentadas a seguir devem ser satisfeitas para quaisquer valores das incertezas da planta, isto é,  $\forall G_p(s) \in \mathcal{P}$ . Elas caracterizam uma classe de plantas não-lineares, de fase mínima, monovariáveis, com grau relativo bem definido e arbitrário.

Neste capítulo, o problema de rastreamento de trajetória será abordado utilizando a formulação de controle por modelo de referência (MRC) (Ioannou & Sun 1996). Desta forma, as seguintes hipóteses, usuais no MRC, serão consideradas:

**Hipótese 5.2** *A planta  $G_p(s)$  é de fase mínima ( $N_p(s)$  é Hurwitz).*

**Hipótese 5.3** *A planta  $G_p(s)$  é controlável e observável (os polinômios  $N_p(s)$  e  $D_p(s)$  são coprimos).*

**Hipótese 5.4** *O grau relativo relativo  $\rho$  e a ordem  $n$  da planta são conhecidos ( $\text{grau}[D_p(s)] = n$ ).*

**Hipótese 5.5** *O sinal do ganho de alta frequência da planta ( $K_p$ ) é conhecido (assume-se positivo por simplicidade, sem perda de generalidade).*

**Hipótese 5.6** *A perturbação de entrada  $d(t, \bar{x})$  é uniformemente limitada, e possui um limitante superior  $\bar{d}(t)$  conhecido que satisfaz a  $|d(t, \bar{x})| \leq \bar{d}, \forall t \geq 0$ .*

A *trajetória desejada*  $y_d(t)$  é especificada através do seguinte modelo de referência:

$$y_d = M(s)r, \quad M(s) = \frac{K_m}{(s + a_m)L(s)}, \quad (5.3)$$

onde o sinal de referência  $r(t) \in \mathbb{R}$  é uma função arbitrária do tempo, contínua por partes e uniformemente limitada;  $K_m, a_m > 0 \in \mathbb{R}$ ; e  $L(s)$  é um polinômio Hurwitz dado por:

$$L(s) = s^{(\rho-1)} + l_{\rho-2}s^{(\rho-2)} + \dots + l_1s + l_0 \quad (5.4)$$

O problema de rastreamento de trajetória consiste em projetar uma lei de controle  $u$  que assegure a convergência assintótica do *erro de rastreamento* (ou *erro de saída*)

$$e(t) := y_p(t) - y_d(t), \quad (5.5)$$

para zero, mantendo todos os sinais do sistema em malha fechada uniformemente limitados, independentemente das incertezas e para quaisquer condições iniciais.

Quando a planta é conhecida e  $d(t, \bar{x}) \equiv 0$ , uma lei de controle que assegura o casamento entre o sistema em malha fechada e o modelo de referência, i.e.

$$y_p = G_p(s)u^* = M(s)r = y_d,$$

é dada por:

$$u^* = \theta^{*T}\omega,$$

onde o vetor de parâmetros  $\theta^*$  é escrito por:  $\theta^* = [\theta_1^{*T} \theta_2^{*T} \theta_3^* \theta_4^*]^T$ , com  $\theta_1^*, \theta_2^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\theta_3^*, \theta_4^* \in \mathbb{R}$  e o vetor regressor  $\omega = [\omega_u^T \ \omega_y^T \ y_p \ r]^T \in \mathbb{R}^{2n}$  é obtido por meio de filtros de entrada e saída dados por:

$$\dot{\omega}_u = \Lambda\omega_u + g u, \quad \dot{\omega}_y = \Lambda\omega_y + g y_p, \quad (5.6)$$

onde  $\Lambda \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  é Hurwitz e  $g \in \mathbb{R}^{n-1}$  é escolhido de forma que o par  $(\Lambda, g)$  seja controlável. As condições de casamento implicam que  $\theta_4^* = K_m/K_p$  (Ioannou & Sun 1996).

Definindo o vetor de estado  $X := [\bar{x}^T, \omega_u^T, \omega_y^T]^T$  do sistema formado pelos filtros de entrada e saída e pela planta, a dinâmica do sistema aumentado pode ser descrita da seguinte forma:

$$\dot{X} = A_0X + b_0u + b'_0d, \quad y_p = h_c^T X, \quad (5.7)$$

onde:

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ gh_p^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} b_p \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b'_0 = \begin{bmatrix} b_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad h_c^T = \begin{bmatrix} h_p^T & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Somando e subtraindo  $b_0\theta^{*T}\omega$  em (5.7), e notando que existem matrizes  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  tais que  $\omega = \Omega_1 X + \Omega_2 r$ , tem-se:

$$\dot{X} = A_c X + k^* b_c [\theta_4^* r + u - u^*] + b'_0 d, \quad y_p = h_c^T X,$$

onde  $A_c = A_0 + b_0 \theta^{*T} \Omega_1$ ,  $b_c = \theta_4^* b_0$ ,  $k^* = 1/\theta_4^*$ , com  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  definidas por:

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ h_p^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Notando que  $(A_c, b_c, h_c^T)$  é uma realização não-mínima de  $M(s)$ , e definindo o seguinte sinal de perturbação filtrado  $d_f(t) = W_d(t) * d(t)$ , onde  $W_d(t)$  é a resposta ao impulso de

$$W_d(s) := (k^* M(s))^{-1} h_c^T (sI - A_c)^{-1} b'_0, \quad (5.8)$$

o modelo de referência pode ser descrito por:

$$\dot{X}_m = A_c X_m + k^* b_c [\theta_4^* r - d_f] + b'_0 d, \quad y_m = h_c^T X_m$$

Desta forma, a dinâmica do sistema do erro aumentado com estado  $x_e := X - X_m$  é dada por:

$$\dot{x}_e = A_c x_e + k^* b_c [u - \bar{U}], \quad e = h_c^T x_e, \quad (5.9)$$

ou na forma de entrada-saída (ver (Ioannou & Sun 1996, seção 9.3.3)):

$$e = k^* M(s) [u - \bar{U}],$$

onde  $\bar{U} = u^* - d_f$ .

Tendo em vista a parametrização de controle  $u(t) = \theta^T \omega(t)$ , é natural escolher a seguinte classe de leis de controle admissíveis:

$$\mathcal{U} = \{u : \|u_{[t_0, t]}\| \leq K_\omega \|\omega_{[t_0, t]}\| + K_d\}, \forall t > t_0 \quad K_\omega, K_d > 0$$

Esta escolha garante que não há escape em tempo finito nos sinais do sistema. De fato, os sinais do sistema serão regulares (*regular signals*) e, portanto, podem crescer no máximo exponencialmente (Sastry & Bodson 1989), i.e., todos os sinais no sistema pertençam a  $L_{\infty}$ .

### 5.3 Exemplos de Sistemas Não-Lineares

Para ilustrar a caracterização da classe de sistemas não-lineares considerada, serão apresentados exemplos de plantas não-lineares que satisfazem as hipóteses consideradas. Inicialmente, considera-se um exemplo em que  $h(x)$  e  $g(x)$  sejam funções não-lineares do estado. Considere o seguinte sistema de segunda ordem ( $n = 2$ ) e com grau relativo global  $\rho = 1$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-\varsigma_1 x_1}{3x_2^2 + 1} + \frac{\varsigma_2}{3x_2^2 + 1} [u + \varsigma_3 \sin(t)] \\ y_p &= \varsigma_4 (x_2 + x_2^3) \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde  $\varsigma_1$ ,  $\varsigma_2$ ,  $\varsigma_3$  e  $\varsigma_4$  são parâmetros incertos que pertencem ao intervalo  $[1, 2]$ .

Note que a equação (5.10) é um caso particular de (5.1), com  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  e  $d_c(x, t)$  dados por:

$$f(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 + x_2^3 \\ \frac{-\varsigma_1 x_1}{3x_2^2 + 1} \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\varsigma_2}{3x_2^2 + 1} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} h(x) &= \varsigma_4 (x_2^2 + x_2^3) \\ d_c(t, x) &= \varsigma_3 \sin(t) \end{aligned}$$

Em geral, o melhor modo para tentar obter o difeomorfismo global é levar o sistema para a forma normal (Isidori 1995, Khalil 2002). Neste caso, como o sistema apresenta grau relativo  $\rho = 1$ , deve-se encontrar uma função  $\phi(x)$  que seja linearmente independente de  $h(x)$  e que satisfaça a condição:

$$L_g \phi(x) = 0$$

Uma escolha que atende a estas condições é  $\phi(x) = x_1$ . Desta forma, a transformação de coordenadas  $T(x)$  é dada por:

$$T(x) = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \varsigma_4 (x_2 + x_2^3) \end{bmatrix}$$

Note que a função  $T(x)$  é própria e que a matriz Jacobiana  $\partial T(x)/\partial(x)$  dada por:

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varsigma_4(3x_2^2 + 1) \end{bmatrix},$$

é invertível para quaisquer valores de  $\varsigma_4 \in [1, 2]$ . Deste modo, é possível concluir que  $T(x)$  é um difeomorfismo global. É importante destacar que o difeomorfismo  $T(x)$  precisa apenas existir, mesmo que não seja conhecido devido às incertezas paramétricas presentes no sistema. Na verdade, a influência da transformação de coordenadas, no esquema de controle considerado neste capítulo, se dará apenas no valor dos limitantes  $\bar{\theta}$  para os parâmetros  $\theta^*$ , que serão utilizados para gerar a função de modulação (ver seção 5.4). Deve ser enfatizado que estes limitantes podem ser determinados mesmo quando a transformação  $T(x)$  apresenta incertezas.

Fazendo a transformação de coordenadas  $\bar{x} = T(x)$ , o sistema passa a ser descrito por (5.2):

$$\dot{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{\varsigma_4} \\ -\varsigma_1 \varsigma_4 & 0 \end{bmatrix}}_{A_p} \bar{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \varsigma_2 \varsigma_4 \end{bmatrix}}_{b_p} (u + \underbrace{\varsigma_3 \sin(t)}_{d(t, \bar{x})}), \quad y_p = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \varsigma_4 \end{bmatrix}}_{h_p^T} \bar{x} \quad (5.11)$$

A dinâmica zero deste sistema é estável ( $\dot{\bar{x}}_1 = -2\bar{x}_1$ ), logo o sistema é de fase mínima e, portanto, satisfaz a Hipótese 5.2. Supondo que a ordem do sistema e o grau relativo sejam conhecidos, analisando a equação (5.11), é fácil verificar que as Hipóteses 5.3–5.6 também são satisfeitas. Logo o sistema (5.10) pertence a classe de sistemas não-lineares abordada neste capítulo.

Considerando o mesmo exemplo, exceto que agora, a saída passa a ser dada por  $y_p = x_1^1$  em vez de  $y_p = \varsigma_4(x_2^2 + x_2^3)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-\varsigma_1 x_1}{3x_2^2 + 1} + \frac{\varsigma_2}{3x_2^2 + 1} [u + \varsigma_3 \sin(t)] \\ y_p &= x_1 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Neste caso, o sistema (5.12) apresenta grau relativo  $\rho = 2$ . Como este sistema é de segunda ordem, o difeomorfismo que o coloca na forma normal pode ser obtido diretamente por:

---

<sup>1</sup>A função  $h(x)$  é considerada conhecida por simplicidade.



$$T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 + x_2 + x_2^3 \end{bmatrix}$$

Novamente, é fácil verificar que  $T(x)$  é um difeomorfismo global. Fazendo a transformação de coordenadas  $\bar{x} = T(x)$ , o sistema passa a ser descrito por (5.2):

$$\dot{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\varsigma_1 & -2 \end{bmatrix}}_{A_p} \bar{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \varsigma_2 \end{bmatrix}}_{b_p} \left( u + \underbrace{\varsigma_3 \sin(t)}_{d(t, \bar{x})} \right), \quad y_p = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{h_p^T} \bar{x} \quad (5.13)$$

Conforme esperado, o sistema não apresenta dinâmica interna, satisfazendo, assim, a Hipótese 5.2. Pode-se verificar que o sistema (5.12) satisfaz as Hipóteses 5.1–5.6, pertencendo a classe de plantas não-lineares considerada.

Para concluir, será apresentado mais um exemplo, para ilustrar o fato de que uma perturbação  $d(t, \bar{x})$  uniformemente limitada pode aparecer casada com respeito à entrada, mesmo que no sistema não-linear original não exista tal perturbação.

Considere o seguinte sistema de terceira ordem ( $n = 3$ ) e com grau relativo  $\rho = 2$ .

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \varsigma_1 \sin(x_2) \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - \varsigma_1 \cos(x_2)x_3 + \varsigma_2 u \\ y_p &= x_2, \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde  $\varsigma_1$  e  $\varsigma_2$  são parâmetros incertos que pertencem ao intervalo  $[1, 3]$ .

A equação (5.14) é um caso particular de (5.1), com  $f(x)$ ,  $g(x)$  e  $h(x)$  dados por:

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_3 + \varsigma_1 \sin(x_2) \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - \varsigma_1 \cos(x_2)x_3 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varsigma_2 \end{bmatrix}, \quad h(x) = x_2$$

Neste caso, como o sistema apresenta grau relativo  $\rho = 2$ , deve-se encontrar uma função  $\phi(x)$  que seja linearmente independente de  $h(x)$  e de  $L_f h(x)$ , e que satisfaça a condição:

$$L_g \phi(x) = 0$$

Estas condições são satisfeitas escolhendo-se  $\phi(x) = x_1$ . Desta forma, a transformação de coordenadas  $T(x)$  é dada por:

$$T(x) = \begin{bmatrix} \phi(x) & h(x) & L_f h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 + \sin(x_2) \end{bmatrix}$$

Note que a função  $T(x)$  é própria e que a matriz Jacobiana  $\partial T(x)/\partial(x)$  dada por:

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos(x_2) & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível. Deste modo, é possível concluir que  $T(x)$  é um difeomorfismo global. Fazendo a transformação de coordenadas  $\bar{x} = T(x)$ , o sistema passa a ser descrito por (5.2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}}_{A_p} \bar{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varsigma_2 \end{bmatrix}}_{b_p} \left( u + \underbrace{\varsigma_1 \cos(\bar{x}_2) \sin(\bar{x}_2) - 2\varsigma_1 \sin(\bar{x}_2)}_{d(t,x)} \right), \\ y_p &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{h_p^T} \bar{x} \end{aligned} \quad (5.15)$$

O sistema (5.14) é de fase mínima, uma vez que a dinâmica zero de (5.15) dada por  $\dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1$  é estável. Analisando a equação (5.15) é possível concluir que as Hipóteses 5.3–5.6 são válidas. Portanto, o sistema (5.14) pertence a classe considerada.

## 5.4 Projeto da Lei de Controle por Modos Deslizantes Convencional

A principal idéia no projeto de um SMC convencional é fechar a malha de controle, realimentando uma saída com grau relativo  $\rho = 1$  na entrada de um relé com uma modulação apropriada. Quando a planta possui grau relativo unitário, a malha de controle pode ser fechada utilizando diretamente o erro de rastreamento, ou seja, o sinal de controle  $u$  é dado por:

$$u = -\varrho(t) \operatorname{sgn}(e)$$

sendo  $\varrho(t)$  uma função de modulação a ser detalhada a seguir.

Neste caso, o modelo de referência pode ser escolhido como sendo estritamente real positivo (*SPR*) ( $L(s) = 1$ ), de forma que uma malha de deslizamento ideal (*ideal*

*sliding loop* - ISL) (Hsu 1997, Utkin, Guldner & Shi 1999) se forme ao redor do relé.

A Figura 5.1 apresenta o diagrama de blocos para este caso.

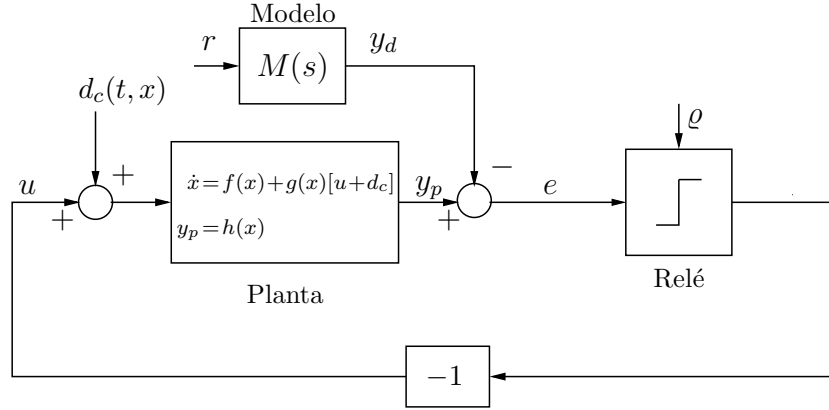


FIGURA 5.1: SMC - caso: grau relativo  $\rho = 1$ .

Para que o objetivo de controle seja satisfeito, a função de modulação deve atender à seguinte restrição:

$$\varrho(t) \geq |\theta^{*T} \omega - d_f| + \delta \quad (5.16)$$

onde  $\delta$  é uma constante positiva, que pode ser arbitrariamente pequena. Esta escolha para a função de modulação garante que o sistema do erro, com estado  $x_e$ , descrito em (5.9), seja uniformemente globalmente exponencialmente estável (GES) e que o erro de rastreamento  $e(t)$  torne-se identicamente nulo após algum tempo finito. (ver (Hsu et al. 1997, Lemma 1)). Neste caso, o estado  $\bar{x}$  será uniformemente limitado. Como o difeomorfismo  $T(x)$  é próprio, é possível concluir que o estado  $x$  do sistema original também será uniformemente limitado, de forma que o objetivo de controle é atingido.

Para satisfazer a desigualdade (5.16), a função de modulação  $\varrho(t)$  pode ser implementada do seguinte modo:

$$\varrho(t) = \bar{\theta}^T [|\omega_1| \dots |\omega_{2n}|]^T + \hat{d}(t) + \delta \quad (5.17)$$

onde o majorante  $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^{2n}$  é assumido como sendo conhecido e tal que suas componentes consistam de limitantes superiores para cada um dos elementos do vetor de parâmetros  $\theta^*$ , e  $\hat{d}(t)$  é um limitante superior de  $|d_f(t)|$  dado por:

$$\hat{d}(t) = \bar{d}(t) + \frac{c_d}{s + \lambda_d} * \bar{d}(t),$$

onde  $c_d$  é uma constante positiva,  $\lambda_d := \min_k \{-\text{Re}(\lambda_k)\}$ , com  $\lambda_k$ 's sendo os autovalores de  $\Lambda$ . Este majorante pode ser obtido através do Lema 3 em (Hsu et al. 1997) e do fato de que  $W_d(s)$  (ver equação (5.8)) é uma função de transferência própria e estável, que pode ser escrita como:

$$W_d(s) = 1 - \theta_1^{*T} (sI - \Lambda)^{-1} g$$

Consistentemente,  $u \in \mathcal{U}$  para esta escolha de função de modulação.

Para o caso de plantas com grau relativo  $\rho > 1$ , o modelo de referência não pode ser escolhido *SPR* e, portanto, não é possível garantir um ISL em torno do relé (Utkin et al. 1999). Idealmente, para superar esta dificuldade, poderia se usar o operador  $L(s)$  definido em (5.4), de forma a compensar o grau relativo excedente da planta. Deste modo, em vez de fechar a malha usando o erro de rastreamento, seria utilizada uma nova saída  $\nu$ , obtida através do polinômio não causal  $L(s)$ . A saída  $\nu$  chamada, por simplicidade, de variável de deslizamento ideal é dada por:

$$\begin{aligned} \nu &= L(s)e = e^{(\rho-1)} + l_{(\rho-2)}e^{(\rho-2)} + \dots + l_1 \dot{e} + l_0 e \\ &= \sum_{i=0}^{\rho-1} l_i h_c^T A_c^{(i)} x_e = \bar{h}^T x_e \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde a terceira igualdade foi obtida, utilizando-se o seguinte fato:

$$k^* h_c^T A_c^{(i)} b_c = 0, \quad i = 0, \dots, \rho - 2$$

Se a lei de controle for dada por:

$$u = -\varrho(t) \text{sgn}(\nu),$$

com função de modulação  $\varrho(t)$  satisfazendo (5.16), então o sistema do erro é GES e a variável de deslizamento ideal  $\nu$  se torna identicamente nula após algum tempo finito, o que implica que o erro de rastreamento converge exponencialmente para zero, enquanto todos os sinais do sistema permanecem uniformemente limitados. Entretanto,  $\nu$  não está diretamente disponível para implementar a lei de controle, uma vez que é considerado apenas realimentação de saída e que o operador  $L(s)$  é não-causal.

## 5.5 Controle por Modos Deslizantes Baseado num Filtro de Avanço de Fase

Para plantas com grau relativo  $\rho > 1$ , a variável de deslizamento ideal pode ser estimada por meio do seguinte filtro de avanço de fase:

$$\hat{\nu}_l = L_a(s) e, \quad L_a(s) = \frac{L(s)}{F(\tau s)}, \quad (5.19)$$

onde  $F(\tau s) = (\tau s + 1)^{\rho-1}$ ,  $\tau > 0$ .

Nesta seção, será considerada a presença de uma perturbação  $\beta_\alpha(t)$  na saída do filtro de avanço de fase. Esta perturbação será assumida como sendo uniformemente limitada e de ordem  $\tau$ . Levando em conta a presença desta perturbação, o sinal de controle é dado por:

$$u = -\varrho(t) \operatorname{sgn}(\hat{\nu}_l + \beta_\alpha) \quad (5.20)$$

O filtro de avanço de fase (5.19) pode ser descrito no espaço de estado por:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} -\bar{a}_{\rho-2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\bar{a}_{\rho-3} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{a}_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\bar{a}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \vartheta + \begin{bmatrix} \bar{b}_{\rho-2} \\ \bar{b}_{\rho-3} \\ \vdots \\ \bar{b}_1 \\ \bar{b}_0 \end{bmatrix} e, \\ \hat{\nu}_l &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \vartheta + \frac{1}{\tau^{\rho-1}} e, \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde  $\bar{a}_i = \mathcal{C}_{\rho-1-i}^{\rho-1}$ ,  $\bar{b}_i = (l_i - \bar{a}_i / \tau^{\rho-1-i}) / \tau^{i+1}$  e  $\mathcal{C}_k^n$  denota o coeficiente binomial, sendo dado por:

$$\mathcal{C}_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Definindo o erro de estimação do filtro de avanço de fase como:

$$\varepsilon_l = \hat{\nu}_l - \nu,$$

e considerando a seguinte transformação de estado:

$$x_{\varepsilon_i} = \vartheta_i + \frac{1}{\tau^{\rho-i}} \left( \sum_{k=0}^{i-1} l_{\rho-i+k} e^{(k)} \right) - \mathcal{C}_{\rho-i}^{\rho-1} \nu, \quad i=1, \dots, \rho-1, \quad (5.22)$$

onde  $\varepsilon_l = x_{\varepsilon_1}$ ,  $l_{\rho-1} = 1$  e  $\nu$  é definido em (5.18), a dinâmica do erro de estimação é dada por:

$$\dot{x}_\varepsilon = \frac{1}{\tau} A_\varepsilon x_\varepsilon + b_\varepsilon \dot{\nu}, \quad \varepsilon_l = h_\varepsilon^T x_\varepsilon, \quad (5.23)$$

onde  $\dot{\nu} = \bar{h}^T A_c x_e + k^* \bar{h}^T b_c [u - \bar{U}]$  e

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} -a_{\rho-2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{\rho-3} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad b_\varepsilon = \begin{bmatrix} -b_{\rho-2} \\ -b_{\rho-3} \\ \vdots \\ -b_1 \\ -b_0 \end{bmatrix},$$

$$h_\varepsilon^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad a_i = C_{\rho-1-i}^{\rho-1}, \quad b_i = C_{i+1}^{\rho-1}$$

A lei de controle (5.20) pode ser representada de forma equivalente, em função das variáveis de erro, do seguinte modo:

$$u = -\varrho(t) \operatorname{sgn}(\nu + \varepsilon_l + \beta_\alpha) \quad (5.24)$$

O resultado de estabilidade do esquema de controle considerado nesta seção é enunciado no seguinte Teorema:

**Teorema 5.1** *Considere a planta (5.1) e o modelo de referência (5.3) com lei de controle dada por (5.19) e (5.20). Assuma que as Hipóteses 5.1–5.6 sejam válidas e que a desigualdade (5.16) seja satisfeita. Se a perturbação  $\beta_\alpha(t)$  for absolutamente contínua e limitada por  $|\beta_\alpha(t)| \leq \tau K_R$ ,  $K_R > 0$ , então para  $\tau > 0$  suficientemente pequeno, o sistema do erro em malha fechada (5.9), (5.18), (5.23) e (5.24), com estado  $X_e^T = [x_e^T \ x_\varepsilon^T]$ , é uniformemente globalmente exponencialmente praticamente estável (GEPs) com respeito a um conjunto residual de ordem  $\tau$ , i.e., existem constantes positivas  $c_X$  e  $a$  tais que  $\forall X_e(t_0), \forall t \geq t_0 \geq 0$ ,  $|X_e(t)| \leq c_X e^{-a(t-t_0)} |X_e(t_0)| + O(\tau)$ . Além disso, todos os sinais do sistema em malha fechada (5.1), (5.3), (5.19), (5.20) permanecem limitados.*

*Prova:* ver Apêndice F.2 ■

**Corolário 5.1.1** *Para todo  $R > 0$ , existe  $\tau > 0$  suficientemente pequeno tal que para algum tempo finito  $T$ , o estado do erro  $X_e(t)$  é conduzido para um conjunto compacto e invariante  $D_R := \{X_e : |X_e| \leq R\}$ .* ■

**Corolário 5.1.2** *O sinal  $e^{(\rho)}(t)$  é uniformemente limitado. Além disso, se  $|x_e(t)| \leq R, \forall t \geq T$ , então, existe uma constante positiva  $C_\rho$  tal que*

$$\left\| e_{[T,t]}^{(\rho)} \right\| \leq C_\rho \quad (5.25)$$

*Prova:* ver Apêndice F.3 ■

O resultado obtido no Teorema 5.1 será fundamental para a prova de estabilidade do esquema de controle que será proposto na Seção 5.6. Além disso, deve ser ressaltado que esta prova também pode ser aplicada a problemas de controle por modos deslizantes de plantas com grau relativo  $\rho = 1$  que possuam dinâmicas não modeladas.

## 5.6 Controlador por Modos Deslizantes baseado num Estimador Híbrido

Na Seção 5.5, um SMC que utiliza um filtro de avanço de fase para estimar a variável de deslizamento ideal  $\nu$  foi analisado. Para o caso de plantas com grau relativo  $\rho > 1$ , a convergência do estado do erro é apenas garantida para um conjunto residual de ordem  $O(\tau)$ . Este fato ocorre devido à presença de um atraso introduzido pelo filtro de avanço de fase que impossibilita que o estado  $X_e$  convirja para zero e que também conduz ao surgimento de *chattering*.

Para evitar o problema de *chattering* através da realização de um deslizamento ideal e para assegurar rastreamento exato, poderia se utilizar o diferenciador robusto e exato (RED) (4.46) apresentado na Seção 4.5. Desta forma, a variável de deslizamento ideal  $\nu$  poderia ser estimada usando um RED de ordem  $(\rho - 1)$  como se segue:

$$\hat{\nu}_r = \zeta_{\rho-1} + l_{\rho-2}\zeta_{\rho-2} + \cdots + l_1\zeta_1 + l_0\zeta_0 \quad (5.26)$$

Deste modo, um sinal de controle  $u = -\varrho(t)\text{sgn}(\hat{\nu}_r)$  poderia ser usado. Entretanto, o Teorema 4.4 garantiria apenas convergência local do estado do erro para zero, uma vez que a convergência do RED só pode ser assegurada se  $e^{(\rho)}(t)$  for uniformemente limitada, i.e.,  $|e^{(\rho)}(t)| \leq C_\rho, \forall t \geq t_0$ , fato que não pode ser garantido a priori para o sistema em malha fechada.

Para garantir estabilidade exponencial global com respeito a um conjunto residual de ordem  $\tau$  e para assegurar convergência global do estado do erro  $X_e$  para zero, a idéia é combinar as duas técnicas de estimação consideradas anteriormente.

Para atingir esta finalidade, o RED será utilizado como um elemento auxiliar, responsável por sintetizar um sinal que será adicionado ao sistema, com o objetivo de cancelar o erro de estimação cometido pelo filtro de avanço de fase, possibilitando

assim que o rastreamento seja assintoticamente exato.

Nesta seção será proposto um esquema de controle, chamado de GRED-SMC, baseado num estimador híbrido, denominado de GRED, que consiste de uma combinação convexa da estimativa (5.19), fornecida por um filtro de avanço de fase, e da estimativa (5.26), fornecida por um RED, de acordo com:

$$\hat{\nu}_g = \alpha(\tilde{\nu}_{rl}) \hat{\nu}_l + [1 - \alpha(\tilde{\nu}_{rl})] \hat{\nu}_r, \quad (5.27)$$

onde  $\tilde{\nu}_{rl} = \hat{\nu}_r - \hat{\nu}_l$  é a diferença entre as duas estimativas. A função de chaveamento  $\alpha(\tilde{\nu}_{rl})$  pode ser vista como uma modulação contínua, dependente do estado, que assume valores no intervalo  $[0, 1]$ , e que permite ao esquema de controle trocar suavemente entre os dois estimadores.

A idéia básica do GRED-SMC é, primeiramente, conduzir globalmente o estado do erro para um conjunto compacto e invariante  $D_R$ , onde a convergência do RED possa ser assegurada e um majorante  $\bar{\varepsilon}_l$  para o erro de estimação do filtro de avanço de fase  $\varepsilon_l$  possa ser determinado. Em seguida, assegurar que após algum tempo finito, apenas o RED seja usado para estimar a variável de deslizamento ideal  $\nu$ . A principal dificuldade é que o estado do erro não se encontra disponível, e portanto, não é possível saber quando o estado do erro entra no conjunto  $D_R$ .

Para solucionar este problema, uma lei de chaveamento  $\alpha(\cdot)$  é proposta, de forma que o sistema resultante seja equivalente a um SMC com um filtro de avanço e com uma perturbação de saída uniformemente limitada e de ordem  $\tau$ . Desta maneira, é possível garantir convergência global para o conjunto compacto  $D_R$ , de acordo com o Teorema 5.1, independentemente do comportamento do RED, dado que seus sinais permaneçam limitados.

Mais especificamente,  $\alpha(\cdot)$  é projetada de modo que  $|\hat{\nu}_g - \hat{\nu}_l| \leq \tau K_R$ , como se segue:

$$\alpha(\tilde{\nu}_{rl}) = \begin{cases} 0, & \text{para } |\tilde{\nu}_{rl}| < \varepsilon_M - \Delta \\ (|\tilde{\nu}_{rl}| - \varepsilon_M + \Delta) / \Delta, & \text{para } \varepsilon_M - \Delta \leq |\tilde{\nu}_{rl}| < \varepsilon_M \\ 1, & \text{para } |\tilde{\nu}_{rl}| \geq \varepsilon_M \end{cases} \quad (5.28)$$

onde  $0 < \Delta < \varepsilon_M$  é uma zona-linear usada para suavizar a função de chaveamento, e  $\varepsilon_M := \tau K_R$ , com  $K_R$  sendo um parâmetro de projeto positivo apropriado, que é ajustado de forma que  $\varepsilon_M - \Delta > \bar{\varepsilon}_l$ . Isto implica que, após algum tempo finito,



apenas o RED permanece ativo ( $\alpha = 0$ ), fornecendo uma estimativa exata variável de deslizamento ideal  $\nu$ , conforme desejado.

Um gráfico da função  $\alpha(\tilde{\nu}_{rl})$  é apresentado na Figura 5.2.

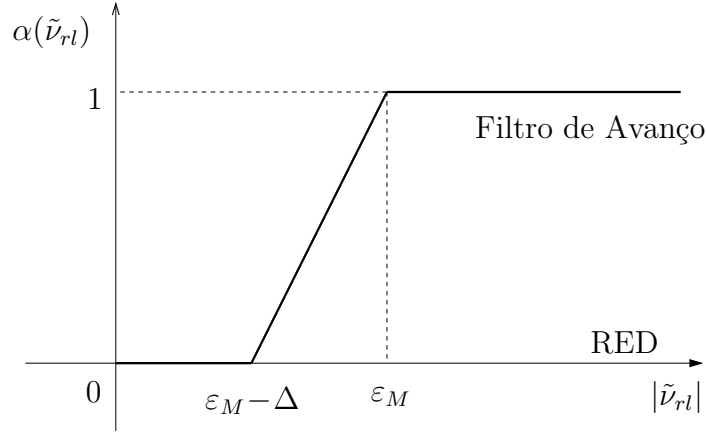


FIGURA 5.2: Gráfico da função de chaveamento  $\alpha(\tilde{\nu}_{rl})$  utilizada pelo controlador GRED-SMC.

A lei de controle do GRED-SMC é dada por:

$$u = -\varrho(t) \operatorname{sgn}(\hat{\nu}_g), \quad (5.29)$$

onde a função de modulação  $\varrho(t)$  é definida em (5.17). O esquema do controlador GRED-SMC pode ser visto na Figura 5.3.

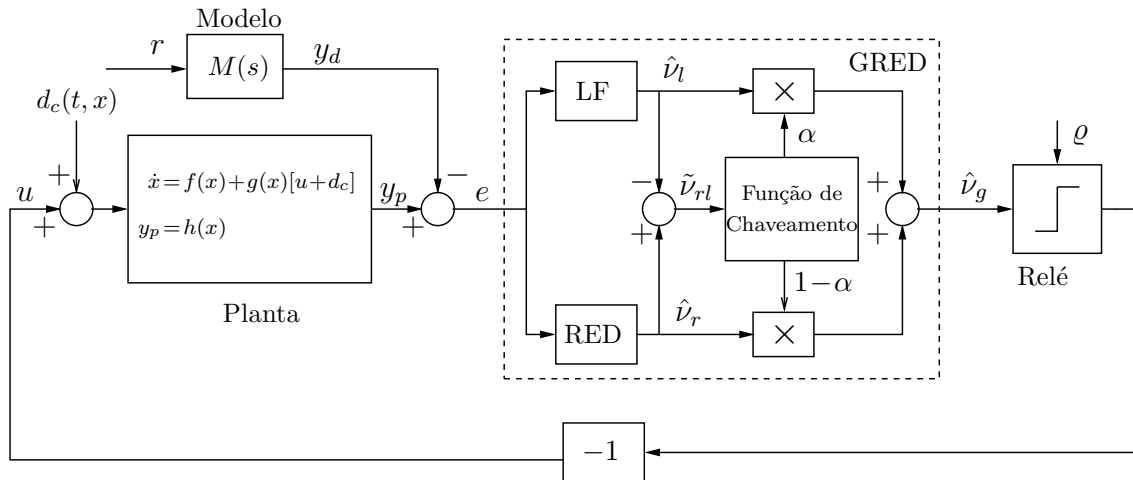


FIGURA 5.3: Esquema do controlador *GRED-SMC*

As propriedades de estabilidade e de convergência do esquema de controle proposto são formalmente enunciadas no Teorema 5.2.

**Teorema 5.2** *Considere a planta (5.1) e o modelo de referência (5.3) com lei de controle dada por (5.27) e (5.29). A função de chaveamento  $\alpha(\cdot)$  é definida em (5.28). Assuma que as Hipóteses 5.1–5.6 sejam válidas e que a desigualdade (5.16) seja satisfeita. Para  $\tau > 0$  suficientemente pequeno, o sistema do erro em malha fechada descrito por (5.9), (5.18), (5.23) e (5.24) é uniformemente globalmente praticamente exponencialmente estável (GEpS) com respeito a um conjunto residual de ordem  $\tau$ . Além disso, para  $\lambda_i$ ,  $i = 0, \dots, \rho-1$ , e  $K_R$  escolhidos apropriadamente, a estimação da variável de deslizamento ideal  $\nu$  se torna exata, na ausência de ruídos, sendo feita exclusivamente pelo RED ( $\alpha = 0$ ) após algum tempo finito. Então, o estado completo do erro  $X_e^T = [x_e^T \ x_\varepsilon^T]$ , e conseqüentemente o erro de rastreamento  $e$ , tendem exponencialmente para zero, enquanto todos os sinais do sistema permanecem limitados, incluindo em particular o estado  $x$  da planta (5.1). (Prova: ver Apêndice F.4). ■*

## 5.7 Resultados de Simulação

Nesta seção serão apresentados resultados de simulação para comprovar a eficácia do método proposto e validar os resultados teóricos obtidos, destacando as principais características do controlador GRED-SMC.

Considere a seguinte planta não-linear, monovariável e incerta com grau relativo  $\rho = 2$ , bem definido e constante em todo o espaço de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-\varsigma_1 x_1}{3x_2^2 + 1} + \frac{\varsigma_2}{3x_2^2 + 1} [u + \varsigma_3 \sin(t)] \\ y_p &= x_1\end{aligned}$$

sendo que  $\varsigma_1$ ,  $\varsigma_2$  e  $\varsigma_3$  são parâmetros incertos que pertencem ao intervalo  $[1, 2]$ .

A trajetória desejada  $y_d(t)$  é especificada através do seguinte modelo de referência:

$$y_d = M(s)r, \quad M(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad r(t) = \sin(0.5t)$$

Seguindo a formulação apresentada em (5.3), o modelo de referência pode ser escrito como:

$$M(s) = \frac{K_m}{(s+a_m)L(s)}; \quad K_m = 1, \quad a_m = 2, \quad L(s) = s+1$$

Conforme foi mostrado na Seção 5.3, por meio de uma transformação de coordenadas  $\bar{x} = T(x)$ , esta planta pode ser representada da seguinte forma equivalente:

$$\dot{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\varsigma_1 & -2 \end{bmatrix}}_{A_p} \bar{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \varsigma_2 \end{bmatrix}}_{b_p} (u + \underbrace{\varsigma_3 \sin(t)}_{d(t, \bar{x})}), \quad y_p = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{h_p^T} \bar{x},$$

que pode ser descrita pelo seguinte modelo entrada-saída:

$$y_p = \frac{\varsigma_2}{s^2 + 2s + \varsigma_1} (u + \varsigma_3 \sin(t))$$

Para implementar a função de modulação, os seguintes filtros de entrada e saída são utilizados de acordo com (5.6):

$$\dot{\omega}_u = -\omega_u + u, \quad \dot{\omega}_y = -\omega_y + y_p,$$

Para o modelo de referência e para os filtros de entrada e saída considerados, é possível determinar que:

$$\theta_1^* = -1, \quad \theta_2^* = \frac{\varsigma_1 - 1}{\varsigma_2}, \quad \theta_3^* = \frac{\varsigma_1 - 1}{\varsigma_2}, \quad \theta_4^* = \frac{1}{\varsigma_2}$$

Como  $\varsigma_1, \varsigma_2 \in [1, 2]$ , pode-se verificar que  $\theta_2^* \in [0, 1]$ ,  $\theta_3^* \in [0, 1]$  e  $\theta_4^* \in [\frac{1}{2}, 1]$ . Deste modo, o vetor  $\bar{\theta}$  pode ser escolhido como:

$$\bar{\theta}^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

A perturbação  $d(t, \bar{x}) = \varsigma_3 \sin(t)$ . Logo, o seguinte majorante pode ser utilizado:

$$|d(t, \bar{x})| \leq \bar{d} = 2, \forall t$$

Para satisfazer a desigualdade (5.16), a função de modulação pode ser projetada da seguinte maneira:

$$\varrho(t) = \bar{\theta}^T [|\omega_u| \ |\omega_y| \ |y_p| \ |r|]^T + \bar{d} + \delta; \quad \bar{\theta}^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T, \quad \bar{d} = 2, \quad \delta = 0.1$$

O filtro de avanço de fase pode ser descrito por (5.4), (5.19), (5.21):

$$\begin{aligned} \text{Entrada-Saída : } & \frac{L(s)}{F(\tau s)} = \frac{s + 1}{\tau s + 1} \\ \text{Espaço de Estado : } & \begin{cases} \dot{\vartheta} = -\frac{1}{\tau}\vartheta + \frac{1}{\tau}e - \frac{1}{\tau^2}e \\ \hat{v}_l = \vartheta + \frac{1}{\tau}e \end{cases} \end{aligned}$$

A constante de tempo do filtro de avanço de fase deve ser escolhida como sendo suficientemente pequena para garantir que o sistema em malha fechada seja estável. Por outro lado, quanto menor for esta constante maior será a sensibilidade do filtro de avanço a ruídos de medição. Desta forma, a constante de tempo do filtro de avanço é escolhida como:

$$\tau = 0.02$$

Como a planta possui grau relativo  $\rho = 2$ , o seguinte RED de primeira ordem pode ser utilizado:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_0 &= v_0, & v_0 &= -1.5C_2^{1/2} |\zeta_0 - e(t)|^{1/2} \text{sgn}(\zeta_0 - e(t)) + \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 &= -1.1C_2 \text{sgn}(\zeta_1 - v_0)\end{aligned}$$

Neste caso, a variável de deslizamento ideal é dada por  $\nu = \dot{e} + e$ . Desta forma, a estimativa do RED é dada por:

$$\hat{\nu}_r = \zeta_1 + \zeta_0$$

O parâmetro  $C_2$  está relacionado com a região  $D_R$  na qual a convergência do RED pode ser garantida. Quanto maior for este parâmetro mais rápida será a convergência do RED e maior será sua sensibilidade a ruídos. Este parâmetro foi escolhido como:

$$C_2 = 10$$

Para ajustar os parâmetros da função de chaveamento, o seguinte procedimento pode ser adotado. Mantendo  $\alpha \equiv 1$  (apenas o filtro de avanço é selecionado) e comparando as saídas dos dois estimadores, pode-se determinar um valor de  $\varepsilon_M$  que garanta que apenas o RED seja utilizado após um tempo finito. O parâmetro  $\Delta$  possui um papel secundário, podendo ser ajustado de forma bem flexível.

Os seguintes parâmetros foram escolhidos:

$$\varepsilon_M = 10\tau, \quad \Delta = 2\tau$$

As seguintes condições iniciais para a planta são consideradas:

$$x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 2$$

Para evitar o problema de *peaking* no filtro de avanço, a seguinte inicialização é adotada:

$$\vartheta(0) = \frac{-e(0)}{\tau} = -250$$

As demais condições iniciais são escolhidas iguais a zero. Para realizar a integração numérica é utilizado o método de Euler com passo de integração igual a  $h = 10^{-5}$ .

Os resultados de simulação apresentados nesta seção são obtidos, utilizando os parâmetros da Tabela 5.1.

TABELA 5.1: Parâmetros utilizados na simulação numérica apresentada na Seção 5.7.

Elemento	Valor
Perturbação de Entrada	$d_c(t, x) = \varsigma_3 \sin(t)$
Sinal de Entrada	$r(t) = \sin(0.5t)$
Modelo de Referência: $M(s) = \frac{K_m}{(s+a_m)L(s)}$	$K_m = 1, a_m = 2, L(s) = s + 1$
Filtros de Entrada e Saída (5.6)	$\Lambda = -1, g = 1$
Função de Modulação	$\bar{\theta}^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T, \bar{d} = 2, \delta = 0.1$
Filtro de Avanço (5.4), (5.19), (5.21)	$\tau = 0.02$
RED (5.4), (4.50) e (5.26)	$\lambda_0 = 1.5C_2^{1/2}, \lambda_1 = 1.1C_2, C_2 = 10$
Função de Chaveamento (5.28)	$K_R = 10, \varepsilon_M = 10\tau$ e $\Delta = 2\tau$
Condições Iniciais	$x_1(0) = 5, x_2(0) = 2, \vartheta(0) = -250$
Integração Numérica	Método de Euler: $h = 10^{-5}$

Observando a Figura 5.4 é possível verificar que o controlador GRED-SMC atinge os objetivos propostos, garantindo rastreamento exato e mantendo os estados da planta limitados. Na Figura 5.5 pode ser visto que, após um processo transiente, apenas o RED é selecionado pelo esquema de estimação híbrido, estabelecendo um modo deslizante ideal.<sup>2</sup> Além disso, o estado completo do erro  $X_e = [e \ \dot{e} \ \varepsilon_I]$  converge para zero<sup>3</sup>, conforme pode ser verificado na Figura 5.6.

<sup>2</sup>Na realidade, como a integração numérica é feita utilizando o Método de Euler com passo de integração  $h = 10^{-5}$ , um *chattering* numérico aparece no sinal de controle, fazendo com que este possua uma frequência de ordem  $\mathcal{O}(h^{-1})$  durante o deslizamento. Logo, um deslizamento ideal só pode ser obtido no limite quando  $h \rightarrow 0$ .

<sup>3</sup>Novamente, devido ao problema de *chattering* numérico o estado completo do erro não converge para zero. Este resultado só pode ser obtido no limite quando  $h \rightarrow 0$ .

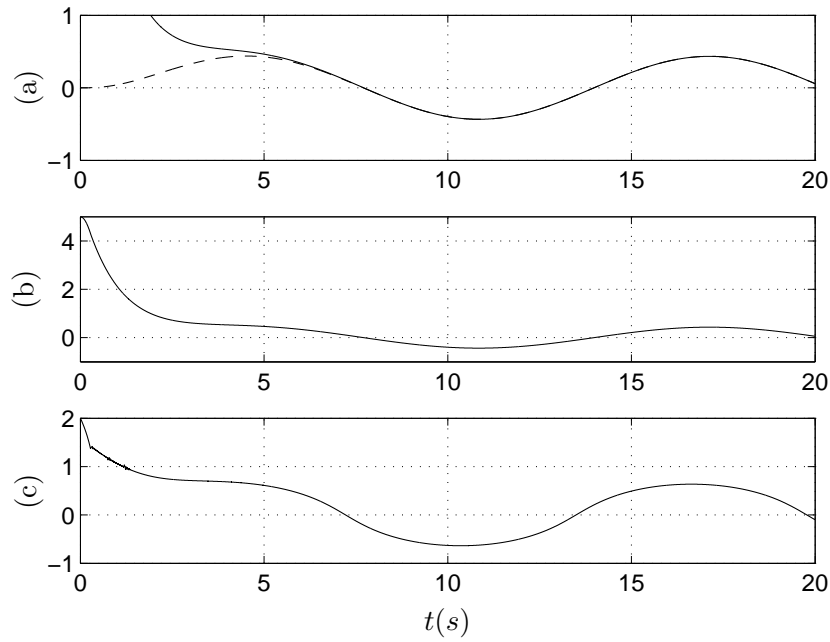


FIGURA 5.4: Planta não-linear e incerta com grau relativo  $\rho = 2$  controlada por um GRED-SMC: (a) Rastreamento: (- -) posição desejada  $y_d$  e (—) saída da planta  $y_p$ ; (b) Estado  $x_1$  da planta; (c) Estado  $x_2$  da planta

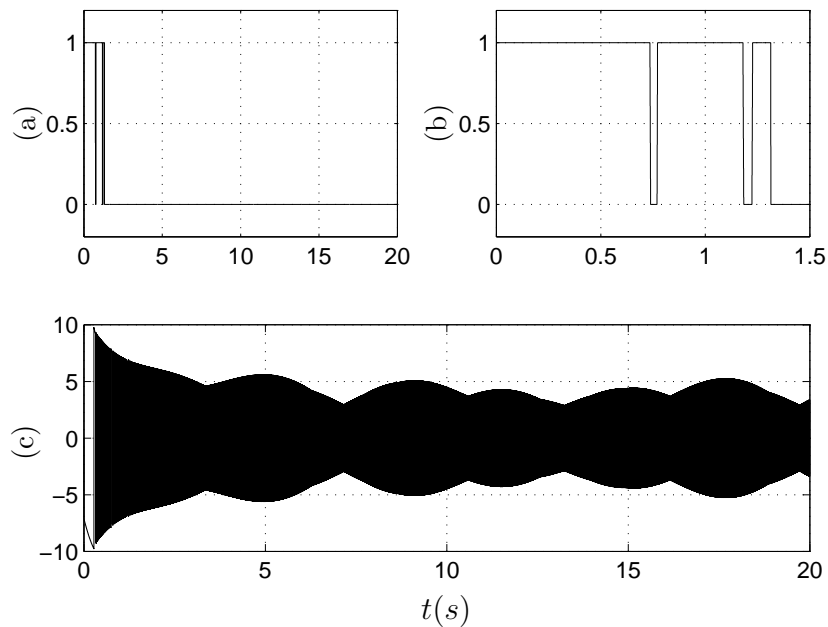


FIGURA 5.5: Planta não-linear e incerta com grau relativo  $\rho = 2$  controlada por um GRED-SMC: (a) Comportamento temporal da função de chaveamento  $\alpha(\tilde{v}_{rl})$  (b) Trecho ampliado do sinal  $\alpha(t)$ ; (c) Sinal de Controle  $u$

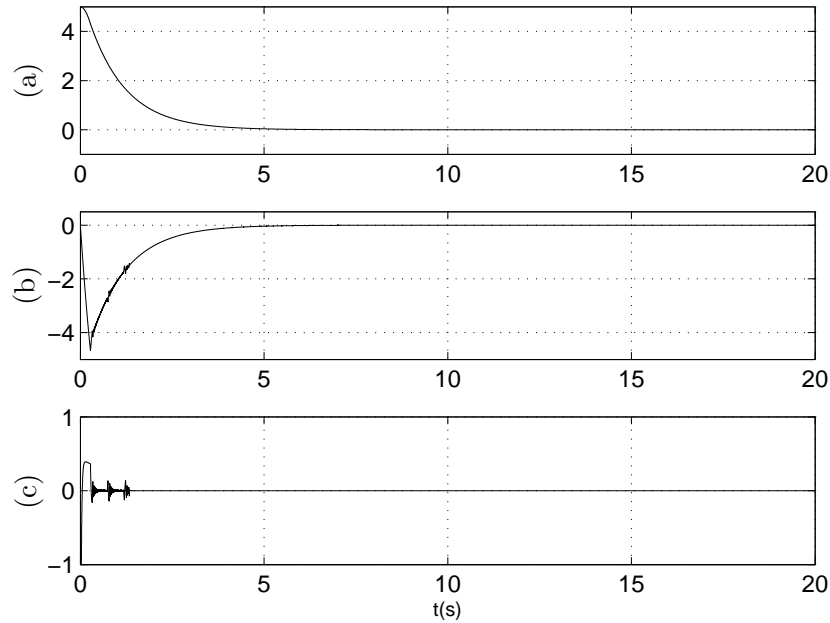


FIGURA 5.6: Planta não-linear e incerta com grau relativo  $\rho = 2$  controlada por um GRED-SMC: (a) Sinal  $e(t)$ ; (b) Sinal  $\dot{e}(t)$ ; (c) Sinal  $\varepsilon_l(t)$

## 5.8 Conclusões e Comentários

Neste capítulo, um novo controlador por modos deslizantes via realimentação de saída baseado num estimador híbrido foi proposto para uma classe de plantas não-lineares, monovariáveis e incertas com grau relativo global e arbitrário. Foram apresentados exemplos de sistemas com não linearidades nos estados não medidos com crescimento linear e polinomial que se enquadram na classe de sistemas considerada.

Além disso, foi mostrado que a estratégia de controle proposta é capaz de assegurar que o sistema do erro seja uniformemente globalmente exponencialmente estável com respeito a um pequeno conjunto residual, além de garantir convergência global do estado completo do erro para zero. O estimador híbrido, que é composto pelo RED e pelo filtro de avanço de fase, foi o elemento fundamental para a obtenção destes resultados e para a viabilização da solução usando apenas realimentação de saída.

Deve ser destacado, que o problema de rastreamento global e exato para plantas monovariáveis com grau relativo arbitrário ainda não havia sido resolvido, mesmo para o caso de plantas lineares, utilizando somente controle por modos deslizantes via realimentação de saída.

Também deve ser enfatizado que as hipóteses consideradas são bastante restritivas, fato que reduz a abrangência da classe de plantas não-lineares considerada. Entretanto, o método pode ser empregado para uma classe bastante ampla de sistemas lineares de fase mínima, monovariáveis e incertos com grau relativo arbitrário.

Na prática, ruídos, atrasos e dinâmicas não modeladas estão sempre presentes, de forma que rastreamento exato não pode ser obtido em aplicações reais. Entretanto, quando um controlador é capaz de garantir deslizamento ideal na ausência de tais imperfeições, espera-se que este apresente um desempenho melhor numa implementação prática.

Em (Nunes et al. 2006), o esquema de controle proposto foi testado experimentalmente, sendo aplicado a um servomecanismo (SRV-02 de posicionamento angular fabricado pela Quanser Consulting) em que se controla a posição de um manipulador através de um motor DC e um conjunto de engrenagens. Nesse artigo, foi verificada a viabilidade da implementação prática do controlador proposto. Além disso, mostrou-se que o desempenho do controlador com o estimador híbrido foi melhor do que o de um controlador que utiliza apenas filtros de avanço de fase.



# Capítulo 6

## Extensão do Estimador Híbrido para Sistemas MIMO Incertos

### 6.1 Introdução

No Capítulo 5, um esquema de chaveamento híbrido foi proposto, combinando um filtro de avanço de fase com um RED. Este esquema foi utilizado em conjunto com um controlador por modos deslizantes com o intuito de assegurar rastreamento global e exato para uma classe de sistemas não-lineares monovariáveis.

Em (Nunes & Hsu 2006) foi mostrado que a estratégia de chaveamento poderia ser estendida utilizando-se um Observador de Alto Ganho (HGO) no lugar do filtro de avanço de fase. Através dos desenvolvimentos teóricos apresentados nesse artigo, é possível verificar que os mesmos resultados obtidos no Capítulo 5 poderiam ser alcançados considerando um GRED composto por um HGO e por um RED.

Na realidade o GRED pode ser aplicado num contexto muito mais amplo, considerando diferentes tipos de estimadores e leis de controle, podendo ser aplicado para uma classe de plantas mais abrangente. A idéia principal do esquema de chaveamento é combinar um RED, que é capaz de fornecer derivadas exatas, com um estimador convencional, que garanta propriedades de estabilidade prática para o sistema em malha fechada, mesmo na presença de perturbações na sua saída.

Neste capítulo, serão apresentadas condições suficientes para que o esquema de estimação híbrido possa ser aplicado com sucesso para uma classe de sistemas não-lineares e multivariáveis. Além disso, para exemplificar a aplicação do esquema de

estimação proposto, será mostrado que o controlador PD implementado utilizando-se um *GREED* em conjunto com um termo de compensação *feedforward* e um termo corretivo baseado no conceito de controle vetorial unitário resolve o problema de rastreamento global e exato para uma classe de Sistemas de Euler-Lagrange incertos.

## 6.2 Formulação do Problema

Considere o seguinte sistema não-linear com grau relativo vetorial, uniforme e *arbitrário*, bem definido e constante em todo o espaço de estado:

$$\dot{x} = f(x) + g(x) [u + d_c(t, x)] , \quad y = h(x) , \quad (6.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado do sistema,  $y \in \mathbb{R}^m$  é a saída medida,  $u \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $g(x) = [g_1(x) \dots g_m(x)]$  e  $d_c(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função localmente Lipschitz em  $x$ , sendo contínua por partes em  $t$ . A função  $d_c(t, x)$  é encarada como sendo uma perturbação não-linear incerta e casada com respeito à entrada  $u$ . Os campos vetoriais  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$  são suficientemente suaves<sup>1</sup> e  $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função suave.

**Hipótese 6.1** *O sistema (6.1) possui grau relativo vetorial uniforme  $\rho$ , i.e.*

(i) *Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , tem-se:*

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0, \forall i, j \in \{1, \dots, m\}, \forall k \in \{0, \dots, \rho - 2\},$$

$$\exists j \in \{1, \dots, m\}, \text{ tal que: } L_{g_j} L_f^{\rho-1} h_i(x) \neq 0,$$

*sendo que  $\rho \in \mathbb{N}^+$ .*

(ii) *A matriz*

$$K_{px} := \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{\rho-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho-1} h_2(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{g_1} L_f^{\rho-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{\rho-1} h_m(x) \end{bmatrix}$$

*é invertível  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .*

---

<sup>1</sup>Os campos vetoriais  $ad_f^{k-1} g_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $1 \leq k \leq \rho$  são completos

Deste modo, o sistema (6.1) apresenta um grau relativo total  $\rho_t$  definido por:

$$\rho_t = m\rho \leq n$$

**Hipótese 6.2** Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , a distribuição  $\Gamma = \text{span}\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  é involutiva.

Considere a seguinte mudança de coordenadas que leva o estado  $x$  do sistema (6.1) para o estado  $\bar{x} = [\eta^T \quad \xi^T]^T$ , com  $\eta \in \mathbb{R}^{n-\rho_t}$  e  $\xi \in \mathbb{R}^{\rho_t}$  definidos por:

$$\begin{aligned} \eta &:= T_\eta(x), \\ \xi^i &= T_\xi^i(x) := \left[ h_i(x) \quad L_f h_i(x) \quad L_f^2 h_i(x) \quad \dots \quad L_f^{\rho-1} h_i(x) \right]^T, i=1, \dots, m, \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde  $T_\eta(x) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-\rho_t}$  é uma função apropriada.

Além disso, pode-se garantir que existe  $T_\eta(x) = [T_{\eta_1}(x) \quad \dots \quad T_{\eta_{n-\rho_t}}(x)]^T$  tal que  $L_g T_{\eta_j} = 0$  para  $j = 1, \dots, n - \rho_t$  e  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  (Byrnes & Isidori 1991, Isidori 1995, Schwartz, Isidori & Tarn 1999).

Note que  $y_i^{(k)} = L_f^k h_i = \xi_{k+1}^i$ ,  $k = 0, 1, \dots, \rho - 1$  e que para  $j = 1, \dots, n - \rho_t$ , tem-se:

$$\frac{dT_{\eta_j}}{dt} = \frac{\partial T_{\eta_j}}{\partial x} [f + gu] = L_f T_{\eta_j} + \underbrace{L_g T_{\eta_j}}_{=0} u = L_f T_{\eta_j}.$$

Se as Hipóteses 6.1 e 6.2 forem satisfeitas, então existe um difeomorfismo global  $T(x) = [T_\eta(x)^T \quad T_\xi(x)^T]^T$  tal que a mudança de coordenadas  $\bar{x} = T(x)$  transforma o sistema (6.1) na seguinte forma normal global (Byrnes & Isidori 1991, Isidori 1995, Schwartz et al. 1999)<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi}^i &= A_i \xi^i + B_i [\varphi^i(\eta, \xi) + \chi^i(\eta, \xi)(u + d_c(t, \eta, \xi))], \quad i=1, \dots, m, \end{aligned} \quad (6.3)$$

onde  $\varphi^i(\eta, \xi) = L_f^\rho h_i(T^{-1}(\eta, \xi))$ ,  $\chi^i(\eta, \xi) = L_g L_f^{\rho-1} h_i(T^{-1}(\eta, \xi))$ , e

$$A_i \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad B_i \in \mathbb{R}^{\rho \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, m$$

<sup>2</sup>Para obter uma forma normal global cuja dinâmica interna dependa apenas de  $\eta$  e de  $y$  é necessário adicionar a seguinte condição:  $[ad_f^{k-1} g_i, ad_f^{p-1} g_j] = 0$ ,  $\forall 1 \leq i, j \leq m$ ,  $1 \leq k, p \leq \rho$ . Neste caso, estas condições são necessárias e suficientes para que o difeomorfismo  $T(x)$  seja global.

Deve ser destacado que nesta representação o estado de cada subsistema- $\xi^i$  é formado pela componente  $y_i$  do vetor de saída e por suas derivadas, de forma que a dinâmica deste subsistema seja descrita por uma cadeia de  $\rho$  integradores. Deste modo, o sistema externo com estado  $\xi$  é descrito por  $m$  cadeias de  $\rho$  integradores.

**Hipótese 6.3** *A dinâmica interna do sistema (6.3), com estado  $\eta$ , é ISS com respeito ao estado  $\xi$  da dinâmica externa, i.e.*

$$|\eta(t)| \leq \beta_\eta(|\eta(t_0)|, t - t_0) + \gamma_\xi(\|\xi\|)$$

A Hipótese 6.3 implica que o sistema (6.1) seja de fase mínima. Desta forma, se o estado  $\xi$  composto pela saída e suas derivadas for limitado, então o estado  $\eta$  da dinâmica interna também será limitado.

Considere um sinal de referência desejado  $y_d(t) \in \mathbb{R}^m$  suficientemente suave. Os sinais  $y_d^{(i)}(t)$ ,  $i = 0, \dots, \rho$  são uniformemente limitados. Seja  $\xi_d$  o vetor de sinais desejados dado por:

$$\xi_d = [y_{d_1} \quad \dot{y}_{d_1} \quad \dots \quad y_{d_1}^{\rho-1} \quad \dots \quad y_{d_m} \quad \dot{y}_{d_m} \quad \dots \quad y_{d_m}^{\rho-1}]^T$$

O objetivo é garantir que o erro de rastreamento (ou erro de saída)

$$e = y - y_d, \tag{6.4}$$

tenda assintoticamente, ou em tempo finito, para zero, mantendo todos os sinais do sistema uniformemente limitados.

Seja  $\eta_d \in \mathbb{R}^{n-\rho t}$  um perfil de referência desejado para ser rastreado pela dinâmica interna do sistema (6.3), sendo definido por:

$$\dot{\eta}_d = f_0(\eta_d, \xi_d)$$

Pela Hipótese (6.3), pode-se concluir que o sinal  $\eta_d$  é uniformemente limitado. Considerando as variáveis de erro  $\xi_e = \xi - \xi_d$  e  $\eta_e = \eta - \eta_d$ , e definindo o estado do erro por  $z_e = [\eta_e^T \quad \xi_e^T]^T$ , a equação de estado para o sistema do erro pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_e &= \bar{f}_0(t, \eta_e, \xi_e) \\ \dot{\xi}_e^i &= A_i \xi_e^i + B_i [\bar{\varphi}^i(t, \eta_e, \xi_e) + \bar{\chi}^i(t, \eta_e, \xi_e)(u + d(t, \eta_e, \xi_e))] \end{aligned} \tag{6.5}$$

onde  $\bar{f}_0 = f_0(\eta_e + \eta_d, \xi_e + \xi_d) - f_0(\eta_d, \xi_d)$ ,  $\bar{\varphi}^i = \varphi^i(\eta_e + \eta_d, \xi_e + \xi_d)$ ,  $\bar{\chi}^i = \chi^i(\eta_e + \eta_d, \xi_e + \xi_d)$  e  $d = d_c(t, \eta_e + \eta_d, \xi_e + \xi_d)$

Seja  $\nu \in \mathbb{R}^m$  uma saída não mensurável tal que o sistema (6.5) com saída  $\nu$  possua *grau relativo vetorial uniforme*  $\rho = 1$ . Assume-se que a saída  $\nu$  seja dada por:

$$\nu = h_\nu(\xi_e), \quad (6.6)$$

onde  $h_\nu : \mathbb{R}^{\rho t} \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma função suave que é suposta como sendo conhecida.

Considere o seguinte controlador dinâmico:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= f_\omega(t, \omega, e) \\ u &= v(t, \omega, e, \nu), \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde  $f_\omega$  é um campo vetorial localmente Lipschitz e  $v$  é uma função que pode ser descontínua.

**Hipótese 6.4** *Existe uma lei de controle estabilizante (6.7) tal que a origem do sistema em malha fechada (6.5)–(6.7), com estado  $x_e = [z_e^T \ \omega^T]^T$ , seja um ponto de equilíbrio uniformemente globalmente assintoticamente estável (GAS).*

Entretanto, a lei de controle (6.7) não pode ser diretamente implementada, já que a saída  $\nu$  não é mensurável. No entanto, a saída  $\nu$  pode ser substituída pela saída obtida através do seguinte estimador:

$$\dot{\vartheta} = f_\vartheta(t, \vartheta, e, u) \quad (6.8)$$

$$\hat{\nu}_e = \psi(t, \vartheta, e), \quad (6.9)$$

onde  $f_\vartheta$  é um campo vetorial localmente Lipschitz e  $\psi$  é uma função suave. Usando a estimativa  $\hat{\nu}_e$  no lugar da saída  $\nu$  em (6.7) e considerando a presença de uma perturbação aditiva  $d_o(t)$  na saída do estimador (6.9), a seguinte lei de controle dinâmica é obtida:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= f_\omega(t, \omega, e) \\ u &= v(t, \omega, e, \hat{\nu}_e + d_o) \end{aligned} \quad (6.10)$$

A seguinte Hipótese é feita acerca da perturbação aditiva:

**Hipótese 6.5** *A perturbação  $d_o$  é uniformemente limitada, e possui um limitante superior  $\bar{d}_o$  conhecido que satisfaz a seguinte desigualdade*

$$|d_o(t)| \leq \bar{d}_o, \forall t \geq t_0$$

Considere o erro de estimação, definido por:

$$\epsilon_e = \hat{\nu}_e - \nu, \quad (6.11)$$

cuja dinâmica pode ser descrita do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\epsilon &= f_\epsilon(t, x_\epsilon, x_e, u), \\ \epsilon_e &= \phi(t, x_\epsilon, x_e), \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde  $f_\epsilon$  é um campo vetorial localmente Lipschitz e  $\phi$  é uma função suave.

**Hipótese 6.6** *O sistema completo do erro descrito por (6.5), (6.10)–(6.12), com estado  $X_e^T = [x_e^T \ x_\epsilon^T]$  é ISpS com respeito à perturbação de saída  $d_o$*

$$|X_e(t)| \leq \beta(X_e(t_0), t - t_0) + \gamma(\|d_o\|)$$

*Além disso, todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados.*

A Hipótese 6.6 implica que o sistema completo do erro descrito por (6.5), (6.10)–(6.12) é GApS, i.e., o estado  $X_e(t)$  converge para um conjunto compacto  $D_R := \{X_e \in \mathbb{R}^n : |X_e| \leq R\}$  em um tempo finito  $T$ . Como o estimador convencional (6.8) permite a obtenção desta propriedade ISpS, este estimador será referenciado por conveniência como Estimador ISpS.

Dentro do conjunto compacto  $D_R$ , a derivada do erro de rastreamento  $e(t)$  de ordem  $\rho$  pode ser majorada da seguinte forma:

$$\left\| e_{[T,t]}^{(\rho)} \right\| \leq C_\rho, \quad (6.13)$$

onde  $C_\rho$  é uma constante positiva.

**Hipótese 6.7** *Existe um tempo finito  $\bar{T} \geq 0$  e existe uma constante  $0 < \bar{\epsilon}_e \leq \bar{d}_o$  tais que, para qualquer condição inicial  $X_e(t_0)$ , a seguinte desigualdade é satisfeita:*

$$\left\| \epsilon_{e[\bar{T},t]} \right\| \leq \bar{\epsilon}_e \quad (6.14)$$

### 6.3 Diferenciador Robusto e Exato (RED)

Na Seção 4.5, foi apresentado um diferenciador, baseado em modos deslizantes de ordem superior, denominado de RED. Este diferenciador foi utilizado no Capítulo 5 para estimar derivadas do erro de saída, num contexto escalar. Para aplicar o RED num contexto mais amplo, considerando a possibilidade de múltiplas saídas, basta apenas, tratar cada uma das saídas individuais como se fossem únicas, ou seja, para cada saída  $e_j$  deve ser utilizado um RED de ordem ( $p = \rho - 1$ ), como se segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\zeta}_0^j = v_0^j, \\ v_0^j = -\lambda_0^j |\zeta_0^j - e_j(t)|^{p/(p+1)} \text{sign}(\zeta_0^j - e_j(t)) + \zeta_1^j \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_i^j = v_i^j, \\ v_i^j = -\lambda_i^j |\zeta_i^j - v_{i-1}^j|^{(p-i)/(p-i+1)} \text{sign}(\zeta_i^j - v_{i-1}^j) + \zeta_{i+1}^j \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_p^j = -\lambda_p^j \text{sign}(\zeta_p^j - v_p^j), \end{array} \right. \quad (6.15)$$

onde  $i = 0, \dots, p$  e  $j = 1, \dots, m$ . De acordo com o Teorema 4.4 se as derivadas de ordem  $\rho$  dos sinais  $e_j$  forem uniformemente limitadas e se as constantes  $\lambda_i^j$  forem escolhidas apropriadamente, as seguintes igualdades são verdadeiras após um processo transiente de tempo finito:

$$\zeta_0^j = e_j; \quad \zeta_i^j = v_{i-1}^j = e_j^{(i)}(t), \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, m$$

Deste modo, a seguinte estimativa para o estado  $\xi_e$  pode ser obtida:

$$\hat{\xi}_r = [\zeta_0^1 \quad \zeta_1^1 \quad \dots \quad \zeta_{\rho-1}^1 \quad \dots \quad \zeta_0^m \quad \zeta_1^m \quad \dots \quad \zeta_{\rho-1}^m]^T, \quad j = 1, \dots, m \quad (6.16)$$

Portanto, a saída  $\nu$  pode ser estimada por:

$$\hat{\nu}_r = h_\nu(\hat{\xi}_r). \quad (6.17)$$

Se a estimativa  $\hat{\nu}_r$  fosse utilizada na lei de controle (6.7) no lugar de  $\nu$ , apenas resultados locais poderiam ser assegurados, de acordo com o Teorema 4.4.

## 6.4 Controlador por Realimentação de Saída Baseado num GRED

Nesta seção, será proposto um esquema de controle capaz de garantir que o sistema completo do erro descrito por (6.5), (6.10)–(6.12), com estado  $X_e$ , seja GApS, além de assegurar convergência global do estado  $x_e$  para zero. Para esta finalidade, será proposto um estimador híbrido, denominado de GRED, que é baseado num esquema de chaveamento que combina o Estimador ISpS com o RED.

A estimativa de  $\nu$  fornecida pelo *GRED* consiste em uma combinação convexa das estimativas fornecidas pelo estimador ISpS (6.8) e pelo RED (6.15), sendo dada por:

$$\hat{\nu}_g = \alpha(\tilde{\nu}_{re})\hat{\nu}_e(t) + [1 - \alpha(\tilde{\nu}_{re})]\hat{\nu}_r(t), \quad (6.18)$$

onde as estimativas  $\hat{\nu}_e$  e  $\hat{\nu}_r$  são definidas em (6.9) e (6.17), respectivamente; e

$$\tilde{\nu}_{re} = \hat{\nu}_r - \hat{\nu}_e$$

A função de chaveamento  $\alpha(\tilde{\nu}_{re})$  é uma modulação contínua e dependente do estado que permite ao controlador trocar suavemente entre os dois estimadores, podendo assumir valores no intervalo  $[0, 1]$ .

Utilizando o GRED para estimar a saída não mensurável  $\nu$ , a lei de controle dinâmica é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= f_\omega(t, \omega, e) \\ u &= v(t, \omega, e, \hat{\nu}_g) \end{aligned} \quad (6.19)$$

A idéia do esquema de controle proposto é garantir, primeiramente, que o estado  $X_e$  do sistema completo do erro seja globalmente conduzido até um conjunto compacto  $D_R$ , onde a convergência do RED possa ser assegurada, e depois garantir que apenas o RED seja utilizado para implementar a lei de controle. Para esta finalidade, a função de chaveamento é proposta de forma que a lei de controle resultante seja equivalente a (6.10), garantindo assim, que o sistema completo do erro seja GApS, de acordo com a Hipótese 6.6. Especificamente,  $\alpha(\cdot)$  é projetada tal que  $|\hat{\nu}_g - \hat{\nu}_e| \leq \bar{d}_\alpha$ , como se segue:

$$\alpha(\tilde{\nu}_{re}) = \begin{cases} 0, & \text{para } |\tilde{\nu}_{re}| < \bar{d}_\alpha - \Delta \\ \frac{|\tilde{\nu}_{re}| - \bar{d}_\alpha + \Delta}{\Delta}, & \text{para } \bar{d}_\alpha - \Delta \leq |\tilde{\nu}_{re}| < \bar{d}_\alpha \\ 1, & \text{para } |\tilde{\nu}_{re}| \geq \bar{d}_\alpha \end{cases}, \quad (6.20)$$



onde  $0 < \Delta < \bar{d}_\alpha$  é uma zona linear, usada para suavizar a função de chaveamento, e  $\bar{d}_\alpha$  é um parâmetro de projeto que é escolhido de forma a assegurar que após um processo transitório apenas o RED permaneça ativo, fornecendo a estimativa exata de  $\nu$ . Um gráfico da função  $\alpha(\tilde{\nu}_{re})$  é apresentado na Figura 6.1.

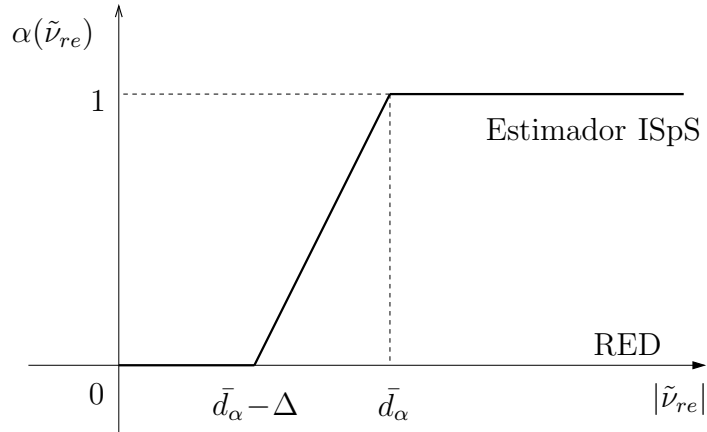


FIGURA 6.1: Gráfico da função de chaveamento  $\alpha(\tilde{\nu}_{re})$  utilizada por controlador por realimentação de saída baseado num GRED.

Um diagrama de blocos para o esquema do controlador por realimentação de saída baseado num GRED pode ser visto na Figura 6.2.

As propriedades de estabilidade e de convergência do esquema de controle proposto são enunciadas no seguinte Teorema:

**Teorema 6.1** *Considere a planta (6.1) e seja  $y_d$  um sinal de referência desejado suficientemente suave e tal que os sinais  $y_d^{(i)}(t)$ ,  $i = 0, \dots, \rho$  sejam uniformemente limitados. Considere que a lei de controle seja dada por (6.18) e (6.19) com função de chaveamento  $\alpha(\tilde{\nu}_{re})$  definida por (6.20). Suponha que as Hipóteses 6.1–6.7 sejam satisfeitas. Se o parâmetro  $\bar{d}_\alpha$ , em (6.20), for escolhido tal que:*

$$\bar{d}_\alpha \leq \bar{d}_o, \quad (6.21)$$

*então, o sistema completo do erro, descrito por (6.5), (6.10)–(6.12) é uniformemente globalmente assintoticamente praticamente estável (GApS), e todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados. Além disso, se os parâmetros  $\lambda_i$ ,  $i = 0, \dots, \rho - 1$  forem escolhidos apropriadamente, e se  $\bar{d}_\alpha$  for escolhido tal que:*

$$\bar{d}_\alpha \geq \bar{\epsilon}_e + \Delta, \quad (6.22)$$

então, após algum tempo finito, a estimação da saída  $v$  passa a ser exata, sendo feita exclusivamente pelo RED ( $\alpha(\tilde{v}_{re}) = 0$ ), e o estado  $x_e$  do sistema (6.5) e (6.7) converge assintoticamente para zero.

*Prova:* ver Apêndice G.1 ■

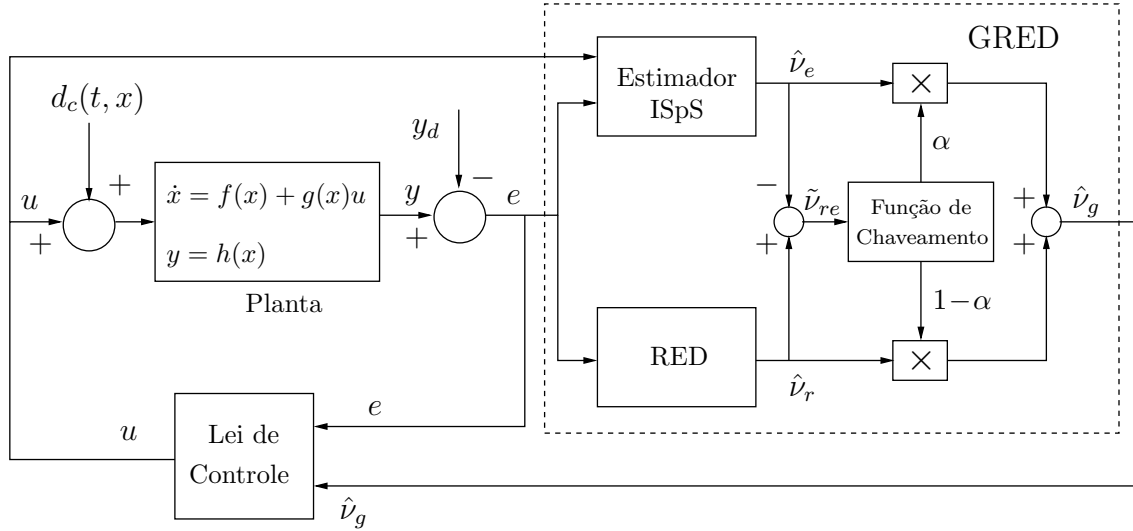


FIGURA 6.2: Esquema do controlador por realimentação de saída baseado num GRED.

## 6.5 Rastreamento Global para uma Classe de Sistemas de Euler-Lagrange Incertos

Nesta seção, para exemplificar a aplicação do esquema de estimação proposto, considera-se o problema de rastreamento global e exato para uma classe de Sistemas de Euler-Lagrange incertos com modelo dinâmico descrito por (3.2), pág. 56.

O objetivo é projetar um esquema de controle capaz de garantir que o erro de rastreamento  $e = q - q_d$  convirja globalmente para zero, usando apenas medidas de posição. Os sinais  $q_d(t)$ ,  $\dot{q}_d(t)$ ,  $\ddot{q}_d(t)$  são contínuos e limitados por  $|q_d|_M$ ,  $|\dot{q}_d|_M$  e  $|\ddot{q}_d|_M$ , respectivamente.

As Hipóteses 6.1 e 6.2 são necessárias para garantir a existência de um difeomorfismo global que coloque o sistema na forma normal. No entanto, é fácil verificar que a equação dinâmica (3.2) já se encontra na forma normal e que este sistema não

possui dinâmica interna, sendo de fase mínima por definição. Logo, pode-se concluir que as Hipóteses 6.1–6.3 são trivialmente satisfeitas.

A equação de estado para o sistema do erro pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e} \\ M(e+q_d)^{-1}[-C(e+q_d, \dot{e}+\dot{q}_d)(\dot{e}+\dot{q}_d) - f_D(e+q_d, \dot{e}+\dot{q}_d) - g(e+q_d) + \tau] - \ddot{q}_d \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

Seguindo a formulação apresentada em (6.5), o estado  $\xi_e$  é definido por:

$$\xi_e^T = [e_1 \ \dot{e}_1 \ e_2 \ \dot{e}_2 \ \dots \ e_n \ \dot{e}_n], \quad i = 1, \dots, n$$

sendo que  $n$  é o número de graus de liberdade do sistema. Note que a equação (6.23) é um caso particular da equação (6.5), na qual o estado foi convenientemente escolhido como:

$$e^T = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] = [\xi_{e_1}^1 \ \xi_{e_1}^2 \ \dots \ \xi_{e_1}^n], \quad \dot{e}^T = [\dot{e}_1 \ \dot{e}_2 \ \dots \ \dot{e}_n] = [\xi_{e_2}^1 \ \xi_{e_2}^2 \ \dots \ \xi_{e_2}^n]$$

Neste caso, o estado do erro é definido por  $z_e = [e^T \ \dot{e}^T]^T$ .

De acordo com a Propriedade 3.7, a dinâmica do sistema (3.2) pode ser parametrizada linearmente por:

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + f_D(q, \dot{q}) + g(q) = \tau$$

No Capítulo 3, o problema de rastreamento foi resolvido adicionando o seguinte termo de compensação *feedforward* ao sinal de controle:

$$Y_d\theta = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + f_D(q_d, \dot{q}_d) + g(q_d)$$

No entanto, como é suposto que o modelo dinâmico é incerto, o parâmetro  $\theta$  não está disponível para ser utilizado. Desta forma, pode-se considerar o seguinte termo de compensação *feedforward* nominal:

$$Y_d\hat{\theta} = Y_d\theta + Y_d\tilde{\theta}, \quad (6.24)$$

onde  $\hat{\theta}$  é uma estimativa do vetor de parâmetros  $\theta$  e  $\tilde{\theta}$  representa o erro de estimação paramétrico. De acordo com a Propriedade 3.8, tem-se que  $|\theta| \leq c_\theta$ . Deste modo, na análise subsequente será considerado que um majorante  $\bar{\theta}$ , que satisfaz a desigualdade  $|\tilde{\theta}| \leq \bar{\theta}$ , seja conhecido.

Considerando um controlador PD (não causal) com um termo de compensação *feedforward* nominal e acrescentando um termo de controle vetorial unitário (Gutmann & Leitmann 1975, Gutman 1979) para rejeitar as incertezas, a lei de controle é dada por:

$$\tau = -K_p e - K_d \dot{e} + Y_d \theta + Y_d \tilde{\theta} + U(e, \dot{e}), \quad (6.25)$$

onde

$$U(e, \dot{e}) = -\varrho(t) \frac{\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e)}{\sqrt{(\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e))^T (\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e))}}; \quad (6.26)$$

$$\phi(e) = c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2} \frac{\varsigma e}{\sqrt{1 + \varsigma^2 e^T e}}; \quad (6.27)$$

$$\varrho(t) \geq |Y_d \tilde{\theta}| + \delta; \quad (6.28)$$

sendo que  $\varepsilon_2$  é um parâmetro positivo de projeto,  $0 < \varsigma \leq 1$  é uma constante positiva que é escolhida de forma conveniente, e  $\delta$  é uma constante positiva, que pode ser arbitrariamente pequena.

Note que a lei de controle utilizada é estática. Desta forma, o estado  $\omega$  (ver (6.7)) não existe para este caso, e portanto,  $x_e = z_e = [e^T \ \dot{e}^T]^T$ . Substituindo a lei de controle (6.25) em (6.23), tem-se:

$$\ddot{e} = M^{-1}(q) \left[ -C(q, \dot{q}) \dot{e} - f_D(q, \dot{q}) + f_D(q, \dot{q}_d) - K_p e - K_d \dot{e} - h_e + Y_d \tilde{\theta} + U(e, \dot{e}) \right] \quad (6.29)$$

onde  $h_e = [M(q) - M(q_d)] \ddot{q}_d + [C(q, \dot{q}) - C(q_d, \dot{q}_d)] \dot{q}_d + g(q) - g(q_d)$ .

A seguinte Proposição caracteriza a propriedade de estabilidade do sistema em malha fechada descrito por (6.29).

**Proposição 6.1** *Considere um sistema de Euler-Lagrange com  $n$  graus de liberdade descrito por (6.23), com lei de controle definida em (6.25). Se os ganhos de controle  $K_p$  e  $K_d$  forem suficientemente grandes e se a função de modulação satisfizer a desigualdade (6.28), então o sistema do erro em malha fechada descrito por (6.29), com estado  $x_e = [e^T \ \dot{e}^T]^T$ , é uniformemente globalmente assintoticamente estável (GAS).*

*Prova: ver Apêndice G.2* ■

De acordo com a Proposição 6.1 o sistema em malha fechada (6.29) é GAS. Portanto, a Hipótese 6.4 é satisfeita.

Como é considerado que apenas medidas de posição estejam disponíveis, a saída  $\nu = \dot{e}$  não é mensurável. Deste modo, para poder implementar a lei de controle (6.25), a saída  $\nu$  pode ser estimada através de um filtro de avanço descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= -\frac{1}{\mu}\vartheta - \frac{1}{\mu^2}q - \frac{1}{\mu}\dot{q}_d \\ \hat{\nu}_e &= \vartheta + \frac{1}{\mu}q\end{aligned}\tag{6.30}$$

Seguindo a formulação apresentada em (6.10), a lei de controle usando a estimativa  $\hat{\nu}_e$  é dada por:

$$\tau = -K_p e - K_d(\hat{\nu}_e + d_o) + Y_d\theta + Y_d\tilde{\theta} + U(e, \hat{\nu}_e + d_o)\tag{6.31}$$

Suponha que o majorante  $\bar{d}_o$  da perturbação de saída  $d_o$  seja conhecido, satisfazendo assim a Hipótese 6.5. Agrupando os termos provenientes da perturbação de saída  $d_o$  com o termo incerto  $Y_d\tilde{\theta}$ , a lei de controle (6.31) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\tau = -K_p e - K_d\hat{\nu}_e + Y_d\theta + d_e\tag{6.32}$$

onde:

$$d_e = -K_d d_o + U(e, \hat{\nu}_e + d_o) + Y_d\tilde{\theta}\tag{6.33}$$

Como os majorantes  $\bar{d}_o$  e  $\bar{\theta}$  são conhecidos, pode-se verificar que a perturbação  $d_e$  é uniformemente limitada, e um limitante superior  $\bar{d}_e \geq d_e(t), \forall t$  pode ser determinado.

Definindo o erro de estimação do filtro de avanço de fase como  $\epsilon_e(t) = \hat{\nu}_e(t) - \dot{e}(t)$ , a lei de controle (6.32) pode ser reescrita como:

$$\tau = -K_p e - K_d \dot{e} - K_d \epsilon_e + Y_d \theta + d_e\tag{6.34}$$

Substituindo a lei de controle (6.34) em (6.23), tem-se:

$$\ddot{e} = M^{-1}(q) [-C(q, \dot{q})\dot{e} - f_D(q, \dot{q}) + f_D(q, \dot{q}_d) - K_p e - K_d \dot{e} - K_d \epsilon_e - h_e + d_e]\tag{6.35}$$

onde a perturbação de entrada  $d_e$  é definida em (6.33). A dinâmica do erro de estimação do filtro de avanço pode ser descrita por:

$$\dot{\epsilon}_e = -\frac{1}{\mu}\epsilon_e - \ddot{e}\tag{6.36}$$

Deste modo, a dinâmica do sistema completo do erro, com estado  $X_e = [x_e^T \ \epsilon_e^T]^T$  pode ser descrita por (6.35) e (6.36).

Considere o sistema (6.23) com lei de controle dada por (6.30) e (6.32). De acordo com o Teorema 3.2, se os ganhos  $K_p$  e  $K_d$  forem suficientemente grandes e se o parâmetro  $\mu$  for suficientemente pequeno, então o sistema completo do erro descrito por (6.35) e (6.36), com estado  $X_e$  é ISS com respeito a perturbação  $d_e$ , satisfazendo, assim a Hipótese 6.6. Além disso, o estado  $X_e$  converge num tempo finito  $T_R$  para o seguinte conjunto compacto:

$$D_R := \{X_e \in \mathbb{R}^{3n} : |X_e| \leq R\},$$

onde  $R = \gamma_d(\bar{d}_e) + \kappa$ ,  $\gamma_d \in \mathcal{K}_\infty$  e  $\kappa$  é uma constante positiva que pode ser arbitrariamente pequena. Deve ser ressaltado que este resultado é válido para qualquer valor de  $\bar{d}_e$  finito, portanto, não há restrições sobre a magnitude da perturbação  $d_o$ , que deve ser apenas uniformemente limitada.

A Proposição 6.2 apresenta um majorante para o sinal  $\ddot{e}$ , quando o estado completo do erro se encontra dentro do conjunto compacto  $D_R$ .

**Proposição 6.2** *Considere o sistema (6.23), (6.30) e (6.31). Se  $|X_e| \leq R, \forall t \geq T_R$ , então o seguinte majorante para o sinal  $\ddot{e}$  pode ser obtido:*

$$\|\ddot{e}_{[T_R, t]}\| \leq C_2 \tag{6.37}$$

onde  $C_2$  é uma constante positiva.

*Prova: ver Apêndice G.3* ■

A Proposição 6.3 apresenta um majorante para o erro de estimação  $\epsilon_e$ , utilizando o resultado obtido na Proposição 6.2.

**Proposição 6.3** *Considere o sistema (6.23), (6.30) e (6.31). Se  $|X_e| \leq R, \forall t \geq T_R$ , então existe um tempo finito  $\bar{T} \geq T_R$ , tal que:*

$$\|\epsilon_{e[\bar{T}, t]}\| < \bar{\epsilon}_e \tag{6.38}$$

onde  $\bar{\epsilon}_e = \mu C_2$  e  $C_2$  é uma constante positiva definida na Proposição 6.2.

*Prova: ver Apêndice G.3* ■

A partir do resultado obtido na Proposição 6.3 e como o majorante  $\bar{d}_o$  é arbitrário, é possível verificar que a Hipótese 6.7 também é satisfeita.

Considere, agora, a lei de controle dada por:

$$\tau = -K_p e - K_d \hat{\nu}_g + Y_d \theta + Y_d \tilde{\theta} + U(e, \hat{\nu}_g) \quad (6.39)$$

onde  $\hat{\nu}_g$  é definida em (6.18). A estimativa  $\hat{\nu}_e$  do filtro de avanço é dada por (6.30), e utilizando um RED de primeira ordem para cada saída  $e_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , tem-se que:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_0^j = v_0^j, & v_0^j = -\lambda_0^j |\zeta_0^j - e_j|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\zeta_0^j - e_j) + \zeta_1^j, \\ \dot{\zeta}_1^j = -\lambda_1^j \operatorname{sgn}(\zeta_1^j - v_0^j), \end{cases} \quad (6.40)$$

Logo, a estimativa  $\hat{\nu}_r$  pode ser obtida do seguinte modo:

$$\hat{\nu}_r = [\zeta_1^1 \quad \zeta_1^2 \quad \dots \quad \zeta_1^n]$$

A função de chaveamento  $\alpha(\tilde{\nu}_{re})$  é definida em (6.20), com  $\bar{d}_\alpha = \mu K_R$ , onde  $K_R$  é um parâmetro de projeto que deve ser escolhido de forma que  $\bar{d}_\alpha - \Delta \geq \bar{\epsilon}_e$ . Como  $\bar{d}_\alpha$  e  $\bar{\epsilon}_e$  são de ordem  $\mu$ , é natural considerar que  $\Delta$  também seja de ordem  $\mu$  sendo dada por  $\Delta = \mu K_\Delta$ . Logo, para satisfazer a condição (6.22) do Teorema 6.1, os parâmetros  $K_R$  e  $K_\Delta$  devem ser escolhidos tais que:

$$K_R \geq 2C_2 + K_\Delta$$

Considerando que a perturbação de saída  $d_o$  presente no filtro de avanço seja proveniente apenas do esquema de chaveamento proposto, i.e.  $d_o = d_\alpha$ , tem-se que  $\bar{d}_o = \bar{d}_\alpha = \mu K_R$ , satisfazendo a condição (6.21) do Teorema 6.1. Esta escolha é consistente com a Hipótese 6.7, uma vez que  $\bar{\epsilon}_e \leq \bar{d}_\alpha = \bar{d}_o$ .

Aplicando o Teorema 6.1 é possível concluir que o sistema (6.23) com lei de controle (6.30) e (6.39) e função de chaveamento  $\alpha(\tilde{\nu}_{re})$  definida em (5.28) é GAPs e que todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados. Além disso, após algum tempo finito, a estimação da saída  $\nu$  passa a ser exata, sendo feita exclusivamente pelo RED ( $\alpha(\tilde{\nu}_{re}) = 0$ ), e o estado  $x_e = [e^T \quad \dot{e}^T]^T$  converge assintoticamente para zero.

## 6.6 Resultados de Simulação

Nesta seção, serão apresentadas simulações numéricas para verificar os desenvolvimentos teóricos. Novamente, considera-se o manipulador real, denominado de *Barrett Whole Arm Manipulator* (WAM), apresentado na Seção 2.5. Na configuração considerada (dois graus de liberdade), o modelo dinâmico completo deste manipulador é dado por:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \zeta F_v \dot{q} + f_c(\dot{q}) = \tau,$$

sendo que  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$ ,  $\zeta F_v$  são definidos em (2.52) e o atrito de Coulomb  $f_c(\dot{q})$ , que é visto como uma dinâmica não modelada, é definido por:

$$f_c(\dot{q}) = \begin{bmatrix} 1.50 \operatorname{sgn}(\dot{q}_1) \\ 0.71 \operatorname{sgn}(\dot{q}_2) \end{bmatrix},$$

A mesma trajetória desejada considerada no Capítulo 2 é escolhida:

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} 0.8 \sin(t) \\ 0.8 \sin(t) \end{bmatrix} \text{ (rad)}$$

Conforme visto anteriormente, para assegurar rastreamento exato é necessário utilizar a seguinte compensação feedforward:

$$Y(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)\theta = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + \zeta F_v \dot{q}_d$$

sendo que  $Y(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$  é a matriz regressora desejada, dada por:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_{d1} & (2\ddot{q}_{d1} + \ddot{q}_{d2}) \cos(q_{d2}) - (2\dot{q}_{d2}\dot{q}_{d1} + \dot{q}_{d2}^2) \sin(q_{d2}) & \ddot{q}_{d2} & \dot{q}_{d1} & 0 \\ 0 & \ddot{q}_{d1} \cos(q_{d2}) + \dot{q}_{d1}^2 \sin(q_{d2}) & \ddot{q}_{d1} + \ddot{q}_{d2} & 0 & \dot{q}_{d2} \end{bmatrix}, \quad (6.41)$$

e  $\theta \in \mathbb{R}^5$  é um vetor constante de parâmetros, dado por:

$$\theta^T = [1.35 \quad 0.05 \quad 0.25 \quad 0.88 \quad 0.66]$$

No entanto, nesta simulação é considerado que o vetor de parâmetros  $\theta$  seja desconhecido. Desta forma, não será utilizado um termo de compensação feedforward nominal no sinal de controle. Por outro lado, supõe-se o conhecimento do majorante  $c_\theta$ , que satisfaz a desigualdade  $|\theta| \leq c_\theta$ .



Para garantir rastreamento exato, o termo de controle vetorial unitário tem que ser capaz de sintetizar o sinal  $Y(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)\theta$ , além de rejeitar o termo  $f_c(\dot{q})$  proveniente do atrito de Coulomb. Desta forma, a função de modulação do termo UVC é projetada como:

$$\varrho(t) = |Y(q_d(t), \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d(t))| c_\theta + \bar{f}_c$$

sendo que  $c_\theta = 2$  e  $\bar{f}_c = 1.5$ . De acordo com (6.26), o termo UVC é dado por:

$$U(e, \dot{e}) = -\varrho(t) \frac{\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e)}{\sqrt{(\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e))^T (\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e))}};$$

sendo que  $\phi(e) = c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2} \frac{\varsigma e}{\sqrt{1 + \varsigma^2 e^T e}}$ . Os parâmetros  $c_h$  e  $\Delta_h$  são utilizados na análise para se obter um majorante para a dinâmica residual do robô, definida em (2.23), pág. 28. Deste modo, só é necessário que o valor destes parâmetros seja maior do que aquele que foi considerado na análise. Portanto, assume-se que  $c_h$  e  $\Delta_h$  sejam dados por:

$$c_h = 1; \quad \Delta_h = 5$$

Os parâmetros  $\varepsilon_2$ ,  $\varsigma$ ,  $K_p$  e  $K_d$  foram ajustados por meio de simulações numéricas, de modo a respeitar às condições impostas pela análise e ao mesmo tempo tentar melhorar o desempenho do esquema de controle proposto. Além disso, procurou-se não modificar muito o valor dos ganhos do controlador PD para possibilitar uma comparação com os resultados apresentados na Seção 2.5. Os parâmetros foram selecionados como:

$$\varepsilon_2 = 1; \quad \varsigma = 0.5; \quad K_d = \text{diag} \{15, 15\}; \quad K_p = \text{diag} \{45, 45\}$$

O filtro de avanço de fase, utilizado para implementar o GRED, pode ser descrito por (6.30). A constante de tempo deste filtro é escolhida como:

$$\mu = 0.002$$

Como o manipulador possui dois graus de liberdade, o seguinte RED de primeira ordem pode ser utilizado:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_0^1 = v_0^1, & v_0^1 = -\lambda_0^1 |\zeta_0^1 - e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(\zeta_0^1 - e_1) + \zeta_1^1, \\ \dot{\zeta}_1^1 = -\lambda_1^1 \text{sgn}(\zeta_1^1 - v_0^1), \\ \dot{\zeta}_0^2 = v_0^2, & v_0^2 = -\lambda_0^2 |\zeta_0^2 - e_2|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(\zeta_0^2 - e_2) + \zeta_1^2, \\ \dot{\zeta}_1^2 = -\lambda_1^2 \text{sgn}(\zeta_1^2 - v_0^2), \end{cases} \quad (6.42)$$

Neste caso, a estimativa  $\hat{\nu}_r$  do RED é dada por:

$$\hat{\nu}_r = [\zeta_1^1 \quad \zeta_1^2] \quad (6.43)$$

Os parâmetros do RED são ajustados do seguinte modo:

$$\lambda_0^1 = \lambda_0^2 = 1.5\sqrt{C_2}; \quad \lambda_1^1 = \lambda_1^2 = 1.1C_2; \quad C_2 = 10$$

Adotando o procedimento sugerido no Capítulo 5, os parâmetros da função de chaveamento (6.20) são escolhidos como:

$$\bar{d}_\alpha = 100\mu; \quad \Delta = 50\mu$$

As mesmas condições iniciais escolhidas na Seção (2.5) são consideradas:

$$q(0) = [1.5 \quad -0.75]^T \text{ (rad)}, \quad \dot{q}(0) = [1 \quad 1.5]^T \text{ (rad/s)}, \quad \vartheta(0) = -\frac{1}{\mu}e(0)$$

As condições iniciais do RED são escolhidas iguais a zero. Para realizar a integração numérica é utilizado o método de Euler com passo de integração igual a  $h = 10^{-5}$ . Para facilitar, os parâmetros utilizados na simulação são apresentados na Tabela 6.1

Observando a Figura 6.3 pode ser verificado que o esquema de controle proposto é capaz de garantir rastreamento exato, mesmo com incertezas paramétricas e dinâmicas não modeladas. Nas Figuras 6.4(a) e 6.4(b) pode ser visto que, após um processo transiente, apenas o RED é selecionado pelo esquema de estimação híbrido, conforme previsto na teoria. O sinal de controle é apresentado nas Figuras 6.4(c) e 6.4(d). Além disso, na Figura 6.5 mostra-se que o estado completo do erro  $X_e$  converge para zero, conforme esperado.

Comparando os gráficos apresentados na Figura 6.5 com os da Figura 2.5, pode ser visto que o desempenho dos controladores é bastante similar. Por outro lado, o esforço de controle utilizado pelo esquema considerado nesta seção é maior do que aquele utilizado pelo controlador da Seção 2.5, conforme pode ser verificado nas Figuras 6.4 e 2.6. Porém, deve ser destacado que o esquema de controle da Seção 2.5 é projetado considerando o conhecimento do vetor de parâmetros  $\theta$ , não sendo capaz de fornecer rastreamento exato caso o atrito de Coulomb seja incluído no modelo dinâmico do WAM.

TABELA 6.1: Parâmetros utilizados na simulação numérica apresentada na Seção 6.6.

Elemento	Valor
Atrito de Coulomb (dinâmica não modelada)	$f_c(\dot{q}) = [1.5\text{sgn}(\dot{q}_1) \ 0.71\text{sgn}(\dot{q}_2)]$
Sinal de Entrada	$q_d(t) = [0.8 \sin(t) \ 0.8 \sin(t)]$
Controle Vetorial Unitário: (6.26) e (6.27)	$\varepsilon_2 = 1, \ \varsigma = 0.5, \ c_h = 1, \ \Delta_h = 5$
Função de Modulação: $\varrho(t) =  Y(q_d(t), \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d(t))  c_\theta + \bar{f}_c$	$Y(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$ definida em (6.41), $c_\theta = 2, \ \bar{f}_c = 1.5$
Controlador PD	$K_p = \text{diag} \{45, 45\},$ $K_d = \text{diag} \{15, 15\}$
Filtro de Avanço (6.30)	$\mu = 0.002$
RED (6.42) e (6.43)	$\lambda_0^1 = \lambda_0^2 = 1.5C_2^{1/2}, \ C_2 = 10$ $\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = 1.1C_2,$
Função de Chaveamento (6.20)	$\bar{d}_\alpha = 100\mu, \ \Delta = 50\mu$
Condições Iniciais	$q(0) = [1.5 \ -0.75]^T \ \dot{q}(0) = [1 \ 1.5]^T$ $\vartheta(0) = -\frac{1}{\mu}e(0)$
Integração Numérica	Método de Euler: $h = 10^{-5}$

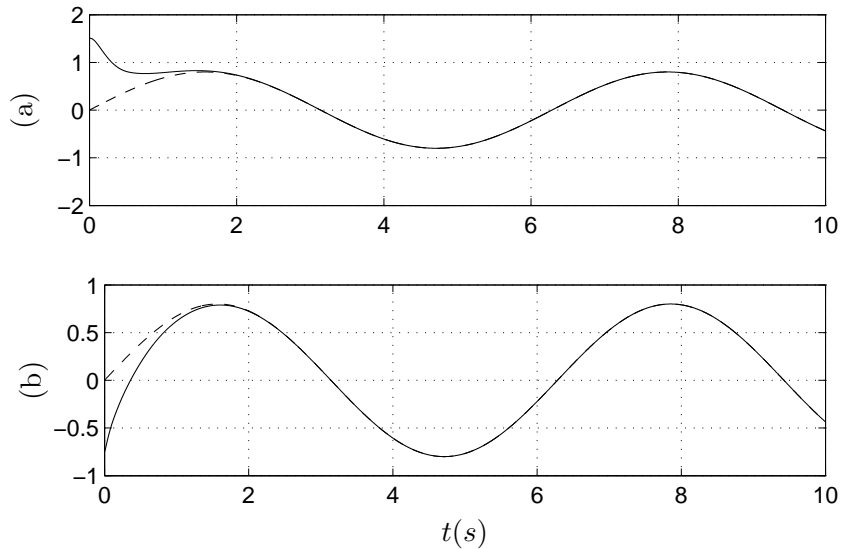


FIGURA 6.3: Manipulador WAM com atrito de Coulomb controlado por um PD + UVC + GRED: Rastreamento: (a) (- -) posição desejada  $q_{d1}$  e (—) posição  $q_1$  (rad); (b) (- -) posição desejada  $q_{d2}$  e (—) posição  $q_2$  (rad)

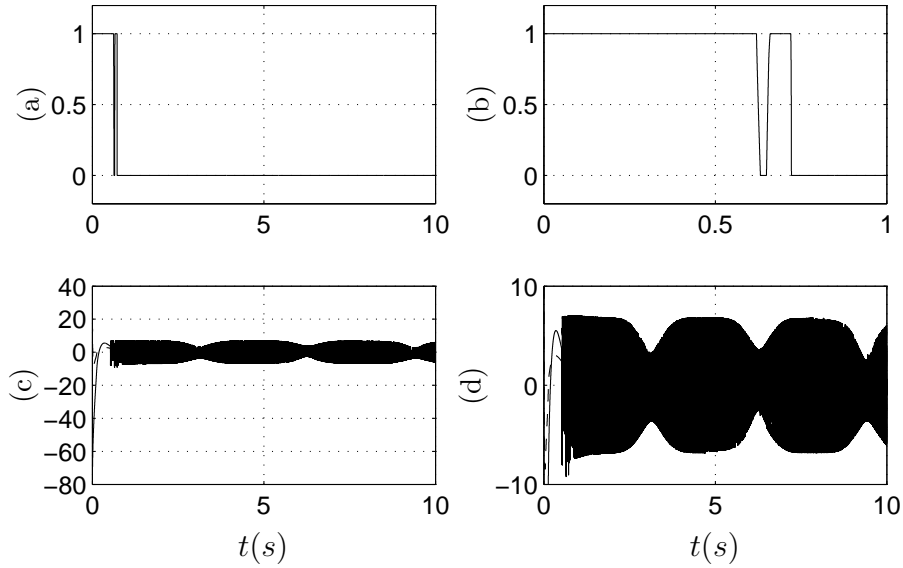


FIGURA 6.4: Manipulador WAM com atrito de Coulomb controlado por um PD + UVC + GRED: (a) Comportamento temporal da função de chaveamento  $\alpha(\tilde{v}_{rl})$ ; (b) Trecho Ampliado do Sinal  $\alpha(t)$ ; (c) Sinal de Controle  $u$ ; (d) Trecho Ampliado do Sinal  $u(t)$

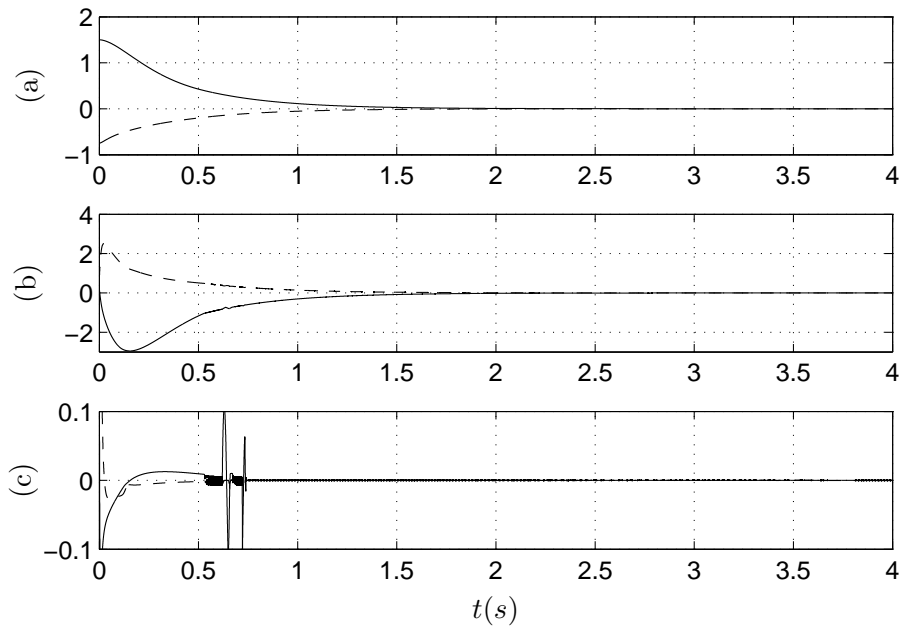


FIGURA 6.5: Manipulador WAM com atrito de Coulomb controlado por um PD + UVC + GRED: (a) Trecho Ampliado do Sinal  $e(t)$  (rad): (—)  $e_1$  e (- -)  $e_2$ ; (b) Trecho Ampliado do Sinal  $\dot{e}(t)$  (rad/s): (—)  $\dot{e}_1$  e (- -)  $\dot{e}_2$ ; (c)  $\epsilon_e(t)$  (rad/s): (—)  $\epsilon_{e_1}$  e (- -)  $\epsilon_{e_2}$

## 6.7 Conclusões

Neste capítulo, o esquema de estimação híbrido, denominado de GRED, foi generalizado para uma classe mais abrangente de sistemas não-lineares, multivariáveis e incertos com grau relativo global, uniforme e arbitrário. Considerando um contexto mais amplo, foi mostrado que o GRED pode ser implementado utilizando qualquer estimador convencional, desde que este garanta que o sistema completo do erro seja ISpS com respeito a uma perturbação na sua saída. A idéia principal foi explorar esta propriedade para projetar um esquema de chaveamento, que combina o RED com o estimador convencional, de forma a assegurar estabilidade global e garantir rastreamento exato.

Além disso, foram apresentadas condições suficientes para que o GRED possa ser empregado com sucesso, neste contexto mais amplo. Em seguida, mostrou-se que uma importante classe de sistemas de Euler-Lagrange com  $n$  graus de liberdade controlada por um PD causal, implementado utilizando-se um GRED, com um termo de compensação *feedforward* nominal, em conjunto com um termo de controle vetorial unitário, satisfaz tais condições. O termo UVC é utilizado para lidar com as incertezas paramétricas do termo de compensação *feedforward*, podendo também ser utilizado para rejeitar perturbações limitadas, desde de que a função de modulação seja escolhida de forma apropriada. Desta forma, foi provado que é possível garantir rastreamento global e exato para esta classe de sistemas para o caso em que o modelo dinâmico seja incerto, usando apenas realimentação de saída.

# Capítulo 7

## Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho, o problema de rastreamento de trajetória para sistemas não-lineares foi abordado. Foram propostas estratégias de controle via realimentação de saída capazes de assegurar convergência global do *erro de rastreamento* para zero, mantendo todos os sinais do sistema em malha fechada uniformemente limitados.

Inicialmente, foi considerado o problema de rastreamento global para uma importante classe de sistemas de Euler-Lagrange com  $n$  graus de liberdade. Através de uma análise de estabilidade detalhada, foi provado que um simples controlador PD causal com compensação *feedforward* torna o sistema completo do erro uniformemente globalmente assintoticamente estável. O resultado foi obtido assumindo, apenas, a existência do amortecimento natural, que pode ser arbitrariamente pequeno. Porém, deve ser destacado que esta estratégia de controle só é capaz de assegurar rastreamento exato, na ausência de perturbações e de dinâmicas não modeladas e se o modelo dinâmico for perfeitamente conhecido. Além disso, o limitante para a constante de tempo do filtro de avanço, necessário para garantir convergência global do estado do sistema completo do erro, fornecido pela análise é, em geral, bastante conservativo.

Para abordar o problema de rastreamento global e exato para sistemas com modelo dinâmico incerto foi proposto um esquema de estimação híbrido, denominado de GRED, que combina um diferenciador baseado em modos deslizantes de ordem superior com um estimador convencional. Este esquema de estimação foi utilizado inicialmente em conjunto com um controlador por modos deslizantes para uma classe de plantas não-lineares, monovariáveis e incertas, com grau relativo global, uniforme

e arbitrário. Através de uma análise de estabilidade, foi provado que esta estratégia de controle torna o sistema completo do erro uniformemente globalmente exponencialmente estável com respeito a um pequeno conjunto residual, além de assegurar convergência global do estado do sistema do erro para zero. O principal problema desta estratégia é a sua sensibilidade a ruídos de medição, que provocam uma degradação significativa no desempenho do esquema de controle.

Em seguida, considerando um contexto mais amplo, foi mostrado que o esquema de estimação proposto poderia ser utilizado em diferentes estratégias de controle. Além disso, foi mostrado que o esquema de chaveamento utilizado pelo GRED poderia ser implementado com qualquer estimador, dado que este forneça uma propriedade de estabilidade global prática para o sistema em malha fechada. Também foram apresentadas condições suficientes para que o GRED possa ser aplicado para uma classe mais abrangente de sistemas não-lineares, multivariáveis e incertos com grau relativo global, uniforme e arbitrário, garantindo rastreamento global e exato. Para ilustrar, foi mostrado que o problema de rastreamento global e exato para a classe de sistemas de Euler-Lagrange considerada também poderia ser resolvido no caso incerto, utilizando o GRED. A estratégia de controle proposta consiste em utilizar um controlador PD causal, cujo termo derivativo é implementado através de um GRED, em conjunto com um termo de compensação *feedforward nominal*, e utilizar um termo de controle vetorial unitário, também implementado através de um GRED, para rejeitar as incertezas e perturbações de entrada limitadas presentes no sistema.

Por fim, deve ser registrado que as hipóteses consideradas nos Capítulos 5 e 6 são bem restritivas, não sendo satisfeitas por muitos sistemas não-lineares de interesse. Por este motivo é interessante tentar reduzir o conjunto de hipóteses necessárias para o projeto do controlador, com o objetivo de ampliar a classe de sistemas abordada.

## 7.1 Trabalhos Futuros

Os seguintes tópicos de pesquisa para a continuação deste trabalho são propostos:

1. **Extensão do controlador GRED-SMC :**

Um tema interessante de pesquisa seria estender o controlador GRED-SMC

(proposto no Capítulo 5) para plantas multivariáveis. A idéia básica seria substituir a lei de controle utilizada por outra lei baseada no controle vetorial unitário. Esta extensão pode, provavelmente, ser obtida utilizando os desenvolvimentos apresentados em (Hsu et al. 2002, Hsu, Peixoto, Cunha, Costa & Lizarralde 2006) e os resultados apresentados no Capítulo 6.

## 2. **Ampliação da classe de sistemas de Euler-Lagrange:**

Em (Angeli 1999), considerando o problema de regulação, foi mostrado que a propriedade de ISS poderia ser obtida para manipuladores com juntas prismáticas e de revolução, utilizando um controlador PD não causal (que utiliza medidas de velocidade) com um ganho proporcional cúbico. Aparentemente, por meio de desenvolvimentos similares aos apresentados na Seção 2.6 é possível estender este resultado, considerando apenas realimentação de posição. Além disso, espera-se que usando a técnica de análise *ISS-regulator approach*, seja possível provar rastreamento global para esta classe mais abrangente de manipuladores.

## 3. **Redução do Conservadorismo:**

Conforme foi evidenciado pelos resultados de simulação apresentados no Capítulo 2, a constante de tempo do filtro de avanço de fase pode ser sintonizada com um valor muito maior do que aquele que seria permitido pela análise. Desta forma, propõe-se a elaboração de novas técnicas de análise e de outras funções de Lyapunov, para reduzir o conservadorismo do limitante para a constante de tempo do filtro de avanço de fase que assegura a convergência global do estado do erro.

## 4. **Resultados Experimentais:**

Outro tema de pesquisa interessante seria testar experimentalmente o desempenho da estratégia de controle proposta para sistemas de Euler-Lagrange incertos, apresentada na Seção 6.5, investigando a influência de problemas práticos de implementação, tais como: ruído de medição (e.g. quantização), dinâmicas e perturbações não-modeladas, discretização do controlador, *chattering*, dentre outros.



## 5. Sistemas com não-linearidades de setor nos estados não medidos:

A partir dos desenvolvimentos apresentados nos Capítulos 3 e 6, espera-se que uma solução possa ser obtida para o problema de rastreamento global e exato para uma classe de plantas com não-linearidades de setor nos estados não medidos, que apresentem a mesma propriedade de passividade considerada em (Aamo et al. 2001, Arcak & Teel 2002). Além disso, acredita-se que o problema possa ser resolvido mesmo que o sistema apresente incertezas paramétricas nestas não-linearidades, contanto que as não-linearidades sejam dissipativas. Para ilustrar este tópico de pesquisa, considere o seguinte exemplo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\theta x_2^3 + u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

onde  $y$  é a saída medida e  $\theta \in [1, 3]$ . Como o parâmetro  $\theta$  é suposto como sendo positivo, a não-linearidade  $\phi(x_2) = -\theta x_2^3$  atua no sentido de estabilizar o sistema.

# Referências Bibliográficas

- Aamo, O., Arcak, M., Fossen, T.-I. & Kokotović, P. (2001), ‘Global output tracking control of a class of Euler-Lagrange systems with monotonic nonlinearities in the velocities’, *International Journal of Control* **74**(7), 649–658.
- Abraham, R., Marsden, J. E. & Ratiu, T. (1988), *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Applied Mathematical Sciences; vol. 75, 2nd edn, Springer-Verlag.
- Ailon, A. & Ortega, R. (1993), ‘An observer-based controller for robot manipulators with flexible joints’, *Systems and Contr. Letters* **21**, 329–335.
- Ambrosino, G., Celentano, G. & Garofalo, F. (1984), ‘Variable structure MRAC systems’, *Int. J. Contr.* **39**(6), 1339–1349.
- Angeli, D. (1999), ‘Input-output-to-state stability of pd-controlled robotic systems’, *Automatica* **35**, 1285–1290.
- Arcak, M. & Teel, A. (2002), ‘Input-to-state stability for a class of lurie systems’, *Automatica* **38**, 1945–1949.
- Arimoto, S. (1995a), ‘Fundamental problems of robot control: Part I. Innovations in the realm of robot servo-loops’, *Robotica* **13**, 19–27.
- Arimoto, S. (1995b), ‘Fundamental problems of robot control: Part II. A nonlinear circuit theory towards an understanding of dexterous motions’, *Robotica* **13**, 111–122.
- Arteaga, M. A. & Kelly, R. (2004), ‘Robot control without velocity measurements: New theory and experimental results’, *IEEE Trans. Robotics and Automation* **20**, 297–308.

- Atassi, N. A. & Khalil, H. K. (1999), ‘A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **44**, 1672–1687.
- Bartolini, G., Ferrara, A. & Usai, E. (1998), ‘Chattering avoidance by second-order sliding mode control’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **43**, 241–246.
- Bartolini, G., Levant, A., Pisano, A. & Usai, E. (2002), Higher-order sliding modes for output-feedback control of nonlinear uncertain systems, *in* X. Yu & J.-X. Xu, eds, ‘Variable Structure Systems: Towards the 21st Century’, Springer-Verlag, chapter 4.
- Bartolini, G., Pisano, A. & Usai, E. (2001), ‘Global stabilization for nonlinear uncertain systems with unmodeled actuator dynamics’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **46**, 1826–1832.
- Bartolini, G. & Zolezzi, T. (1988), ‘The V.S. approach to the model reference control of nonminimal phase linear plants’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **33**(9), 859–863.
- Berghuis, H. & Nijmeijer, H. (1993*a*), ‘Global regulation of robots using only position measurements’, *Systems and Contr. Letters* **21**, 289–293.
- Berghuis, H. & Nijmeijer, H. (1993*b*), ‘A passivity approach to controller-observer design for robots’, *IEEE Trans. Robotics and Automation* **9**(6), 740–754.
- Besançon, G., Battilotti, S. & Lanari, L. (2003), ‘A new separation result for a class of quadratic-like systems with application to Euler-Lagrange models’, *Automatica* **39**, 1085–1093.
- Boiko, I. & Fridman, L. (2005), ‘Analysis of chattering in continuous slidingmode controllers’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **50**(9), 1442–1446.
- Bondarev, A. G., Bondareva, S. A., Kostyleva, N. E. & Utkin, V. I. (1985), ‘Sliding modes in systems with asymptotic state observers’, *Autom. Remote Control* **46**(6), 679–684. Pt. 1.
- Brogliato, B., Lozano, R., Maschke, B. & Egeland, O. (2007), *Dissipative Systems Analysis and Control: Theory and Applications*, 2nd edn, Springer-Verlag.

- Burkov, I. (1995), Mechanical system stabilization via differential observer, in ‘Proc. IFAC Conf. System Structure Control’, Nantes, France, pp. 532–535.
- Byrnes, C. I. & Isidori, A. (1991), ‘Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **36**(10), 1122–1137.
- Carmo, M. P. (1976), *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall.
- Chien, C.-J., Sun, K.-C., Wu, A.-C. & Fu, L.-C. (1996), ‘A robust MRAC using variable structure design for multivariable plants’, *Automatica* **32**(6), 833–848.
- Dixon, W. E., Zergeroglu, E. & Dawson, D. M. (2004), ‘Global robust output feedback tracking control of robot manipulators’, *Robotica* **22**, 351–357.
- Edwards, C. & Spurgeon, S. (1998), *Sliding Mode Control: Theory and Applications*, Systems and Control Book Series, Taylor & Francis.
- Emelyanov, S. & Korovin, S. (2000), *Control of Complex and Uncertain Systems*, Springer Verlag.
- Emelyanov, S. V. (1970), *Theory of variable structure systems*, Nauka.
- Emelyanov, S. V., Korovin, Nersisian & Nisezon (1992), ‘Discontinuous output feedback stabilizing an uncertain MIMO plant’, *Int. J. Contr.* **55**(1), 83–109.
- Emelyanov, S. V., Korovin, S. K. & Levantovsky, L. V. (1986), ‘Higher order sliding regimes in the binary control systems’, *Soviet Physics, Doklady* **31**, 291–293.
- Esfandiari, F. & Khalil, H. (1992), ‘Output feedback stabilization of fully linearizable systems’, *Int. J. Contr.* **56**, 1007–1037.
- Filippov, A. F. (1964), ‘Differential equations with discontinuous right-hand side’, *American Math. Soc. Translations* **42**(2), 199–231.
- Filippov, A. F. (1988), *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Kluwer Academic Publishers.
- Fossen, T. I. (1994), *Guidance and control of ocean vehicles*, John Wiley.

- Freeman, R. A. & Kokotovic, P. V. (1996), ‘Tracking controllers for systems linear in the unmeasured states’, *Automatica* **32**(5), 735–746.
- Fridman, L. (2001), ‘An averaging approach to chattering’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **46**(8), 1260–1264.
- Fridman, L. & Levant, A. (2002), Higher order sliding modes, *in* Perruquetti & B. J. P., eds, ‘Sliding Mode Control in Engineering’, Marcel Dekker, New York, pp. 53–101.
- Gong, Q. & Qian, C. (2007), ‘Global practical tracking of a class of nonlinear systems by output feedback’, *Automatica* **43**, 184–189.
- Gutman, S. (1979), ‘Uncertain dynamical systems — a Lyapunov min-max approach’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **24**(3), 437–443.
- Gutmann, S. & Leitmann, G. (1975), Stabilizing control for linear systems with bounded parameters and input uncertainty, *in* ‘Proc. IFIC Conference on Optimization Techniques’, Nice, France, pp. 8–14.
- Hsu, L. (1997), ‘Smooth sliding control of uncertain systems based on a prediction error’, *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control* **7**, 353–372.
- Hsu, L., Araújo, A. D. & Costa, R. R. (1994), ‘Analysis and design of I/O based variable structure adaptive control’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **39**(1), 4–21.
- Hsu, L. & Costa, R. R. (1989), ‘Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurement: Part I’, *Int. J. Contr.* **49**(2), 399–416.
- Hsu, L. & Costa, R. R. (1996), Adaptive control with sliding modes: theory and applications, *in* ‘Minicurso Proc. XI Congresso Brasileiro de Automática’, São Paulo, pp. 39–60.
- Hsu, L., Costa, R. R. & Cunha, J. P. V. S. (2003), ‘Model-reference output-feedback sliding mode controller for a class of multivariable nonlinear systems’, *Asian Journal of Control* **5**(4). (To appear).

- Hsu, L., Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. & Lizarralde, F. (2002), Multivariable output-feedback sliding mode control, *in* X. Yu & J.-X. Xu, eds, ‘Variable Structure Systems: Towards the 21st Century’, Springer-Verlag, chapter 12.
- Hsu, L., Lizarralde, F. & Araújo, A. (1997), ‘New results on output feedback VS-MRAC: Design and stability analysis’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **42**(3), 386–393.
- Hsu, L., Peixoto, A. J., Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. & Lizarralde, F. (2006), Output feedback sliding mode control for a class of uncertain multivariable systems with unmatched nonlinear disturbances, *in* ‘Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control’, Springer-Verlag, pp. 195–225.
- Ioannou, P. & Sun, K. (1996), *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall.
- Isidori, A. (1995), *Nonlinear Control Systems*, 3rd edn, Springer-Verlag.
- Isidori, A. (2000), ‘A tool for semiglobal stabilization of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems via output feedback’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **45**(10), 1817–1827.
- Itkis, U. (1976), *Control Systems of Variable Structure*, Wiley.
- Jiang, Z. P. & Mareels, M. Y. (1997), ‘A small-gain control method for nonlinear cascade systems with dynamic uncertainties’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **42**(3), 292–308.
- Jiang, Z. P., Mareels, M. Y. & Wang, Y. (1996), ‘A Lyapunov formulation of the nonlinear small-gain theorem for interconnected ISS systems’, *Automatica* **32**(8), 1211–1215.
- Jiang, Z. P., Teel, A. R. & Praly, L. (1994), ‘Small-gain theorem for ISS systems and applications’, *Math. Contr. Signals Systems* **7**, 95–120.
- Kelly, R. (1993a), ‘Comments on “adaptive PD controller for robot manipulators”’, *IEEE Trans. Robotics and Automation* **9**(1), 117–119.

- Kelly, R. (1993*b*), A simple set-point robot controller by using only position measurements, *in* ‘Preprint 12<sup>th</sup> IFAC World Congress’, Vol. 6, Sydney, pp. 173–176.
- Khalil, H. (2002), *Nonlinear Systems*, 3 edn, Prentice Hall.
- Khalil, H. K. & Esfandiari, F. (1993), ‘Semiglobal stabilization of a class of nonlinear systems using output feedback’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **38**(9), 1412–1415.
- Koditscheck, D. (1988), Application of a new lyapunov function to global adaptive attitude tracking, *in* ‘Proc. IEEE Conf. Dec. and Contr.’, Austin, TX.
- Krichman, M., Sontag, E. & Wang, Y. (2001), ‘Input-output-to-state stability’, *SIAM J. Control Optim.* **39**(6), 1874–1928.
- Krishnamurthy, P., Khorrami, F. & Jiang, Z. P. (2002), ‘Global output feedback tracking for nonlinear systems in generalized output-feedback canonical form’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **47**(5), 814–819.
- Levant, A. (1993), ‘Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control’, *Int. J. of Robust and Nonlinear Contr.* **58**(6), 1247–1263.
- Levant, A. (1998), ‘Robust exact differentiation via sliding mode technique’, *Automatica* **34**(3), 379–384.
- Levant, A. (1999), Controlling output variables via higher order sliding modes, *in* ‘Proc. of the European Control Conference’, Karlsruhe, Germany.
- Levant, A. (2001*a*), Higher order sliding modes and arbitrary-order exact robust differentiation, *in* ‘Proc. of the European Control Conference’, Porto, Portugal, pp. 996–1001.
- Levant, A. (2001*b*), ‘Universal SISO sliding-mode controllers with finite time convergence’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **46**, 1447–1451.
- Levant, A. (2003), ‘Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control’, *Int. J. Contr.* **76**(9), 924–941.

- Loria, A. (1996), ‘Global tracking control of one degree of freedom euler-lagrange systems without velocity measurements’, *European J. Contr.* **2**, 144–151.
- Loria, A. & Melhem, K. (2002), ‘Position feedback global tracking control of EL systems: A state transformation approach’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **47**(5), 841–847.
- Lu, X.-Y. & Spurgeon, S. K. (1999), ‘Output feedback stabilization of MIMO nonlinear systems via dynamic sliding modes’, *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.* **9**, 275–305.
- Marino, R. & Tomei, P. (1995), *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*, Prentice Hall.
- Mazenc, F., Praly, L. & Dayawansa, W. P. (1994), ‘Global stabilization by output feedback: examples and counterexamples’, *Systems and Contr. Letters* **23**, 119–125.
- McIntyre, M. L., Dixon, W. E., Dawson, D. M. & Walker, I. D. (2005), ‘Fault identification for robot manipulators’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **21**(5), 1028–1034.
- Min, L. J. & Hsu, L. (2000), Sliding controller for output feedback of uncertain nonlinear systems: global and semi-global results, *in* ‘Proc. 6th IEEE Int. Workshop on Variable Structure Sys.’, Gold Coast, Australia, pp. 169–178.
- Moreno, J. & Gonzalez, S. (2006), An adaptive output feedback tracking controller for manipulators subject to constrained torques, *in* ‘Proc. IEEE Conf. Dec. and Contr.’, San Diego, pp. 2026–2031.
- Murray, R., Li, Z. & Sastry, S. (1994), *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press.
- Narendra, K. & Annaswamy, A. (1989), *Stable Adaptive Systems*, Prentice Hall.
- Nijmeijer, H. & van der Schaft, A. J. (1990), *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer Verlag.



- Nunes, E. V. L. & Hsu, L. (2006), Rastreamento global e exato de sistemas incertos usando diferenciadores exatos e observador de alto ganho, *in* ‘Anais do 16 Congresso Brasileiro de Automática’, Salvador, BA, pp. 1303–1308.
- Nunes, E. V. L. & Hsu, L. (2008), Rastreamento global de manipuladores robóticos usando apenas medidas de posição, *in* ‘Anais do 17 Congresso Brasileiro de Automática’, Juiz de Fora, MG.
- Nunes, E. V. L. & Hsu, L. (2009), ‘Global tracking for robot manipulators using a simple causal PD controller plus feedforward’, *Robotica* (**to appear**).
- Nunes, E. V. L., Hsu, L. & Lizarralde, F. (2004), Globally stable output-feedback sliding mode control with asymptotic exact tracking, *in* ‘Proc. American Contr. Conf.’, Boston, pp. 638–643.
- Nunes, E. V. L., Hsu, L. & Lizarralde, F. (2006), Output-feedback sliding mode control for global asymptotic tracking of uncertain systems using locally exact differentiators, *in* ‘Proc. American Contr. Conf.’, Minneapolis, pp. 5407–5412.
- Nunes, E. V. L., Hsu, L. & Lizarralde, F. (2008a), Arbitrarily small damping allows global output feedback tracking of a class of Euler-Lagrange systems., *in* ‘Proc. American Contr. Conf.’, Seattle, pp. 377–382.
- Nunes, E. V. L., Hsu, L. & Lizarralde, F. (2008b), Global output feedback tracking controller based on hybrid estimation for a class of uncertain nonlinear systems., *in* ‘Proc. 10th Int. Workshop on Variable Structure Systems’, Antalya, Turkey, pp. 141–146.
- Nunes, E. V. L., Hsu, L. & Lizarralde, F. (2009), ‘Global tracking for uncertain systems using output-feedback sliding mode control’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* (**to appear**).
- Oh, S. & Khalil, H. (1997), ‘Nonlinear output feedback tracking using high-gain observer and variable structure control’, *Automatica* **33**, 1845–1856.
- Oh, S. & Khalil, H. K. (1995), ‘Output feedback stabilization using variable structure control’, *Int. J. Contr.* **62**(4), 831–848.

- Oliveira, T. R., Peixoto, A. J., Nunes, E. V. L. & Hsu, L. (2007), ‘Control of uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree and unknown control direction using sliding modes’, *Int. J. Adaptive Contr. Signal Processing* **21**(8/9), 692–707.
- Ortega, R., Loria, A., Nicklasson, P. J. & Sira-Ramirez, H. (1998), *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: Mechanical, electrical and electromechanical applications*, Springer-Verlag.
- Rosier, L. (1992), ‘Homogeneous lyapunov function for homogeneous continuous vector field’, *Systems and Contr. Letters* **19**, 467–473.
- Sadegh, N. & Horowitz, R. (1990), ‘Stability and robustness analysis of a class of adaptive controllers for robotic manipulators’, *Int. J. Robotics Res.* **9**(3), 74–92.
- Santibañez, V. & Kelly, R. (2001a), Global asymptotic stability of bounded output feedback tracking control for robot manipulators, in ‘Proc. IEEE Conf. Dec. and Contr.’, Orlando, pp. 1378–1379.
- Santibañez, V. & Kelly, R. (2001b), ‘PD control with feedforward compensation for robot manipulators: analysis and experimentation’, *Robotica* **19**, 11–19.
- Santibañez, V., Kelly, R. & Loria, A. (2005), *Control of Robot Manipulators in Joint Space*, Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer-Verlag.
- Sastry, S. (1999), *Nonlinear Systems: analysis, stability and control*, Springer Verlag.
- Sastry, S. S. & Bodson, M. (1989), *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Prentice Hall.
- Schwartz, B., Isidori, A. & Tarn, T. J. (1999), ‘Global normal forms for MIMO nonlinear systems, with applications to stabilization and disturbance attenuation’, *Math. Contr. Signals Systems* **12**, 121–142.
- Sciavicco, L. & Siciliano, B. (2000), *Modeling and Control of Robot Manipulator*, Springer Verlag.

- Slotine, J. J., Hedrick, J. K. & Misawa, E. A. (1987), ‘On sliding observers for nonlinear systems’, *ASME J. of Dynamics Systems Measurem. and Contr.* **109**, 245–252.
- Slotine, J. & Li, W. (1991), *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall.
- Sontag, E. (1989), ‘Smooth stabilization implies coprime factorization’, *IEEE Trans. Automat. Control* **34**(4), 435–443.
- Sontag, E. (1998), *Mathematical Control Theory*, 2 edn, Springer-Verlag.
- Sontag, E. & Wang, Y. (1995), ‘On characterizations of the input-to-state stability property’, *Systems Control Lett.* **24**(5), 351–359.
- Sontag, E. & Wang, Y. (1997), ‘Output-to-state stability and detectability of nonlinear systems’, *Systems Control Lett.* **29**(5), 279–290.
- Spong, M. W. & Vidyasagar, M. (1989), *Robot Dynamics and Control*, John Wiley&Sons.
- Takagaki, M. & Arimoto, S. (1981), ‘A new feedback method for dynamic control of manipulators’, *ASME J. of Dynamics Systems Measurem. and Contr.* **102**, 119–125.
- Tao, G. & Ioannou, P. A. (1989), A MRAC for multivariable plants with zero residual tracking error, in ‘Proc. IEEE Conf. Dec. and Contr.’, Tampa, USA, pp. 1597–1600.
- Tomei, P. (1991), ‘Adaptive PD controller for robot manipulators’, *IEEE Trans. Robotics and Automation* **7**(4), 565–570.
- Utkin, V., Guldner, J. & Shi, J. (1999), *Sliding mode control in electromechanical systems*, Taylor & Francis.
- Utkin, V. I. (1978), *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*, MIR.
- Utkin, V. I. (1992), *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer-Verlag.

- Walcott, B. L. & Zak, S. (1988), ‘Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications’, *IEEE Trans. Syst. Man. and Cyber.* **18**(1), 88–104.
- Young, K. K. D. (1977), ‘Asymptotic stability of model reference systems with variable structure control’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* pp. 279–281.
- Zak, S. & Hui, S. (1993), ‘On variable structure output feedback controllers for uncertain systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **38**(10), 1509–1512.
- Zhang, F., Dawson, D. M., de Queiroz, M. S. & Dixon, W. E. (2000), ‘Global adaptive output feedback tracking control of robot manipulators’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **45**(6), 1203–1208.

# Apêndice A

## Trabalhos Publicados

Esta seção destaca e apresenta uma breve descrição das principais publicações realizadas até este momento:

1. No artigo publicado em congresso (Nunes et al. 2006), foi proposto um controlador por modos deslizantes baseado num estimador híbrido, denominado de GRED, para resolver o problema de rastreamento global e exato para plantas lineares, monovariáveis e incertas com grau relativo arbitrário. Neste artigo, foram apresentados resultados experimentais e de simulação para validar os resultados teóricos obtidos e para comprovar a viabilidade da implementação prática do esquema proposto. O resultado obtido foi consolidado no artigo aceito para publicação em periódico (Nunes et al. 2009), que apresenta o esquema de controle de uma forma mais clara e concisa, além de fornecer uma nova prova de estabilidade baseada em métodos de Lyapunov e nos conceitos de estabilidade no sentido entrada-estado.
2. No artigo publicado em congresso (Nunes & Hsu 2006), foi mostrado que o esquema de chaveamento do GRED poderia ser implementado utilizando um HGO no lugar do filtro de avanço de fase. Considerando um contexto muito mais amplo, o artigo publicado em congresso (Nunes et al. 2008*b*) apresentou uma tentativa preliminar de se generalizar o GRED para sistemas não-lineares multivariáveis e incertos.

3. O problema de rastreamento para sistemas não-lineares, monovariáveis e incertos com grau relativo arbitrário e direção de controle desconhecida<sup>1</sup> foi tratado no artigo em periódico (Oliveira, Peixoto, Nunes & Hsu 2007). Neste artigo, foi realizada a análise teórica de estabilidade de um controlador por modos deslizantes para plantas não lineares em que as não-linearidades foram encaradas como perturbações de um subsistema linear e incerto, podendo ser dependentes do estado e possivelmente descasadas com o sinal de controle. A classe considerada inclui plantas triangulares nos estados não medidos e com crescimento linear. Para tratar do problema do desconhecimento da direção de controle um esquema de estimação baseado em uma função de monitoração foi proposto. Para assegurar rastreamento exato o GRED foi utilizado, obtendo-se propriedades de estabilidade globais ou semi-globais.
4. Nos artigos publicados em congressos (Nunes, Hsu & Lizarralde 2008a, Nunes & Hsu 2008), foi provado que um simples controlador PD causal é capaz de resolver o problema de rastreamento global e exato para manipuladores robóticos com  $n$  graus de liberdade e juntas de revolução. O resultado é obtido considerando, apenas, a existência do amortecimento natural e o conhecimento do modelo dinâmico do manipulador. Este resultado foi consolidado no artigo aceito para publicação em periódico (Nunes & Hsu 2009). Neste artigo, o resultado foi estendido para uma classe mais abrangente de sistema de Euler-Lagrange, que inclui navios, veículos submarinos, dentre outros.
5. No artigo publicado em congresso (Nunes et al. 2008b), uma solução para o problema de rastreamento global e exato para uma classe de sistemas de Euler-Lagrange incertos foi proposta. A idéia principal foi utilizar um controlador PD implementado utilizando-se um GRED em conjunto com um termo de compensação *feedforward* nominal e um termo de controle vetorial unitário para rejeitar perturbações limitadas e incertezas.

---

<sup>1</sup>Para plantas SISO a direção de controle é o sinal do ganho de alta frequência da planta

# Apêndice B

## Noções Básicas de Geometria

### Diferencial

O conceito de variedades é um dos conceitos mais importantes em Geometria Diferencial. Falando de modo grosseiro, as variedades podem ser entendidas “localmente” como espaços vetoriais, embora sejam globalmente superfícies curvas. Dentre os exemplos de variedades presentes no nosso cotidiano, pode-se destacar a superfície da Terra que é “localmente plana”, mas globalmente curva.

A noção intuitiva de que as variedades são “localmente planas”, pode ser entendida da seguinte forma: estes espaços “localmente planos” podem ser gentilmente planificados, de forma a se tornarem espaços vetoriais. Através deste entendimento, pode-se verificar que um cone não pode ser classificado como uma variedade suave, já que nenhuma vizinhança do vértice do cone pode ser vista como um plano.

Neste capítulo serão apresentados conceitos e definições formais para tratar esta noção intuitiva de maneira rigorosa do ponto de vista matemático.

#### B.1 Variedades Suaves e Mapas Suaves

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^k$  e  $V \subset \mathbb{R}^l$  conjuntos abertos. Um mapeamento  $f : U \mapsto V$  é chamado de suave, se todas as derivadas parciais de qualquer ordem existem e são contínuas. De forma mais genérica, se  $X \subset \mathbb{R}^k$  e  $Y \subset \mathbb{R}^l$  são subconjuntos arbitrários de espaços euclidianos (não necessariamente abertos), então a função  $f : X \mapsto Y$  é chamada de suave ou diferenciável se existe um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^k$  que contém  $X$  e um

mapeamento suave  $F : U \mapsto \mathbb{R}^l$  que coincide com  $f$  em  $U \cap X$ . Se  $f : X \mapsto Y$  e  $g : Y \mapsto Z$  são suaves, então a função composta  $h = g \circ f : X \mapsto Z$  também será suave.

**Definição 8** *Homeomorfismo:* Uma função  $f : X \mapsto Y$  é dita como sendo um homeomorfismo se  $f$  é uma função contínua e injetiva com inversa  $f^{-1}$  contínua.

**Definição 9** *Difeomorfismo:* Uma função  $f : X \mapsto Y$  é dita como sendo um difeomorfismo se  $f$  é um homeomorfismo e tanto  $f$  quanto  $f^{-1}$  são funções suaves.

**Definição 10** *Varietade Suave de Dimensão  $m$ :* Um subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^k$  é chamado de variedade suave de dimensão  $m$  se para cada  $x \in M$  existe uma vizinhança  $W \cap M$  ( $W \subset \mathbb{R}^k$ ), que é difeomórfica a um subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  (Sastry 1999).

Um difeomorfismo  $\psi$  de  $U$  em  $W \cap M$  é chamado de parametrização e sua inversa  $\psi^{-1}$  é chamada de sistema de coordenadas em  $W \cap M$ . Estas definições estão ilustradas na figura B.1.

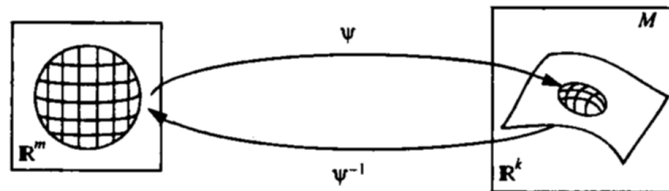


FIGURA B.1: Ilustração da Definição de Variedade.

**Exemplos:**

1. O círculo unitário  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  definido por  $\{(cos\theta, sin\theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$ .
2. O plano  $M \subset \mathbb{R}^3$  definido por  $\{(x, y, z) : ax + by + cz = 0, c \neq 0\}$  é uma variedade suave. De fato, o difeomorfismo  $\psi : U \mapsto W \cap M$  ( $U = \mathbb{R}^2$  e  $W = \mathbb{R}^3$ ), definido por

$$(u, v) \mapsto \left( u, v, \frac{au - bv}{c} \right)$$

é uma parametrização para todo ponto  $p \in M$ .



3. A esfera unitária  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  definida por  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  é uma variedade suave de dimensão 2. De fato, o difeomorfismo

$$\psi_1 : (u, v) \mapsto \left( u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2} \right)$$

para  $u^2 + v^2 < 1$  parametriza a região  $\{S^2 \cap (z > 0)\}$ . Intercambiando os papéis de  $x, y, z$  e o sinal da raiz é possível cobrir toda a esfera  $S^2$ , conforme pode ser visto na figura B.2

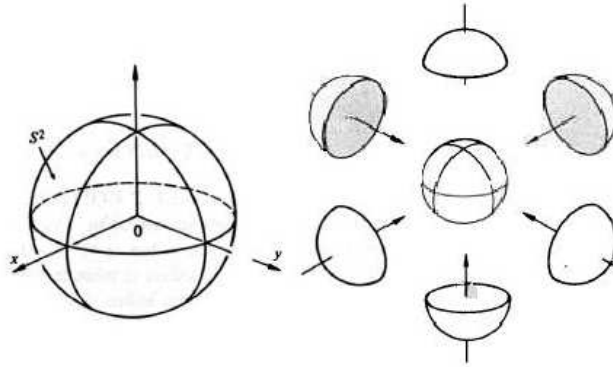


FIGURA B.2: Parametrização da esfera unitária  $S^2$ .

4. Diversas variedades suaves são geradas da seguinte forma:

**Teorema B.1** *Sejam  $f_1, \dots, f_m$ ,  $m \leq n$ , funções suaves no  $\mathbb{R}^n$  (ou em um conjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ ). Defina  $N = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0\}$  e assumamos que o posto da Matriz Jacobiana  $f = (f_1, \dots, f_m)^T$*

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

*é  $m$  para cada  $x^* \in N$ . Então  $N$  é uma variedade suave de dimensão  $n - m$ .*

*Prova: A prova deste Teorema é baseada no Teorema da Função Implícita e pode ser encontrada em (Nijmeijer & van der Schaft 1990)*

## B.2 Mudança de Coordenadas

Seja  $M$  uma variedade suave. Considere  $\psi : U \mapsto M$  e  $\phi : V \mapsto M$  duas parametrizações locais de  $M$ , conforme pode ser visto na figura B.3. Seja  $W =$

$\psi(U) \cap \phi(V) \neq \emptyset$ . Então a função de transição em mudança de parâmetros  $h = \phi^{-1} \circ \psi : U_1 \mapsto V_1$ ,  $U_1 = \psi^{-1}(W)$  e  $V_1 = \phi^{-1}(W)$  é um difeomorfismo.

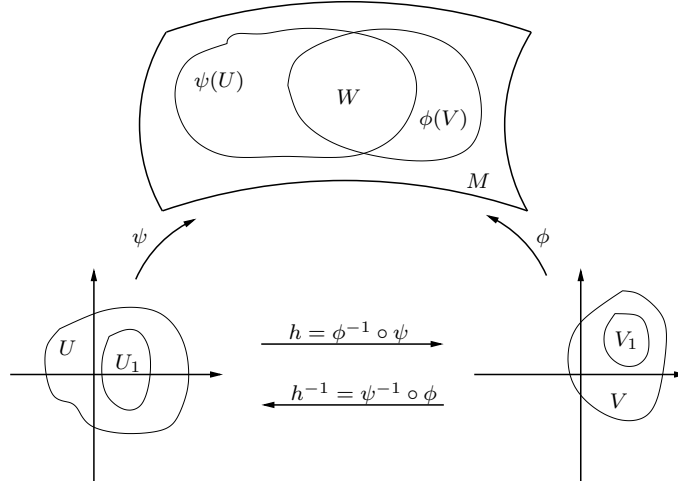


FIGURA B.3: Mudança de coordenadas.

### B.3 Espaço Tangente

Seja  $M$  uma variedade suave. Um mapa diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto M$  é chamado de curva diferenciável sobre  $M$ . Assuma que  $\alpha(0) = p$  e seja  $D$  o conjunto de funções sobre  $M$  que são diferenciáveis em  $p \in M$ . O vetor tangente a curva  $\alpha$  em  $t = 0$  é a função  $\alpha'(0) : D \mapsto \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha'(0)(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in D$$

Um vetor tangente em um ponto  $p \in M$  é o vetor tangente em  $t = 0$  de alguma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto M$  com  $\alpha(0) = p$  (Carmo 1976)

Considere uma variedade suave  $M$  de dimensão 2. Escolhendo uma parametrização  $x : U \mapsto M$  numa vizinhança de  $p = x(0, 0)$ , a função  $f$  e a curva  $\alpha$  podem ser expressas por  $f(u, v)$  e  $(u(t), v(t))$ , respectivamente. Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha'(0)(f) &= \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f(u(t), v(t)))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= u'(0) \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_0 + v'(0) \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)_0 = \left\{ u'(0) \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_0 + v'(0) \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_0 \right\} (f) \end{aligned}$$

Isto sugere que, dadas as coordenadas  $(u, v)$  em torno de  $p$ , o vetor tangente em  $p$  que mapeia a função  $f$  em  $\left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_0$  é denotado por  $\left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_0$ . Um significado similar

é conferido para o símbolo  $(\frac{\partial}{\partial v})_0$ . Deve ser ressaltado que  $(\frac{\partial}{\partial u})_0, (\frac{\partial}{\partial v})_0$  podem ser interpretados como os vetores tangentes em  $p$  das “curvas coordenadas”

$$u \rightarrow x(u, 0), \quad v \rightarrow x(0, v)$$

respectivamente, conforme pode ser visto na figura B.4.

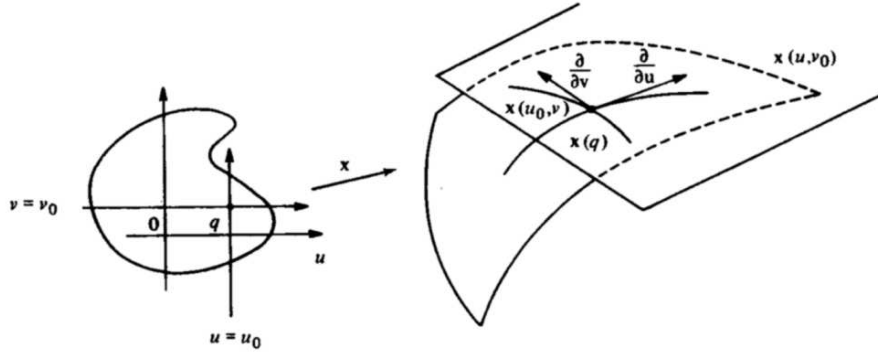


FIGURA B.4: Espaço Tangente de uma variedade suave de dimensão 2.

Da discussão acima, segue que o conjunto de vetores tangentes em  $p$ , com as operações usuais para funções, formam um espaço vetorial de dimensão 2, chamado de espaço tangente  $T_pM$  à variedade  $M$  em  $p$ .

Se  $x : U \mapsto M$  é uma parametrização local de  $M$  em  $p$ , com  $x(q) = p$ ,  $q \in U$ , então  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_q, \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_q \right\}$  é uma base de  $T_pM$  para qualquer  $p \in x(U)$ . Esta base é chamada de base associada a parametrização  $x$ . No caso de variedades de dimensão  $m$  o espaço tangente  $T_pM$  será um espaço vetorial de dimensão  $m$  (Carmo 1976).

Para ilustrar este conceito considere a esfera unitária  $S^2$ . Utilizando a parametrização  $\psi_1 : (u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$ ,  $u^2 + v^2 < 1$ , apresentada na seção B.1, pode se obter a seguinte base para o espaço tangente  $T_pS^2$

$$\left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{array} \right\}$$

onde:  $p \in \{S^2 \cap (z > 0)\}$ .

Observando que o vetor normal à esfera  $S^2$  em um ponto  $p$  é dado por  $N(p) = p$ , pode se verificar, facilmente, que os dois vetores da base associada a parametrização  $\psi_1$  são ortogonais à  $N(p)$ . Logo, são tangentes a esfera  $S^2$  no ponto  $p$ .

# Apêndice C

## Proposições Auxiliares e Provas das Proposições e Lemas do Capítulo 2

### C.1 Prova da Proposição 2.1

Pela Propriedade 2.1, a função  $V_1(x)$  pode ser limitada inferiormente por:

$$V_1 \geq \frac{1}{4}\lambda_m(M) |\dot{q}|^2 + \frac{1}{2}\lambda_m(K_p) |\tilde{q}|^2 + \frac{1}{2}\mu\lambda_m(K_d) |\hat{\nu}|^2 + \left[ \frac{1}{4}\lambda_m(M) |\dot{q}|^2 - \frac{\varepsilon_1\lambda_M(M) |\tilde{q}| |\dot{q}|}{\sqrt{1+|\tilde{q}|^2}} \right]$$

Completando o quadrado no termo entre colchetes e como  $|\dot{q}|^2/(1+|\tilde{q}|^2) \leq |\tilde{q}|^2$ , pode-se verificar que para  $\varepsilon_1 \leq \sqrt{\lambda_m(M)\lambda_m(K_p)}/2\lambda_M(M)$ , tem-se:

$$V_1 \geq \frac{1}{4}\lambda_m(M) |\dot{q}|^2 + \frac{1}{4}\lambda_m(K_p) |\tilde{q}|^2 + \frac{1}{2}\mu\lambda_m(K_d) |\hat{\nu}|^2$$

Portanto,  $V_1(x) \geq \underline{\alpha}_1(|x|)$ , onde  $\underline{\alpha}_1(r) = \kappa_1 r^2 \in \mathcal{K}_\infty$  com  $\kappa_1$  definido em (2.11).

A função  $V_1(x)$  pode ser majorada superiormente por:

$$V_1 \leq \frac{1}{2}\bar{x}^T P_1 \bar{x}$$

onde  $\bar{x}^T = [|\tilde{q}| \quad |\dot{q}| \quad |\hat{\nu}|]$  e  $P_1$  é definido em (2.12). Logo,  $V_1(x) \leq \bar{\alpha}_1(|x|)$ , onde  $\bar{\alpha}_1(r) = \kappa_2 r^2$  com  $\kappa_2$  definido em (2.12). Como  $\underline{\alpha}_1(|x|)$  e  $\bar{\alpha}_1(|x|) \in \mathcal{K}_\infty$ , pode-se concluir, pela Definição 2, que  $V_1(x)$  é uma função de armazenamento suave. ■

## C.2 Prova do Lema 2.1

Derivando  $V_1$  com respeito ao tempo e usando a Propriedade 2.4, segue que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & \dot{q}^T d - \zeta \dot{q}^T F_v \dot{q} - \hat{v}^T K_d \hat{v} + \varepsilon_1 \frac{\dot{q}^T M(q) \dot{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} + \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} + \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T d}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} \\ & - \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T (C(q, \dot{q}) + \zeta F_v) \dot{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} - \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T K_p \tilde{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} - \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T K_d \hat{v}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} - \varepsilon_1 \frac{(\tilde{q}^T M(q) \dot{q})(\tilde{q}^T \dot{q})}{(1 + \tilde{q}^T \tilde{q})^{3/2}} \end{aligned}$$

A partir das Propriedades 2.1, 2.3 e 2.8, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\frac{1}{2} \zeta \dot{q}^T F_v \dot{q} - \frac{1}{2} \hat{v}^T K_d \hat{v} - \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T K_p \tilde{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} + \varepsilon_1 \frac{|\tilde{q}|}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} |d| + \varepsilon_1 \frac{\lambda_M(M) + c_1 |\tilde{q}|}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} |\dot{q}|^2 \\ & + \varepsilon_1 \frac{\lambda_M(M) |\tilde{q}|^2}{(1 + \tilde{q}^T \tilde{q})^{3/2}} |\dot{q}|^2 - \left[ \frac{\zeta \lambda_m(F_v) |\dot{q}|^2}{4} - \varepsilon_1 \frac{\zeta \lambda_M(F_v) |\tilde{q}|}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} |\dot{q}| \right] - \left[ \frac{\zeta \lambda_m(F_v) |\dot{q}|^2}{4} - |d| |\dot{q}| \right] \\ & - \left[ \frac{1}{2} \lambda_m(K_d) |\hat{v}|^2 - \varepsilon_1 \frac{\lambda_M(K_d) |\tilde{q}|}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} |\hat{v}| \right] \end{aligned}$$

Completando os quadrados nos termos entre colchetes, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\frac{1}{2} \zeta \dot{q}^T F_v \dot{q} - \frac{1}{2} \hat{v}^T K_d \hat{v} - \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T K_p \tilde{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} + \varepsilon_1 \left( \frac{\lambda_M(M) + c_1 |\tilde{q}|}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} + \frac{\lambda_M(M) |\tilde{q}|^2}{(1 + \tilde{q}^T \tilde{q})^{3/2}} \right) |\dot{q}|^2 \\ & + \varepsilon_1^2 \left( \frac{\zeta \lambda_M^2(F_v)}{\lambda_m(F_v)} + \frac{\lambda_M^2(K_d)}{2 \lambda_m(K_d)} \right) \frac{|\tilde{q}|^2}{1 + |\tilde{q}|^2} + \frac{1}{\zeta \lambda_m(F_v)} |d|^2 + \varepsilon_1 \frac{|\tilde{q}|}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} |d| \end{aligned}$$

Usando o fato que  $1/\sqrt{1+|\tilde{q}|^2} \leq 1$ ,  $|\tilde{q}|/\sqrt{1+|\tilde{q}|^2} \leq 1$ ,  $|\tilde{q}|^2/(1+|\tilde{q}|^2)^{3/2} \leq 1$ , para todo  $\tilde{q} \in \mathbb{R}^n$ , o seguinte resultado pode ser obtido, para  $\varepsilon_1$  suficientemente pequeno

$$\dot{V}_1 \leq -\frac{1}{4} \zeta \dot{q}^T F_v \dot{q} - \frac{1}{2} \hat{v}^T K_d \hat{v} - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T K_p \tilde{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} + \kappa_3 (|d| + |d|^2) \quad (\text{C.1})$$

onde  $\kappa_3$  é definido em (2.15). Notando que em (C.1)

$$-\frac{1}{4} \zeta \dot{q}^T F_v \dot{q} - \frac{1}{2} \hat{v}^T K_d \hat{v} - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T K_p \tilde{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} \leq -\kappa_4 \frac{|\tilde{q}|^2 + |\dot{q}|^2 + |\hat{v}|^2}{\sqrt{1 + |\tilde{q}|^2 + |\dot{q}|^2 + |\hat{v}|^2}},$$

com  $\kappa_4$  definido em (2.16), é possível concluir que a desigualdade (2.14) é válida. Portanto, se  $\varepsilon_1$  for escolhido tal que as desigualdades (2.10) e (2.13) sejam satisfeitas, então, de acordo com a Definição 3, a função de armazenamento suave  $V_1(x)$  é uma função de Lyapunov-ISS para o sistema em malha fechada (2.1), (2.4) e (2.6). ■

### C.3 Prova do Lema 2.2

A idéia é mostrar que o controlador PD causal com compensação *feedforward* dado por (2.19) é equivalente ao sinal de entrada (2.6), considerado no caso da regulação, ou seja, a lei de controle para o caso do rastreamento é equivalente ao regulador PD causal com uma perturbação de entrada limitada. Desta forma, é possível utilizar os resultados obtidos no Lema 2.1 e no Teorema 2.1 para concluir que o sistema do erro é GApS.

De (2.18), é possível verificar que:

$$\hat{\nu}_e = \hat{\nu} + \hat{\nu}_d, \quad (\text{C.2})$$

onde  $\hat{\nu}$  é definido em (2.4) e  $\hat{\nu}_d$  corresponde à saída de um sistema ISS com uma entrada limitada  $\dot{q}_d$ . Deste modo, a lei de controle definida em (2.19) pode ser reescrita como:

$$\tau = -K_p q - K_d \hat{\nu} + K_p \dot{q}_d - K_d \hat{\nu}_d + Y_d \theta \quad (\text{C.3})$$

Note que (C.3) é equivalente a (2.6) com  $\tilde{q} = q$  ( $q_r = 0$ ) e

$$d_i = K_p \dot{q}_d - K_d \hat{\nu}_d + Y_d \theta \quad (\text{C.4})$$

Para simplificar a análise apresentada na Seção 2.3.1, a perturbação de entrada  $d = d_i - g(q)$  foi considerada. Uma vez que  $\|\hat{\nu}_d(t)\| \leq K e^{-at} + \|\dot{q}_d(t)\|$  (para alguns escalares positivos  $a$ ,  $K$  e  $\forall t$ ) e usando as propriedades 2.1 e 2.8, o seguinte majorante para a perturbação de entrada  $d$ , que é independente de  $\mu$ , pode ser obtido a partir de (C.4)

$$\begin{aligned} |d(t)| &\leq \lambda_M(K_p) |q_d|_M + \lambda_M(K_d) (|\dot{q}_d|_M + K) + \lambda_M(M) |\ddot{q}_d|_M \\ &\quad + c_1 |\dot{q}_d|_M^2 + \zeta \lambda_M(F_v) |\dot{q}_d|_M + 2k_g \leq C_d, \forall t \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Portanto, de acordo com o Teorema 2.1, o sistema em malha fechada (2.1), (2.18) e (2.19), com estado  $x = [q^T \dot{q}^T \hat{\nu}^T]^T$ , é ISS com respeito a  $d$ . De (2.14) e (C.5), segue que  $\dot{V}_1(x) < 0$ , se  $|x| > \alpha_1^{-1} \circ \sigma_1(C_d)$ . Logo, é possível concluir que (ver Lema 2.14 de (Sontag & Wang 1995)):

$$|x(t)| \leq \beta_x(|x(t_0)|, t - t_0) + \gamma_x(C_d) \quad (\text{C.6})$$

onde  $\beta_x \in \mathcal{KL}$  e  $\gamma_x(r) = \underline{\alpha}_1^{-1} \circ \bar{\alpha}_1 \circ \alpha_1^{-1} \circ \sigma_1(r) \in \mathcal{K}_\infty$ . De (C.6) e como os sinais  $q_d$ ,  $\dot{q}_d$  e  $\hat{\nu}_d$  são uniformemente limitados, é fácil mostrar que o sistema do erro (2.22) e

(2.27), com estado  $X_e$  é GApS, i.e existem  $\beta_e \in \mathcal{KL}$  e uma constante não negativa  $K_e$  tais que:

$$|X_e(t)| \leq \beta_e(|X_e(t_0)|, t - t_0) + K_e \quad (\text{C.7})$$

Além disso, seja  $C_\eta$  uma constante tal que  $C_\eta \geq \bar{\alpha}_1 \circ \alpha_1^{-1} \circ \sigma_1(C_d) + \eta$ , onde  $\eta$  é uma constante positiva, que pode ser arbitrariamente pequena, então pode-se concluir que o estado  $x$  converge globalmente num tempo finito  $T_\eta$  para um conjunto compacto e invariante  $D_\eta := \{x \in \mathbb{R}^{3n}; V(x) \leq C_\eta\}$  (ver Seção 4.8 de (Khalil 2002)).

De (2.12), (2.15), (2.16), (C.5) e como  $\mu$  é um parâmetro suficientemente pequeno, a constante  $C_\eta$  é independente de  $\mu$ , i.e., é de ordem  $O(1)$  com respeito a  $\mu$ . Na realidade, o valor desta constante é determinado pelos parâmetros do robô e pelos sinais de trajetória desejados, sendo  $O(1/\zeta^2)$ , onde  $\zeta$  pode ser um pequeno parâmetro relacionado ao amortecimento natural do robô.

De (2.9) pode-se verificar que:

$$V_1(x) \geq \frac{1}{4}\lambda_m(K_p) |q|^2 + \frac{1}{4}\lambda_m(M) |\dot{q}|^2 + \frac{1}{2}\mu\lambda_m(K_d) |\hat{v}|^2 \quad (\text{C.8})$$

Dentro de  $D_\eta$  os seguintes majorantes podem ser estabelecidos:

$$|q(t)| \leq \sqrt{\frac{4C_\eta}{\lambda_m(K_p)}} \quad (\text{C.9})$$

$$|\dot{q}(t)| \leq \sqrt{\frac{4C_\eta}{\lambda_m(M)}} \quad (\text{C.10})$$

$$|\hat{v}(t)| \leq \sqrt{\frac{2C_\eta}{\mu\lambda_m(K_d)}} \quad (\text{C.11})$$

Com objetivo de melhorar o desempenho do rastreamento o parâmetro  $\mu$  deve ser escolhido suficientemente pequeno. Entretanto, como pode ser visto em (C.11), esta escolha gera um fenômeno, comumente chamado de *peaking*, que consiste em grandes amplitudes de pico nas variáveis de estimação  $\hat{v}$  durante o transitório inicial. Felizmente, este fenômeno tem uma breve duração permitindo encontrar um majorante para  $\hat{v}$  independente de  $\mu$  quando o estado se encontra dentro de  $D_\eta$ .

De (2.4) e (2.8) o comportamento temporal de  $\hat{v}$  é dado por:

$$\hat{v}(t) = e^{-\frac{1}{\mu}(t-t_0)}\hat{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{1}{\mu} e^{-\frac{1}{\mu}(t-\xi)} \dot{q}(\xi) d\xi \quad (\text{C.12})$$

Como o sistema em malha fechada (2.8) é invariante no tempo, suas condições iniciais podem ser consideradas  $t_0 = T_\eta$ . Neste caso, a seguinte desigualdade é válida para

todo  $t > T_\eta$ :

$$|\hat{\nu}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} e^{-\frac{1}{\mu}(t-T_\eta)} \sqrt{\frac{2C_\eta}{\lambda_m(K_d)}} + \sqrt{\frac{4C_\eta}{\lambda_m(M)}} \quad (\text{C.13})$$

Definindo o tempo de extinção de pico  $T_p$  como

$$T_p = -\mu \ln(\sqrt{\mu}) \quad (\text{C.14})$$

o seguinte majorante para  $\hat{\nu}$ , que é independente de  $\mu$  e válido para todo  $t > T_\eta + T_p$  pode ser obtido:

$$|\hat{\nu}(t)| \leq \sqrt{\frac{2C_\eta}{\lambda_m(K_d)}} + \sqrt{\frac{4C_\eta}{\lambda_m(M)}} \quad (\text{C.15})$$

Deste modo, o estado do erro  $X_e$  converge globalmente num tempo finito  $T_R$  para um conjunto compacto  $D_R := \{X_e \in \mathbb{R}^{3n}; |X_e| \leq R\}$ , onde  $T_R = T_\eta + T_p$  e  $R$  é uma constante independente de  $\mu$  dada por:

$$R := \sqrt{3} \max \left\{ \sqrt{\frac{4C_\zeta}{\lambda_m(K_p)}} + |q_d|_M, \sqrt{\frac{2C_\zeta}{\lambda_m(K_d)}} + 2\sqrt{\frac{4C_\zeta}{\lambda_m(M)}} + 2|\dot{q}_d|_M + K_\nu \right\} \quad (\text{C.16})$$

■

## C.4 Prova do Lema 2.3

A derivada temporal de  $V_2(z_e)$  é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(z_e) = & -\zeta \dot{e}^T F_v \dot{e} - \dot{e}^T K_d \dot{e} - \dot{e}^T K_d \epsilon_e - \dot{e}^T h_e + \varepsilon_2 \dot{\phi}^T(e) M(q) \dot{e} + \varepsilon_2 \phi^T(e) C^T(q, \dot{q}) \dot{e} \\ & - \varepsilon_2 \zeta \phi^T(e) F_v \dot{e} - \varepsilon_2 \phi^T(e) K_p e - \varepsilon_2 \phi^T(e) K_d \dot{e} - \varepsilon_2 \phi^T(e) K_d \epsilon_e - \varepsilon_2 \phi^T(e) h_e \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

onde as Propriedades 2.3 e 2.4 foram usadas. Como o objetivo é provar que  $\dot{V}_2(X_e)$  é uma função de Lyapunov-ISS para o sistema (2.22), os termos de (C.17) que não podem ser imediatamente majorados serão estudados.

De (2.24) e usando a desigualdade (2.31), o termo  $-\dot{e}^T h_e$  pode ser majorado por:

$$-\dot{e}^T h_e \leq c_1 |\dot{q}_d|_M |\dot{e}|^2 + |\dot{e}| |\phi(e)| \quad (\text{C.18})$$

Usando o resultado obtido em (2.34), o termo  $\varepsilon_2 \dot{\phi}^T(e) M(q) \dot{e}$  pode ser majorado por:

$$\varepsilon_2 \dot{\phi}^T(e) M(q) \dot{e} \leq 2\varepsilon_2 \lambda_M(M) c_h \sqrt{1 + \Delta_h^2} |\dot{e}|^2 \quad (\text{C.19})$$



Notando que  $\varepsilon_2 \phi^T(e) C^T(q, \dot{q}) \dot{e} = \varepsilon_2 \dot{e}^T C(q, \dot{q}) \phi(e)$ , e usando a Propriedade 2.8, tem-se:

$$\varepsilon_2 \phi^T(e) C^T(q, \dot{q}) \dot{e} \leq \varepsilon_2 c_1 |\dot{q}_d|_M |\dot{e}| |\phi(e)| + \varepsilon_2 c_1 |\phi(e)| |\dot{e}|^2$$

onde o fato que  $|\dot{q}| \leq |\dot{q}_d - \dot{e}| \leq |\dot{q}_d|_M + |\dot{e}|$  foi utilizado. De (2.32), o termo  $\varepsilon_2 \phi^T(e) C^T(q, \dot{q}) \dot{e}$  pode ser majorado por:

$$\varepsilon_2 \phi^T(e) C^T(q, \dot{q}) \dot{e} \leq \varepsilon_2 c_1 |\dot{q}_d|_M |\dot{e}| |\phi(e)| + \varepsilon_2 c_1 c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2} |\dot{e}|^2 \quad (\text{C.20})$$

Usando (2.30) e (2.33), o termo  $-\varepsilon_2 \phi^T(e) K_p e$  pode ser majorado por:

$$-\varepsilon_2 \phi^T(e) K_p e \leq -\frac{1}{4} \varepsilon_2 \lambda_m(K_p) c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \frac{|e|^2}{\sqrt{1 + \varsigma^2 |e|^2}} - \frac{3}{4} \varepsilon_2 \frac{\lambda_m(K_p)}{c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}} |\phi(e)|^2 \quad (\text{C.21})$$

Finalmente, de (2.24) e (2.31), o termo  $-\varepsilon_2 \phi^T(e) h_e$  pode ser majorado por:

$$-\varepsilon_2 \phi^T(e) h_e \leq \varepsilon_2 c_1 |\dot{q}_d|_M |\dot{e}| |\phi(e)| + \varepsilon_2 |\phi(e)|^2 \quad (\text{C.22})$$

Usando os majorantes (C.18)–(C.22), a derivada temporal  $\dot{V}_2(z_e)$  pode ser majorada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\zeta \dot{e}^T F_v \dot{e} - \frac{3}{4} \dot{e}^T K_d \dot{e} - \left[ \frac{1}{4} \dot{e}^T K_d \dot{e} - \lambda_M(K_d) |\dot{e}| |\epsilon_e| \right] + c_1 |\dot{q}_d|_M |\dot{e}|^2 + |\dot{e}| |\phi(e)| \\ & + 2\varepsilon_2 \lambda_M(M) c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} |\dot{e}|^2 + \varepsilon_2 (\lambda_M(K_d) + 2c_1 |\dot{q}_d|_M + \zeta \lambda_M(F_v)) |\dot{e}| |\phi(e)| \\ & + \varepsilon_2 c_1 c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2} |\dot{e}|^2 - \left[ \frac{1}{4} \varepsilon_2 \frac{\lambda_m(K_p)}{c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}} |\phi(e)|^2 - \varepsilon_2 \lambda_M(K_d) |\phi(e)| |\epsilon_e| \right] \\ & - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \frac{\lambda_m(K_p)}{c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}} |\phi(e)|^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_2 \lambda_m(K_p) c_h \frac{\sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} |e|^2}{\sqrt{1 + \varsigma^2 |e|^2}} + \varepsilon_2 |\phi(e)|^2 \end{aligned}$$

Completando os quadrados nos termos entre colchetes, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\frac{1}{4} \varepsilon_2 \lambda_m(K_p) c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \frac{|e|^2}{\sqrt{1 + \varsigma^2 |e|^2}} - [|\dot{e}| |\phi(e)|] Q \begin{bmatrix} |\dot{e}| \\ |\phi(e)| \end{bmatrix} + \frac{\lambda_M^2(K_d)}{\lambda_m(K_d)} |\epsilon_e|^2 \\ & + \frac{\varepsilon_2 c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \lambda_M^2(K_d)}{\lambda_m(K_p)} |\epsilon_e|^2 \quad (\text{C.23}) \end{aligned}$$

Se os parâmetros  $K_p$ ,  $K_d$  forem escolhidos de forma que as condições (2.40) e (2.39) sejam satisfeitas, então  $Q$  será positiva definida. De (C.23) e usando a desigualdade

$$\frac{|e|^2}{\sqrt{1 + \varsigma^2 |e|^2}} \geq \frac{|e|^2}{\sqrt{1 + |e|^2}},$$

pode-se mostrar que a desigualdade (2.43) é satisfeita. Logo, pela Definição 3,  $V_2(z_e)$  é uma função de Lyapunov-ISS para o subsistema  $z_e$ . Além disso, a desigualdade (2.44), segue da Definição 1.

De acordo com o Lema 2.2, a função  $\alpha_2(|z_e|)$  em (2.43) pode ser redefinida como  $\alpha_2(r) = \bar{\kappa}_7 r^2$ , com  $\bar{\kappa}_7 = \kappa_7 / \sqrt{1+R^2}$ . Logo, dentro de  $D_R$ , o ganho ISS  $\gamma_z(r) = \kappa_z r$ , com  $\kappa_z$  definido em (2.45) ■

## C.5 Prova do Lema 2.4

De (2.22) e (2.27), a derivada temporal de  $V_3(\epsilon_e)$  definida em (2.46) é dada por:

$$\dot{V}_3 = -\frac{1}{\mu} \epsilon_e^T \epsilon_e + \epsilon_e^T M^{-1}(q) [C(q, \dot{q})\dot{e} + \zeta F_v \dot{e} + K_p e + K_d \dot{e} + K_d \epsilon_e + h_e]$$

Usando a Proposição 2.2 e as Propriedades 2.1 e 2.8, a derivada temporal de  $V_3$  pode ser majorada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & -\frac{1}{4\mu} \epsilon_e^T \epsilon_e - \left[ \frac{1}{8\mu} |\epsilon_e|^2 - \frac{\lambda_M(K_p) + c_h}{\lambda_m(M)} |e| |\epsilon_e| \right] - \left[ \frac{1}{4\mu} |\epsilon_e|^2 - \frac{c_1 |\dot{e}|^2 |\epsilon_e|}{\lambda_m(M)} \right] \\ & - \left[ \frac{1}{8\mu} |\epsilon_e|^2 - \frac{2c_1 |\dot{q}_d|_M + \zeta \lambda_M(F_v) + \lambda_M(K_d)}{\lambda_m(M)} |\dot{e}| |\epsilon_e| \right] - \left( \frac{1}{4\mu} - \frac{\lambda_M(K_d)}{\lambda_m(M)} \right) |\epsilon_e|^2 \end{aligned}$$

onde o fato que  $|\dot{q}| \leq |\dot{q}_d|_M + |\dot{e}|$  foi utilizado. Após completar os quadrados nos termos entre colchetes, o seguinte resultado pode ser obtido para  $\mu \leq \frac{\lambda_m(M)}{4\lambda_M(K_d)}$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & -\frac{1}{4\mu} |\epsilon_e|^2 + 2\mu \frac{(\lambda_M(K_p) + c_h)^2}{\lambda_m^2(M)} |e|^2 + 2\mu \frac{(2c_1 |\dot{q}_d|_M + \zeta \lambda_M(F_v) + \lambda_M(K_d))^2}{\lambda_m^2(M)} |\dot{e}|^2 \\ & + \mu \frac{c_1^2}{\lambda_m^2(M)} |\dot{e}|^4 \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

De (C.24), é possível mostrar que a desigualdade (2.48) é válida. Portanto, de acordo com a Definição 3,  $V_3(\epsilon_e)$  é uma função de Lyapunov-ISS para o subsistema  $\epsilon_e$ . Além disso, a desigualdade (2.49), segue da Definição 1.

Pelo Lema 2.2, a função  $\sigma_3(\mu |z_e|)$  pode ser redefinida por  $\sigma_3(\mu r) = \mu \kappa_{11} r^2$ , com  $\kappa_{11} = \kappa_9 + \kappa_{10} R^2$ . Portanto, dentro  $D_R$ , o ganho ISS  $\gamma_\epsilon(\mu r) = \mu \kappa_\epsilon r$ , onde  $\kappa_\epsilon$  é definido em (2.50) ■

## C.6 Proposição Auxiliar 1

**Proposição C.1** A norma 2 de um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$ , definida por

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

pode ser relacionada com a norma 3, definida por

$$|x|_3 = (|x_1|^3 + \cdots + |x_n|^3)^{1/3},$$

através das seguintes desigualdades, válidas para todo  $x \neq 0$ :

$$1 \leq \frac{|x|^3}{|x_1|^3 + \cdots + |x_n|^3} \leq \sqrt{n}$$

*Prova:*

$$|x_1|^3 + \cdots + |x_n|^3 \leq (|x_1|^2 |x| + \cdots + |x_n|^2 |x|) = |x|^3 \Rightarrow \frac{|x|^3}{|x_1|^3 + \cdots + |x_n|^3} \geq 1$$

Considere a função  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{|x|^3}{|x_1|^3 + \cdots + |x_n|^3} = \frac{|x_1|^2 |x| + \cdots + |x_n|^2 |x|}{|x_1|^3 + \cdots + |x_n|^3}$$

A derivada parcial da norma 2 de  $x$  com respeito a uma componente é dada por:

$$\frac{\partial |x|}{\partial x_i} = \frac{x_i}{|x|}, \forall x \neq 0, i = 1, \dots, n$$

Usando este resultado é possível verificar que a derivada parcial da função  $f(x)$  com respeito a uma de suas componentes é dada por:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{3x_i |x| (|x_1|^3 + \cdots + |x_n|^3) - 3|x_i| x_i |x|^3}{(|x_1|^3 + \cdots + |x_n|^3)^2}, \quad x_i \neq 0, i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{3x_i |x| (|x_1|^3 + \cdots + |x_n|^3 - |x_i| |x|^2)}{(|x_1|^3 + \cdots + |x_n|^3)^2}, \quad x_i \neq 0, i = 1, \dots, n$$

A função  $f(x)$  atingirá um valor máximo ou mínimo quando todas as suas derivadas parciais forem iguais a zero. Esta condição ocorre quando

$$|x_i| |x|^2 = |x_1|^3 + \cdots + |x_n|^3, \text{ se } x_i \neq 0, i = 1, \dots, n$$

Desta forma, é possível concluir que  $f(x)$  atingirá um máximo ou um mínimo se  $|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n| = \kappa$ , onde  $\kappa$  é uma constante positiva. Substituindo na função  $f(x)$ , temos:

$$f(\kappa, \dots, \kappa) = \frac{n\kappa^2 \sqrt{n\kappa^2}}{n\kappa^3} = \sqrt{n}$$

■

## C.7 Prova da Proposição 2.4

Para se obter um limitante inferior para a função  $V_4(x)$ , primeiramente, deve-se analisar o termo  $\tilde{q}^T \Psi(\tilde{q})\tilde{q}$ .

$$\tilde{q}^T \Psi(\tilde{q})\tilde{q} = [\tilde{q}_1 \dots \tilde{q}_n] \begin{bmatrix} \psi_1 |\tilde{q}_1| & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \psi_n |\tilde{q}_n| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \end{bmatrix} = \psi_1 |\tilde{q}_1|^3 + \dots + \psi_n |\tilde{q}_n|^3 \geq 0$$

Como  $\tilde{q}^T \Psi(\tilde{q})\tilde{q} \geq 0$ , este termo pode ser desconsiderado. Desta forma, seguindo os mesmo passos apresentados na Prova da Proposição 2.1, é possível mostrar que  $V_4(x) \geq \underline{\alpha}_4(|x|)$ , onde  $\underline{\alpha}_4(r) = \kappa_1 r^2 \in \mathcal{K}_\infty$  com  $\kappa_1$  definido em (2.11).

A função  $V_4(x)$  pode ser majorada superiormente por

$$V_4 \leq \frac{1}{2} \bar{x}^T P_1 \bar{x} + \psi_1 |q_1|^3 + \dots + \psi_n |q_n|^3,$$

onde  $\bar{x}^T = [|\tilde{q}| \ |q| \ |\hat{\nu}|]$  e  $P_1$  é definido em (2.12). Usando o resultado obtido na Proposição Auxiliar C.1, pode-se concluir que

$$\psi_1 |q_1|^3 + \dots + \psi_n |q_n|^3 \leq \psi_M |q|^3,$$

Logo,  $V_4(x) \leq \bar{\alpha}_4(|x|)$ , onde  $\bar{\alpha}_4(r) = \kappa_2 r^2 + \psi_M r^3 \in \mathcal{K}_\infty$  com  $\kappa_2$  definido em (2.12).

Portanto,  $V_4(x)$  é uma função de armazenamento suave. ■

## C.8 Prova do Lema 2.5

Derivando  $V_4$  com respeito ao tempo e usando as Propriedades 2.3 e 2.4, segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &= \dot{q}^T d - \zeta \dot{q}^T F_v \dot{q} - \dot{q}^T \Psi(\tilde{q})\tilde{q} + \frac{2}{3} \dot{q}^T \Psi(\tilde{q})\tilde{q} + \frac{1}{3} \dot{q}^T \dot{\Psi}(\tilde{q})\tilde{q} - \hat{\nu}^T K_d \hat{\nu} + \varepsilon_1 \frac{\dot{q}^T M(q)\dot{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} \\ &+ \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T d}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} + \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T (C^T(q, \dot{q}) - \zeta F_v) \dot{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} - \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T K_p \tilde{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} - \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T \Psi(\tilde{q})\tilde{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} \\ &- \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T K_d \hat{\nu}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} - \varepsilon_1 \frac{(\tilde{q}^T M(q)\dot{q})(\tilde{q}^T \dot{q})}{(1 + \tilde{q}^T \tilde{q})^{3/2}} \end{aligned}$$

Note que  $\dot{\Psi}(\tilde{q})\tilde{q} = \Psi(\tilde{q})\dot{q}$ . Desta forma, tem-se que:

$$-\dot{q}^T \Psi(\tilde{q})\tilde{q} + \frac{2}{3} \dot{q}^T \Psi(\tilde{q})\tilde{q} + \frac{1}{3} \dot{q}^T \dot{\Psi}(\tilde{q})\tilde{q} = 0$$

Utilizando este resultado a derivada temporal de  $V_4(x)$  se torna idêntica a derivada temporal de  $V_1(x)$ , apresentada na prova do Lema 2.1, exceto pelo termo  $-\varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T \Psi(\tilde{q}) \tilde{q}}{\sqrt{1+\tilde{q}^T \tilde{q}}}$ .

Como  $\tilde{q}^T \Psi(\tilde{q}) \tilde{q} = \psi_1 |\tilde{q}_1|^3 + \dots + \psi_n |\tilde{q}_n|^3$ . Usando o resultado obtido na Proposição Auxiliar C.1, pode-se mostrar que  $\psi_m (|\tilde{q}_1|^3 + \dots + |\tilde{q}_n|^3) \geq \frac{\psi_m}{\sqrt{n}} |\tilde{q}|^3$ . onde  $\psi_m = \min\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ . Desta forma, pode-se verificar que:

$$-\varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T \Psi(\tilde{q}) \tilde{q}}{\sqrt{1+\tilde{q}^T \tilde{q}}} \leq -\varepsilon_1 \frac{\psi_m}{\sqrt{n}} \frac{|\tilde{q}|^3}{\sqrt{1+\tilde{q}^T \tilde{q}}}$$

Deste modo, seguindo o mesmo raciocínio utilizado na prova do Lema 2.1, apresentado na seção C.2, o seguinte resultado pode ser obtido para um  $\varepsilon_1$  suficientemente pequeno:

$$\dot{V}_1 \leq -\frac{1}{4} \zeta \dot{q}^T F_v \dot{q} - \frac{1}{2} \hat{\nu}^T K_d \hat{\nu} - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T K_p \tilde{q}}{\sqrt{1+\tilde{q}^T \tilde{q}}} - \varepsilon_1 \frac{\psi_m}{\sqrt{n}} \frac{|\tilde{q}|^3}{\sqrt{1+\tilde{q}^T \tilde{q}}} + \kappa_3 (|d| + |d|^2) \quad (\text{C.25})$$

onde  $\kappa_3$  é definida em (2.15). Como  $\frac{|x|^3}{\sqrt{1+|x|^2}} \leq |x|^2$ , é possível concluir que  $V_4(x)$  pode ser majorada por (2.64). Portanto, se  $\varepsilon_1$  for escolhido tal que as desigualdades (2.10) e (2.13) sejam satisfeitas, então, o sistema em malha fechada será ISS com respeito a perturbação de entrada  $d(t)$ . ■

## C.9 Prova do Lema 2.6

A prova deste Lema é praticamente igual a prova do Lema 2.2

De (C.2), a lei de controle definida em (2.65) pode ser reescrita como:

$$\tau = -K_p q - K_d \hat{\nu} - \Psi(q)q + K_p q_d - K_d \hat{\nu}_d + \Psi(q_d)q_d + Y_d \theta \quad (\text{C.26})$$

Note que (C.26) é equivalente ao sinal de controle (2.61), com  $\tilde{q} = q$  ( $q_r = 0$ ), adicionado de uma perturbação de entrada limitada  $d_i$  dada por:

$$d_i = K_p q_d - K_d \hat{\nu}_d + \Psi(q_d)q_d + Y_d \theta$$

Neste caso, o seguinte majorante, para a perturbação de entrada  $d = d_i - g(q)$ , pode ser obtido:

$$|d(t)| \leq |K_p q_d - K_d \hat{\nu}_d + \Psi(q_d)q_d + Y_d \theta| \leq C_d, \forall t \quad (\text{C.27})$$

O restante da prova segue os desenvolvimentos apresentados na seção C.3. ■

## C.10 Prova da Proposição 2.5

Primeiramente, um limitante inferior para  $V_5(z_e)$  será obtido. Notando que

$$\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d = \begin{bmatrix} \psi_1 |q_1| q_1 - \psi_1 |q_{d_1}| q_{d_1} \\ \vdots \\ \psi_n |q_n| q_n - \psi_n |q_{d_n}| q_{d_n} \end{bmatrix} \quad (\text{C.28})$$

e como  $(x - y)(|x|x - |y|y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ , tem-se que  $e^T (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d) \geq 0$ . Considere a função  $V(e, \dot{e}) = \dot{e}^T M(q)\dot{e} + e^T K_p e + 2\delta\phi^T(e)M(q)\dot{e}$ , pode-se verificar que:

$$V(e, \dot{e}) = z_e^T P_2(q, e) z_e, \quad P_2(q, e) = \begin{bmatrix} M(q) & \pi(e)M(q) \\ \pi(e)M(q) & K_p \end{bmatrix}$$

$$\pi(e) = \delta c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2} \frac{\varsigma}{\sqrt{1 + \varsigma^2 e^T e}} \in \mathbb{R}$$

Como a matriz  $P_2(q, e)$  é simétrica, a função  $V(e, \dot{e})$  pode ser reescrita do seguinte modo:

$$V(e, \dot{e}) = \underbrace{z_e^T}_{w^T} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \pi(e)I & I \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} M(q) & 0 \\ 0 & K_p - \pi(e)^2 M(q) \end{bmatrix}}_H \underbrace{\begin{bmatrix} I & \pi(e)I \\ 0 & I \end{bmatrix}}_w z_e = w^T H w$$

$$= w_1^T M(q) w_1 + w_2^T [K_p - \pi(e)^2 M(q)] w_2$$

Para que a função  $V(e, \dot{e})$  seja positiva definida, a matriz  $K_p$  tem que ser escolhida de forma que a matriz  $K_p - \pi(e)^2 M(q)$  seja positiva definida.

Como  $0 \leq \pi(e) \leq \delta c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}$ , se a matriz  $K_p$  for escolhida tal que

$$\lambda_m(K_P) > \delta^2 c_h^2 (1 + \varsigma^2 \Delta_h^2) \lambda_M(M),$$

então a matriz  $H$  será positiva definida e conseqüentemente a função  $V(e, \dot{e})$  também será positiva definida. Portanto,  $V_5(z_e) \geq \underline{\alpha}_5(|z_e|)$ , onde  $\underline{\alpha}_5(r) = \kappa_{5n} r^2 \in \mathcal{K}_\infty$ , com  $\kappa_{5n}$  definido em (2.70)

Agora, um limitante superior para  $V_5(z_e)$  será encontrado. Usando a igualdade

$$|x|x - |y|y = \frac{1}{2} [(|x| + |y|)(x - y) + (x + y)(|x| - |y|)],$$

o seguinte resultado pode ser obtido:

$$e^T (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \psi_i [(|q_i| + |q_{d_i}|)e_i^2 + e_i(q_i + q_{d_i})(|q_i| - |q_{d_i}|)]$$

Usando as desigualdades  $|q_i| \leq |e_i| + |q_{d_i}|$  e  $|q_i| - |q_{d_i}| \leq |e_i|$ , segue que:

$$|e^T (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d)| \leq \sum_{i=1}^n \psi_i (|e_i| + 2|q_{d_i}|) |e_i|^2 \leq \psi_M |e|^3 + 2\psi_M |q_d|_M |e|^2$$

A função  $V_5(z_e)$  pode ser majorada superiormente por  $V_5 \leq \bar{z}_e^T \bar{P}_2 \bar{z}_e / 2 + \psi_M |z_e|^3$ , onde  $\bar{z}_e^T = [|e| \quad |\dot{e}|]$  e  $\bar{P}_2$  é definido em (2.71). Logo,  $V_5(z_e) \leq \bar{\alpha}_5(|z_e|)$ , onde  $\bar{\alpha}_5(r) = \kappa_{6n} r^2 + \psi_M r^3 \in \mathcal{K}_\infty$  com  $\kappa_{6n}$  definido em (2.71). Logo,  $V_5(z_e)$  é uma função de armazenamento suave. ■

## C.11 Proposição Auxiliar 2

A função  $e^T (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d)$  pode ser limitada inferiormente do seguinte modo:

$$\frac{\psi_m}{\sqrt{n}} |e|^3 \leq e^T (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d) \quad (\text{C.29})$$

*Prova:*

Considere a função  $e^T (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d)$ . De (C.28) e usando a igualdade

$$|x| |x - |y|| y = \frac{1}{2} [(|x| + |y|)(x - y) + (x + y)(|x| - |y|)],$$

o seguinte resultado pode ser obtido:

$$e^T (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (|q_i| + |q_{d_i}|) e_i^2 + (q_i - q_{d_i})(q_i + q_{d_i})(|q_i| - |q_{d_i}|)$$

Usando a igualdade  $(q_i - q_{d_i})(q_i + q_{d_i}) = |q_i|^2 - |q_{d_i}|^2 = |q_i| + |q_{d_i}|)(|q_i| - |q_{d_i}|)$  e a desigualdade  $|e_i| \leq |q_i| + |q_{d_i}|$ , tem-se:

$$e^T (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \psi_i [|e_i| e_i^2 + (|q_i| + |q_{d_i}|)(|q_i| - |q_{d_i}|)^2] \geq 0$$

Como  $|q_i| \geq |e_i| - |q_{d_i}|$ , pode-se verificar que:

$$e^T (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \psi_i [|e_i|^3 + |e_i| (|e_i| - 2|q_{d_i}|)^2] \geq \psi_m (|e_1|^3 + \dots + |e_n|^3) \quad (\text{C.30})$$

Usando o resultado da Proposição Auxiliar C.1, a desigualdade (C.29) pode ser verificada.

## C.12 Prova do Lema 2.7

Usando o fato de que  $\dot{\Psi}(q)q = \Psi(q)\dot{q}$  e  $\dot{\Psi}(q_d)q_d = \Psi(q_d)\dot{q}_d$ , a derivada temporal de  $V_5$  é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_5 = & -\zeta \dot{e}^T F_v \dot{e} - \dot{e}^T K_d \dot{e} - \dot{e}^T K_d \epsilon_e - \dot{e}^T (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d) - \dot{e}^T h_e \\ & + \frac{1}{3} \dot{e}^T (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d) + \frac{2}{3} e^T (\Psi(q)\dot{q} - \Psi(q_d)\dot{q}_d) + \delta \dot{\phi}^T(e) M(q) \dot{e} \\ & + \delta \phi^T(e) C^T(q, \dot{q}) \dot{e} - \delta \zeta \phi^T(e) F_v \dot{e} - \delta \phi^T(e) K_p e - \delta \phi^T(e) K_d \dot{e} \\ & - \delta \phi^T(e) K_d \epsilon_e - \delta \phi^T(e) (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d) - \delta \phi^T(e) h_e \end{aligned} \quad (C.31)$$

onde as Propriedades 2.3 e 2.4 foram utilizadas.

Defina a função  $\phi_1 = -\dot{e}^T (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d) + e^T (\Psi(q)\dot{q} - \Psi(q_d)\dot{q}_d)$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sum_{i=1}^n \psi_i [\dot{q}_i |q_{d_i}| q_{d_i} + \dot{q}_{d_i} |q_i| q_i - q_i |q_{d_i}| \dot{q}_{d_i} - q_{d_i} |q_i| \dot{q}_i] \\ &= \sum_{i=1}^n \psi_i (q_i \dot{q}_{d_i} - \dot{q}_i q_{d_i}) (|q_i| - |q_{d_i}|) \end{aligned}$$

Usando o fato que  $q_i = e_i + q_{d_i}$  e  $\dot{q}_i = \dot{e}_i + \dot{q}_{d_i}$ , tem-se

$$\phi_1 = \sum_{i=1}^n \psi_i (e_i \dot{q}_{d_i} - \dot{e}_i q_{d_i}) (|q_i| - |q_{d_i}|)$$

Como  $|q_i| - |q_{d_i}| \leq |e_i|$ , pode-se concluir que:

$$\phi_1 \leq \sum_{i=1}^n \psi_i (|e_i|^2 |\dot{q}_d|_M + |\dot{e}_i| |e_i| |q_d|_M) \leq \psi_M |\dot{q}_d|_M |e|^2 + \psi_M |q_d|_M |e| |\dot{e}|$$

Logo, o seguinte resultado pode ser obtido:

$$-\frac{2}{3} [\dot{e}^T (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d) + e^T (\Psi(q)\dot{q} - \Psi(q_d)\dot{q}_d)] \leq \frac{2}{3} \psi_M (|\dot{q}_d|_M |e|^2 + |q_d|_M |e| |\dot{e}|)$$

Usando a desigualdade (C.29) o termo  $-\delta f^T(e) (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d)$  pode ser majorado por:

$$-\delta f^T(e) (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d) \leq -\delta \psi_m \frac{c_h \sqrt{1 + \zeta^2 \Delta_h^2}}{\sqrt{n}} \frac{|e|^3}{\sqrt{1 + \zeta^2 |e|^2}} \quad (C.32)$$

Usando os majorantes (C.18)–(C.22) (trocando  $\varepsilon_2$  por  $\delta$  quando necessário) a



derivada temporal  $\dot{V}_5(z_e)$  dada por (C.31) pode ser majorada por:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_5 \leq & -\zeta \delta^T F_v \dot{e} - \frac{3}{4} \dot{e}^T K_d \dot{e} - \left[ \frac{1}{8} \dot{e}^T K_d \dot{e} - \lambda_M(K_d) |\dot{e}| |\epsilon_e| \right] - \left[ \frac{1}{8} \dot{e}^T K_d \dot{e} - \frac{2}{3} \psi_M |q_d|_M |e| |\dot{e}| \right] \\
& + \frac{2}{3} \psi_M |\dot{q}_d|_M |e|^2 + c_1 |\dot{q}_d|_M |\dot{e}|^2 + |\dot{e}| |f(e)| + 2\delta \lambda_M(M) c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} |\dot{e}|^2 \\
& + 2\delta c_1 |\dot{q}_d|_M |\dot{e}| |f(e)| + \delta c_1 c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2} |\dot{e}|^2 + \delta \zeta \lambda_M(F_v) |f(e)| |\dot{e}| \\
& - \frac{1}{4} \delta \lambda_m(K_p) c_h \frac{\sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} |e|^2}{\sqrt{1 + \varsigma^2} |e|^2} - \frac{1}{2} \delta \frac{\lambda_m(K_p)}{c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}} |f(e)|^2 + \delta \lambda_M(K_d) |f(e)| |\dot{e}| \\
& + \delta |f(e)|^2 - \left[ \frac{1}{4} \delta \frac{\lambda_m(K_p)}{c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}} |f(e)|^2 - \delta \lambda_M(K_d) |f(e)| |\epsilon_e| \right] \\
& - \delta \psi_m \frac{c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}}{\sqrt{n}} \frac{|e|^3}{\sqrt{1 + \varsigma^2} |e|^2} \tag{C.33}
\end{aligned}$$

Completando os quadrados nos termos entre colchetes, tem-se:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_5 \leq & - [|\dot{e}| \quad |f(e)|] Q_n \begin{bmatrix} |\dot{e}| \\ |f(e)| \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \delta \lambda_m(K_p) c_h \frac{\sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} |e|^2}{\sqrt{1 + \varsigma^2} |e|^2} \\
& - \delta \psi_m \frac{c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}}{\sqrt{n}} \frac{|e|^3}{\sqrt{1 + \varsigma^2} |e|^2} + \frac{2}{3} \psi_M \frac{|\dot{q}_d|_M \lambda_m(K_d) + \frac{4}{3} \psi_M |q_d|_M^2}{\lambda_m(K_d)} |e|^2 \\
& + \frac{2\lambda_M^2(K_d)}{\lambda_m(K_d)} |\epsilon_e|^2 + \delta \frac{c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \lambda_M^2(K_d)}{\lambda_m(K_p)} |\epsilon_e|^2 \tag{C.34}
\end{aligned}$$

onde  $Q_n$  é uma matriz simétrica dada por (2.80), com  $\chi_{2n}$  e  $\chi_{3n}$  definidos em (2.74) e (2.76), respectivamente.

Note que se o ganho  $K_p$  for escolhido de forma a satisfazer

$$\lambda_m(K_p) \geq \frac{16\sqrt{1 + \varsigma^2} \psi_M (|\dot{q}_d|_M \lambda_m(K_d) + \frac{4}{3} \psi_M |q_d|_M^2)}{3\delta c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \lambda_m(K_d)},$$

então a seguinte desigualdade será válida para  $|e| \leq 1$ :

$$-\frac{1}{8} \delta \lambda_m(K_p) c_h \frac{\sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} |e|^2}{\sqrt{1 + \varsigma^2} |e|^2} + \frac{2}{3} \psi_M \frac{|\dot{q}_d|_M \lambda_m(K_d) + \frac{4}{3} \psi_M |q_d|_M^2}{\lambda_m(K_d)} |e|^2 \leq 0$$

Usando o fato de que  $\frac{|e|}{\sqrt{1 + \varsigma^2} |e|^2} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \varsigma^2}}$ ,  $\forall |e| \geq 1$ , se o parâmetro  $\delta$  for escolhido tal que

$$\delta \geq \frac{2\sqrt{n} \sqrt{1 + \varsigma^2} \psi_M (|\dot{q}_d|_M \lambda_m(K_d) + \frac{4}{3} \psi_M |q_d|_M^2)}{3\zeta \psi_m c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \lambda_m(K_d)}$$

onde  $0 < \xi < 1$  é uma constante escolhida de forma conveniente. Então a seguinte desigualdade será válida para  $|e| \geq 1$ :

$$-\delta \frac{\xi \psi_m c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}}{\sqrt{n}} \frac{|e|^3}{\sqrt{1 + \varsigma^2 |e|^2}} + \frac{2}{3} \psi_M \frac{|\dot{q}_d|_M \lambda_m(K_d) + \frac{4}{3} \psi_M |q_d|_M^2}{\lambda_m(K_d)} |e|^2 \leq 0$$

Se os parâmetros  $K_p$  e  $K_d$  forem escolhidos de forma que as condições (2.40) e (2.39) sejam satisfeitas, então  $Q_n$  será positiva definida. Considere a seguinte função  $\phi_2$  definida por:

$$\phi_2 = \lambda_m(Q) |\dot{e}|^2 + \frac{1}{8} \delta \lambda_m(K_p) c_h \frac{\sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} |e|^2}{\sqrt{1 + \varsigma^2 |e|^2}} + \delta(1 - \xi) \frac{\psi_m c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}}{\sqrt{n}} \frac{|e|^3}{\sqrt{1 + \varsigma^2 |e|^2}}$$

A função  $\phi_2(z_e)$  pode ser majorada pela função  $\bar{\phi}_2(|z_e|)$  definida por:

$$\bar{\phi}_2(r) = \begin{cases} \tilde{\kappa}_7 \frac{r^3}{\sqrt{1 + r^2}}, & r \geq \kappa_r \\ \hat{\kappa}_7 \frac{r^2}{\sqrt{1 + r^2}}, & r < \kappa_r \end{cases}, \quad \kappa_r = \frac{\hat{\kappa}_7}{\tilde{\kappa}_7}, \quad (\text{C.35})$$

$$\tilde{\kappa}_7 \leq \min \left\{ \lambda_m(Q), \frac{\delta(1-\xi)c_h \sqrt{1+\varsigma^2 \Delta_h^2}}{2\sqrt{n}} \right\} \text{ e } \hat{\kappa}_7 \leq \min \left\{ \lambda_m(Q), \frac{1}{8} \delta \lambda_m(K_p) c_h \sqrt{1+\varsigma^2 \Delta_h^2} \right\},$$

No desenvolvimento do majorante  $\bar{\phi}_2(|z_e|)$  foi utilizada a seguinte desigualdade:

$$\frac{|e|}{\sqrt{1 + \varsigma^2 |e|^2}} \geq \frac{|e|}{\sqrt{1 + |e|^2}}, \quad \forall e \in \mathbb{R}^n,$$

De (C.34) e de (C.35), pode-se mostrar que  $\dot{V}_5(z_e)$  pode ser majorada por (2.77). Logo, pela Definição 3,  $V_5(z_e)$  é uma função de Lyapunov-ISS para o subsistema  $z_e$ . Além disso, a desigualdade (2.81) segue da Definição 1.

De acordo com o Lema 2.6, a função  $\bar{\alpha}_5(|z_e|)$  em (2.5) pode ser redefinida por

$$\bar{\alpha}_5(r) = \bar{\kappa}_{6_n} r^2 \in \mathcal{K}_\infty, \quad \bar{\kappa}_{6_n} = \kappa_6 + \psi_M R$$

Portanto, dentro de  $D_R$ , o ganho ISS  $\gamma_{z_n}(r) = \kappa_{z_n} r$ , com  $\kappa_{z_n}$  definido em (2.82). ■

## C.13 Prova do Lema 2.8

A derivada temporal de  $V_6$  é dada por:

$$\dot{V}_6 = -\frac{1}{\mu} \epsilon_e^T \epsilon_e + \epsilon_e^T M^{-1}(q) [C(q, \dot{q}) \dot{e} + \zeta F_v \dot{e} + K_p e + (\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d) + K_d \dot{e} + K_d \epsilon_e + h_e] \quad (\text{C.36})$$

Como  $|\Psi(q)q - \Psi(q_d)q_d| \leq \psi_M |e|^2 + 2\psi_M |q_d|_M |e|$ , usando a Proposição 2.2 e as Propriedades 2.1 e 2.8, a derivada temporal de  $V_6$  pode ser majorada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_6 \leq & -\frac{1}{\mu} |\epsilon_e|^2 + \frac{\lambda_M(K_p) + c_h + 2\psi_M |q_d|_M}{\lambda_m(M)} |e| |\epsilon_e| + \frac{\psi_M}{\lambda_m(M)} |e|^2 |\epsilon_e| + \frac{c_1}{\lambda_m(M)} |\dot{e}|^2 |\epsilon_e| \\ & + \frac{2c_1 |\dot{q}_d|_M + \zeta \lambda_M(F_v) + \lambda_M(K_d)}{\lambda_m(M)} |\dot{e}| |\epsilon_e| + \frac{\lambda_M(K_d)}{\lambda_m(M)} |\epsilon_e|^2 \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

onde o fato de que  $|\dot{q}| \leq |\dot{q}_d|_M + |\dot{e}|$  foi utilizado. A desigualdade (C.37) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}_6 = & -\frac{1}{4\mu} |\epsilon_e|^2 - \left[ \frac{1}{8\mu} |\epsilon_e|^2 - \frac{\lambda_M(K_p) + c_h + 2\psi_M |q_d|_M}{\lambda_m(M)} |e| |\epsilon_e| \right] \\ & - \left[ \frac{1}{8\mu} |\epsilon_e|^2 - \frac{\psi_M}{\lambda_m(M)} |e|^2 |\epsilon_e| \right] - \left[ \frac{1}{8\mu} |\epsilon_e|^2 - \frac{2c_1 |\dot{q}_d|_M + \zeta \lambda_M(F_v) + \lambda_M(K_d)}{\lambda_m(M)} |\dot{e}| |\epsilon_e| \right] \\ & - \left[ \frac{1}{8\mu} |\epsilon_e|^2 - \frac{c_1}{\lambda_m(M)} |\dot{e}|^2 |\epsilon_e| \right] - \left( \frac{1}{4\mu} - \frac{\lambda_M(K_d)}{\lambda_m(M)} \right) |\epsilon_e|^2 \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Após completar os quadrados nos termos entre colchetes de (C.38), o seguinte resultado pode ser obtido para  $\mu \leq \frac{\lambda_m(M)}{4\lambda_M(K_d)}$

$$\begin{aligned} \dot{V}_6 \leq & -\frac{1}{4\mu} |\epsilon_e|^2 + 2\mu \frac{(\lambda_M(K_p) + c_h + 2\psi_M |q_d|_M)^2}{\lambda_m^2(M)} |e|^2 + 2\mu \frac{\psi_M^2}{\lambda_m^2(M)} |e|^4 \\ & + 2\mu \frac{c_1^2}{\lambda_m^2(M)} |\dot{e}|^4 + 2\mu \frac{(2c_1 |\dot{q}_d|_M + \zeta \lambda_M(F_v) + \lambda_M(K_d))^2}{\lambda_m^2(M)} |\dot{e}|^2 \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

De (C.39), é possível mostrar que  $\dot{V}_6$  pode ser majorada por (2.85). Portanto,  $V_6(\epsilon_e)$  é uma função de Lyapunov-ISS para o subsistema- $\epsilon_e$ . Além disso, escolhendo  $\underline{\alpha}_6(|\epsilon_e|) = \bar{\alpha}_6(|\epsilon_e|) = 1/2 |\epsilon_e|^2$ , pode-se verificar que a desigualdade (2.88) é válida.

Dentro de  $D_R$  a função  $\sigma_6(\mu |z_e|)$  pode ser redefinida da seguinte forma:

$$\sigma_6(\mu r) = \mu \kappa_{11n} r^2 \in \mathcal{K}_\infty$$

com  $\kappa_{11n} = \kappa_9 + \kappa_{10} R^2$ . Portanto, dentro de  $D_R$ , o ganho ISS  $\gamma_{\epsilon_n}(\mu r) = \mu \kappa_{\epsilon_n} r$ , com  $\kappa_{\epsilon_n}$  definida por (2.89). ■

# Apêndice D

## Provas dos Lemas do Capítulo 3

### D.1 Prova do Lema 3.1

Derivando  $V_1$  com respeito ao tempo, e usando as Propriedade 3.3 e 3.4, segue que:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 = & \dot{q}^T d - \dot{q}^T D_l(q) \dot{q} - \dot{q}^T D_{nl}(q) \dot{q} - \hat{v}^T K_d \hat{v} + \varepsilon_1 \frac{\dot{q}^T M(q) \dot{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} \\
 & + \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T C^T(q, \dot{q}) \dot{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} + \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T d}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} - \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T (\zeta D_l(q) + D_{nl}(q)) \dot{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} \\
 & - \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T K_p \tilde{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} - \varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T K_d \hat{v}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} - \varepsilon_1 \frac{(\tilde{q}^T M(q) \dot{q})(\tilde{q}^T \dot{q})}{(1 + \tilde{q}^T \tilde{q})^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

onde o fato de que  $f_D(q, \dot{q}) = D_l(q) \dot{q} + D_{nl}(q, \dot{q}) \dot{q}$  foi utilizado. O restante da prova é dividido em duas etapas. Primeiramente, será considerado que a matriz  $D_l(q)$  seja positiva definida. Neste caso, seguindo os desenvolvimentos apresentados na Seção C.2 e usando as desigualdades:

$$-\dot{q}^T D_{nl}(q) \dot{q} \leq 0, \quad -\varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T D_{nl}(q) \dot{q}}{\sqrt{1 + \tilde{q}^T \tilde{q}}} \leq \varepsilon_1 \delta_M |\dot{q}|^2,$$

é possível obter o seguinte resultado, para  $\varepsilon_1$  suficientemente pequeno:

$$\dot{V}_1(x) \leq -\alpha_1(|x|) + \sigma_1(|d|) \tag{D.2}$$

onde  $\alpha_1(r), \sigma_1(r) \in \mathcal{K}_\infty$ . Portanto, neste caso  $V_1(x)$  é uma função de Lyapunov-ISS para o sistema em malha fechada (3.13).

Agora será considerado que  $D_l(q)$  seja apenas positiva semi-definida. Usando

(3.5) e a desigualdade  $|\dot{q}| |d| \leq |d| + |\dot{q}|^{3/2} |d|$ , a função  $\dot{V}_1(x)$  pode ser majorada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\frac{1}{2}\delta_m |\dot{q}|^3 - \frac{1}{2}\hat{\nu}^T K_d \hat{\nu} - \frac{1}{2}\varepsilon_1 \frac{\tilde{q}^T K_p \tilde{q}}{\sqrt{1+\tilde{q}^T \tilde{q}}} + (1+\varepsilon_1) |d| + \varepsilon_1 (2\lambda_M(M) + c_1 + \delta_M) |\dot{q}|^2 \\ & - \left[ \frac{1}{2}\lambda_m(K_d) |\hat{\nu}|^2 - \varepsilon_1 \frac{\lambda_M(K_d) |\tilde{q}|}{\sqrt{1+\tilde{q}^T \tilde{q}}} |\hat{\nu}| \right] - \left[ \frac{1}{2}\delta_m |\dot{q}|^3 - |d| |\dot{q}|^{3/2} \right] \\ & - \left[ \frac{1}{2}\varepsilon_1 \frac{\lambda_m(K_p) |\tilde{q}|^2}{\sqrt{1+\tilde{q}^T \tilde{q}}} - \varepsilon_1 \frac{\lambda_M(D_l) |q| |\dot{q}|}{\sqrt{1+\tilde{q}^T \tilde{q}}} \right] \end{aligned}$$

Após completar os quadrados nos termo entre colchetes e usando a desigualdade  $K |\dot{q}|^2 \leq K + K |\dot{q}|^3$  ( $K > 0$ ), é possível verificar que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\frac{1}{4}\delta_m |\dot{q}|^3 - \frac{1}{2}\lambda_m(K_d) |\hat{\nu}|^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_1 \frac{\lambda_m(K_p) |\tilde{q}|^2}{\sqrt{1+\tilde{q}^T \tilde{q}}} + \varepsilon_1 \kappa_1 - \left( \frac{1}{4}\delta_m - \varepsilon_1 \kappa_1 \right) |\dot{q}|^3 \\ & + (1+\varepsilon_1) |d| + \frac{1}{2\delta_m} |d|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 \frac{|q|^2}{\sqrt{1+\tilde{q}^T \tilde{q}}} \left( \frac{1}{2}\lambda_m(K_p) - \varepsilon_1 \frac{\lambda_M^2(K_d)}{\lambda_m(K_d) \sqrt{1+\tilde{q}^T \tilde{q}}} \right) \end{aligned}$$

onde  $\kappa_1 = 2\lambda_M(M) + c_1 + \delta_M + \frac{\lambda_M^2(D_l)}{2\lambda_m(K_p)}$ . Usando as desigualdades

$$\frac{|y|^3}{(1+|y|^2)} \leq \frac{|y|^2}{\sqrt{1+|y|^2}} \leq |y|^2, \quad \frac{|y|^3}{(1+|y|^2)} \leq |y|^3, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

e se  $\varepsilon$  for escolhido tal que:

$$\varepsilon_1 < \min \left\{ \frac{\lambda_m(K_p) \lambda_m(K_d)}{2\lambda_M^2(K_d)}, \frac{\delta_m}{4\kappa} \right\}$$

então, o seguinte resultado pode ser obtido:

$$\dot{V}_1 \leq -\kappa_2 \frac{|x|^3}{(1+|x|^2)} + \kappa_3 (|d| + |d|^2) + \varepsilon_1 \kappa_1 \quad (\text{D.3})$$

onde  $\kappa_2$  ( $\kappa_3$ ) é uma constante positiva suficientemente pequena (grande). De (D.3) é imediato concluir que a desigualdade (3.16) é válida. Portanto, neste caso  $V_1(x)$  é uma função de Lyapunov-ISpS para o sistema em malha fechada (3.13). Note que (D.2) é um caso particular de (3.16), onde a constante  $\bar{c}_1 = 0$ .  $\blacksquare$

## D.2 Prova do Lema 3.2

A prova deste Lema é similar à prova do Lema 2.2

De (C.2), a lei de controle definida em (3.20) pode ser reescrita como:

$$\tau = -K_p q - K_d \hat{\nu} + K_p q_d - K_d \hat{\nu}_d + Y_d \theta + d_e \quad (\text{D.4})$$

Note que (D.4) é equivalente a (3.12) com  $\tilde{q} = q$  ( $q_r = 0$ ) e

$$d_i = K_p q_d - K_d \dot{v}_d + M(q_d) \ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d) \dot{q}_d + f_D(q, \dot{q}_d) + g(q_d) + d_e$$

Como a função  $f_D(q, \dot{q}_d)$  é uniformemente limitada e a perturbação  $d_e$  também é uniformemente limitada, de acordo com a Hipótese 3.2, é possível concluir que a perturbação  $d = d_i - g(q)$  é uniformemente limitada, podendo ser majorada por:

$$|d(t)| \leq C_d, \forall t$$

onde  $C_d$  é uma constante positiva. De (3.16), pode-se verificar que  $\dot{V}_1(x) < 0$ , se  $|x| > \alpha_1^{-1}(\sigma_1(C_d) + \bar{c}_1)$ . Logo, é possível concluir que: (ver Lema 2.14 de (Sontag & Wang 1995)):

$$|x(t)| \leq \beta_x(|x(t_0)|, t - t_0) + \gamma_x(\bar{C}_d)$$

onde  $\beta_x \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma_x(r) = \underline{\alpha}_1^{-1} \circ \bar{\alpha}_1 \circ \alpha_1^{-1}(r) \in \mathcal{K}_\infty$  e  $\bar{C}_d = \sigma_1(C_d) + \bar{c}_1$ .

O restante da prova segue os desenvolvimentos apresentados na seção C.3. ■

## D.3 Prova do Lema 3.3

Considere a seguinte função de Lyapunov-ISS candidata:

$$V_2(z_e) = \frac{1}{2} \dot{e}^T M(q) \dot{e} + \frac{1}{2} e^T K_p e + \varepsilon_2 \phi^T(e) M(q) \dot{e}$$

onde  $\varepsilon_2$  é uma constante positiva suficientemente pequena e a função  $\phi(e)$  é definida em (2.30). De acordo com a Proposição 2.3,  $V_2(z_e)$  é uma função de armazenamento suave se  $\varepsilon_2$  satisfizer a desigualdade (2.35).

A derivada temporal de  $V_2(z_e)$  ao longo das soluções de (3.23) é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(z_e) = & - \dot{e}^T (f_D(q, \dot{q}) - f_D(q, \dot{q}_d)) - \dot{e}^T K_d \dot{e} - \dot{e}^T K_d \epsilon_e - \dot{e}^T h_e + \dot{e}^T d_e \\ & + \varepsilon_2 \dot{\phi}^T(e) M(q) \dot{e} + \varepsilon_2 \phi^T(e) C^T(q, \dot{q}) \dot{e} - \varepsilon_2 \phi^T(e) (f_D(q, \dot{q}) - f_D(q, \dot{q}_d)) \\ & - \varepsilon_2 \phi^T(e) K_p e - \varepsilon_2 \phi^T(e) K_d \dot{e} - \varepsilon_2 \phi^T(e) K_d \epsilon_e - \varepsilon_2 \phi^T(e) h_e + \varepsilon_2 \phi^T(e) d_e \end{aligned}$$

onde as Propriedades 3.3 e 3.4 foram utilizadas. De acordo com a Propriedade 3.10, pode-se concluir que:

$$\dot{e}^T (f_D(q, \dot{q}) - f_D(q, \dot{q}_d)) \geq 0 \tag{D.5}$$

Considere a função contínua  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que é continuamente diferenciável no intervalo  $(0, 1)$ , e dada por  $\varphi(\xi) = \xi\dot{q} - (1 - \xi)\dot{q}_d$ . Do Teorema do Valor Médio (Abraham, Marsden & Ratiu 1988), o seguinte resultado pode ser estabelecido:

$$f_D(q, \dot{q}) - f_D(q, \dot{q}_d) = (\dot{q} - \dot{q}_d) \int_0^1 \frac{\partial f_D(q, \varphi(\xi))}{\partial \varphi(\xi)} d\xi \quad (\text{D.6})$$

De (D.6) e usando a Propriedade 3.11, tem-se que:

$$|f_D(q, \dot{q}) - f_D(q, \dot{q}_d)| \leq (K_1 + 2K_2 |\dot{q}_d|_M) |\dot{e}| + K_2 |\dot{e}|^2 \quad (\text{D.7})$$

Desta forma, pode ser verificado que:

$$|\varepsilon_2 \phi^T(e) (f_D(q, \dot{q}) - f_D(q, \dot{q}_d))| \leq \varepsilon_2 (K_1 + 2K_2 |\dot{q}_d|_M) |\phi(e)| |\dot{e}| + \varepsilon_2 K_2 c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2} |\dot{e}|^2 \quad (\text{D.8})$$

onde a desigualdade (2.32) foi utilizada. Usando os majorantes (C.18)–(C.22) e as desigualdades (D.5) e (D.8), a derivada temporal  $\dot{V}_2(z_e)$  pode ser majorada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\frac{1}{2} \dot{e}^T K_d \dot{e} - \left[ \frac{1}{4} \dot{e}^T K_d \dot{e} - \lambda_M(K_d) |\dot{e}| |\epsilon_e| \right] + c_1 |\dot{q}_d|_M |\dot{e}|^2 + |\dot{e}| |\phi(e)| \\ & - \left[ \frac{1}{4} \dot{e}^T K_d \dot{e} - |\dot{e}| |d_e| \right] + 2\varepsilon_2 \lambda_M(M) c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} |\dot{e}|^2 + 2\varepsilon_2 c_1 |\dot{q}_d|_M |\dot{e}| |\phi(e)| \\ & + \varepsilon_2 c_1 c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2} |\dot{e}|^2 + \varepsilon_2 (K_1 + 2K_2 |\dot{q}_d|_M) |\phi(e)| |\dot{e}| + \varepsilon_2 K_2 c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2} |\dot{e}|^2 \\ & - \frac{1}{2} \varepsilon_2 \frac{\lambda_m(K_p)}{c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}} |\phi(e)|^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_2 \lambda_m(K_p) c_h \frac{\sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} |e|^2}{\sqrt{1 + \varsigma^2} |e|^2} + \varepsilon_2 \lambda_M(K_d) |\phi(e)| |\dot{e}| \\ & - \left[ \frac{1}{8} \varepsilon_2 \frac{\lambda_m(K_p)}{c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}} |\phi(e)|^2 - \varepsilon_2 \lambda_M(K_d) |\phi(e)| |\epsilon_e| \right] + \varepsilon_2 |\phi(e)|^2 \\ & - \left[ \frac{1}{8} \varepsilon_2 \frac{\lambda_m(K_p)}{c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}} |\phi(e)|^2 - \varepsilon_2 |\phi(e)| |d_e| \right] \end{aligned}$$

Completando os quadrados nos termos entre colchetes, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & - [|\dot{e}| |\phi(e)|] Q \begin{bmatrix} |\dot{e}| \\ |\phi(e)| \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \varepsilon_2 \lambda_m(K_p) c_h \frac{\sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} |e|^2}{\sqrt{1 + \varsigma^2} |e|^2} + \frac{\lambda_M^2(K_d)}{\lambda_m(K_d)} |\epsilon_e|^2 \\ & + \frac{|d_e|^2}{\lambda_m(K_d)} + \varepsilon_2 \frac{2c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \lambda_M^2(K_d)}{\lambda_m(K_p)} |\epsilon_e|^2 + \varepsilon_2 \frac{2c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}}{\lambda_m(K_p)} |d_e|^2 \quad (\text{D.9}) \end{aligned}$$

onde  $Q$  é uma matriz simétrica dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \lambda_m(K_d) - \chi_2 & -\frac{\chi_3}{2} \\ -\frac{\chi_3}{2} & \varepsilon_2 \left( \frac{\lambda_m(K_p)}{2c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}} - 1 \right) \end{bmatrix}$$

com  $\chi_2$  e  $\chi_3$  definidos em (3.28) e (3.29), respectivamente.

Se os parâmetros  $K_p$ ,  $K_d$  forem escolhidos de forma que as condições (3.26) e (3.27) sejam satisfeitas, então  $Q$  será positiva definida. De (D.9) e como

$$\frac{|e|^2}{\sqrt{1 + \varsigma^2 |e|^2}} \geq \frac{|e|^2}{\sqrt{1 + |e|^2}},$$

pode-se mostrar que  $\dot{V}_2(z_e)$  pode ser majorada do seguinte modo:

$$\dot{V}_2(z_e) \leq -\alpha_2(|z_e|) + \sigma_2^\epsilon(|\epsilon_e|) + \sigma_2^d(|d_e|) \quad (\text{D.10})$$

onde  $\alpha_2(r) = \kappa_7 r^2 / \sqrt{1 + r^2} \in \mathcal{K}_\infty$ , com

$$\kappa_7 = \min \left\{ \lambda_m(Q), \frac{1}{4} \varepsilon_2 \lambda_m(K_p) c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \right\}; \quad (\text{D.11})$$

$\sigma_2^\epsilon(r) = \kappa_8 r^2 \in \mathcal{K}_\infty$ , com

$$\kappa_8 = \frac{\lambda_M^2(K_d) \left( \lambda_m(K_p) + 2\varepsilon_2 c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \lambda_m(K_d) \right)}{\lambda_m(K_d) \lambda_m(K_p)} \quad (\text{D.12})$$

e  $\sigma_2^d(r) = \kappa_9 r^2 \in \mathcal{K}_\infty$ , com

$$\kappa_9 = \frac{\lambda_m(K_p) + 2\varepsilon_2 c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} \lambda_m(K_d)}{\lambda_m(K_d) \lambda_m(K_p)}$$

Portanto, de acordo com a Definição 3, a função de armazenamento  $V_2(z_e)$  é uma função de Lyapunov-ISS para o subsistema- $z_e$ . Além disso, pela Definição 1, tem-se:

$$|X_e(t)| \leq \beta_z(|z_e(t_0)|, t - t_0) + \gamma_z^\epsilon(\|\epsilon_e\|) + \gamma_z^d(\|d_e\|)$$

onde  $\beta_z \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma_z^\epsilon(r) = \underline{\alpha}_2^{-1} \circ \bar{\alpha}_2 \circ \alpha_2^{-1} \circ \sigma_2^\epsilon(r)$ ,  $\gamma_z^d(r) = \underline{\alpha}_2^{-1} \circ \bar{\alpha}_2 \circ \alpha_2^{-1} \circ \sigma_2^d(r) \in \mathcal{K}_\infty$ , com  $\underline{\alpha}_2(r)$  e  $\bar{\alpha}_2$  definidas em (2.36).

Dentro de  $D_R$  a função  $\alpha_2(|z_e|)$  em (D.10) pode ser redefinida por:

$$\alpha_2(r) = \bar{\kappa}_7 r^2, \quad \bar{\kappa}_7 = \frac{\kappa_7}{\sqrt{1 + R^2}} \quad (\text{D.13})$$

onde  $\kappa_7$  é definido em (D.11). Portanto, dentro de  $D_R$ , o ganho ISS  $\gamma_z$  é dado por:

$$\gamma_z(r) = \kappa_z r, \quad \kappa_z = \sqrt{\frac{\kappa_6 \kappa_8}{\kappa_5 \bar{\kappa}_7}}$$

onde  $\kappa_5$ ,  $\kappa_6$ ,  $\bar{\kappa}_7$  e  $\kappa_8$  são definidos em (2.37), (2.38), (D.13) e (D.12), respectivamente. ■



## D.4 Prova do Lema 3.4

Considere a seguinte função de Lyapunov-ISS candidata:

$$V_3(\epsilon_e) = \frac{1}{2} \epsilon_e^T \epsilon_e,$$

cuja derivada temporal de  $V_3$  é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -\frac{1}{\mu} \epsilon_e^T \epsilon_e + \epsilon_e^T M^{-1}(q) [C(q, \dot{q}) \dot{e} + (f_D(q, \dot{q}) - f_D(q, \dot{q}_d)) \\ & + K_p e + K_d \dot{e} + K_d \epsilon_e + h_e - d_e] \end{aligned}$$

De (D.7), a seguinte desigualdade pode ser obtida:

$$|\epsilon_e^T (f_D(q, \dot{q}) - f_D(q, \dot{q}_d))| \leq (K_1 + 2K_2 |\dot{q}_d|_M) |\epsilon_e| |\dot{e}| + K_2 |\epsilon_e| |\dot{e}|^2$$

Usando a Proposição 2.2 e as Propriedades 3.1, e 3.8, a derivada temporal de  $V_3$  pode ser majorada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -\frac{1}{4\mu} \epsilon_e^T \epsilon_e - \left[ \frac{1}{8\mu} |\epsilon_e|^2 - \frac{\lambda_M(K_p) + c_h}{\lambda_m(M)} |e| |\epsilon_e| \right] - \left[ \frac{1}{8\mu} |\epsilon_e|^2 - \frac{c_1 + K_2}{\lambda_m(M)} |\dot{e}|^2 |\epsilon_e| \right] \\ & - \left[ \frac{1}{8\mu} |\epsilon_e|^2 - \frac{K_1 + 2(c_1 + K_2) |\dot{q}_d|_M + \lambda_M(K_d)}{\lambda_m(M)} |\dot{e}| |\epsilon_e| \right] \\ & - \left[ \frac{1}{8\mu} |\epsilon_e|^2 - \frac{1}{\lambda_m(M)} |d_e| |\epsilon_e| \right] - \left( \frac{1}{4\mu} - \frac{\lambda_M(K_d)}{\lambda_m(M)} \right) |\epsilon_e|^2 \end{aligned} \quad (D.14)$$

Após completar os quadrados nos termos entre colchetes, o seguinte resultado pode ser obtido para  $\mu \leq \frac{\lambda_m(M)}{4\lambda_M(K_d)}$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & -\frac{1}{4\mu} |\epsilon_e|^2 + 2\mu \frac{(\lambda_M(K_p) + c_h)^2}{\lambda_m^2(M)} |e|^2 + 2\mu \frac{(K_1 + 2(c_1 + K_2) |\dot{q}_d|_M + \lambda_M(K_d))^2}{\lambda_m^2(M)} |\dot{e}|^2 \\ & + 2\mu \frac{(K_2 + c_1)^2}{\lambda_m^2(M)} |\dot{e}|^4 + 2\mu \frac{1}{\lambda_m^2(M)} |d_e|^2 \end{aligned} \quad (D.15)$$

De (D.15), é possível mostrar que  $\dot{V}_3$  pode ser majorada pela seguinte desigualdade:

$$\dot{V}_3(\epsilon_e) \leq -\alpha_3(|\epsilon_e|) + \sigma_3^z(\mu |z_e|) + \sigma_3^d(\mu |d_e|) \quad (D.16)$$

onde  $\alpha_3(r) = \frac{1}{4\mu} r^2 \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $\sigma_3^z(\mu r) = \mu r^2 (\kappa_{10} + \kappa_{11} r^2) \in \mathcal{K}_\infty$ , com

$$\kappa_{10} = \frac{2}{\lambda_m^2(M)} \max \left\{ \begin{array}{l} (\lambda_M(K_p) + c_h)^2, \\ (K_1 + 2(c_1 + K_2) |\dot{q}_d|_M + \lambda_M(K_d))^2 \end{array} \right\} \quad (D.17)$$

$$\kappa_{11} = \frac{(K_2 + c_1)^2}{\lambda_m^2(M)} \quad (\text{D.18})$$

e  $\sigma_3^d(\mu r) = \mu \kappa_{12} r^2 \in \mathcal{K}_\infty$ , com  $\kappa_{12} = 2/\lambda_m^2(M)$ .

Portanto, de acordo com a Definição 3, a função de armazenamento é uma função de Lyapunov-ISS para o subsistema- $\epsilon_e$ . Além disso, escolhendo  $\underline{\alpha}_3(|\epsilon_e|) = \bar{\alpha}_3(|\epsilon_e|) = 1/2 |\epsilon_e|^2$ , pode-se concluir pela Definição 1 que:

$$|\epsilon_e(t)| \leq \beta_\epsilon(|\epsilon_e(t_0)|, t - t_0) + \gamma_\epsilon^z(\|z_e\|) + \gamma_\epsilon^d(\mu \|d_e\|)$$

onde  $\beta_\epsilon \in \mathcal{KL}$ ,  $\gamma_\epsilon^z(\mu r) = \alpha_3^{-1} \circ \sigma_3^z(\mu r)$  e  $\gamma_\epsilon^d(\mu r) = \alpha_3^{-1} \circ \sigma_3^d(\mu r)$ .

Dentro de  $D_R$ , a função  $\sigma_3^z(\mu |z_e|)$  pode ser redefinida da seguinte forma:

$$\sigma_3^z(\mu r) = \mu \kappa_{13} r^2 \in \mathcal{K}_\infty \quad (\text{D.19})$$

com

$$\kappa_{13} = \kappa_{10} + \kappa_{11} R^2 \quad (\text{D.20})$$

Portanto, dentro de  $D_R$ , o ganho ISS  $\gamma_\epsilon^z$  é dado por  $\gamma_\epsilon^z(\mu r) = \mu \kappa_\epsilon r$ , com  $\kappa_\epsilon = 2\sqrt{\kappa_{13}}$  ■

# Apêndice E

## Demonstração do Lema do Capítulo 4

### E.1 Demonstração do Lema 4.1

Considere a forma não recursiva equivalente do diferenciador (4.46). Usando a seguinte mudança de variáveis:

$$\sigma_i = z_i - f^{(i)}(t), \quad i = 0, \dots, n$$

o esquema não recursivo (4.47) pode ser reescrito como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}_0 = -\kappa_0 |\sigma_0|^{n/(n+1)} \text{sign}(\sigma_0) + \sigma_1 \\ \dot{\sigma}_1 = -\kappa_1 |\sigma_0|^{(n-1)/(n+1)} \text{sign}(\sigma_0) + \sigma_2 \\ \vdots \\ \dot{\sigma}_i = -\kappa_i |\sigma_0|^{(n-i)/(n+1)} \text{sign}(\sigma_0) + \sigma_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{\sigma}_n = -\kappa_n \text{sign}(\sigma_0) - f^{(n+1)}(t) \end{array} \right. \quad (\text{E.1})$$

As equações  $\dot{\sigma}_i = -\kappa_i |\sigma_0|^{(n-i)/(n+1)} \text{sign}(\sigma_0) + \sigma_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$  podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\dot{\sigma}_i = -a_i(\sigma_0)\sigma_0 - b_i(\sigma_0) + \sigma_{i+1}$$

onde:

$$a_i(\sigma_0) = \begin{cases} \kappa_i & , \quad |\sigma_0| \leq 1 \\ \frac{\kappa_i}{|\sigma_0|^{(i+1)/(n+1)}} & , \quad |\sigma_0| > 1 \end{cases}$$

$$b_i(\sigma_0) = \begin{cases} \kappa_i |\sigma_0|^{\frac{n-i}{n+1}} \text{sign}(\sigma_0) - \kappa_i \sigma_0 & , \quad |\sigma_0| \leq 1 \\ 0 & , \quad |\sigma_0| > 1 \end{cases}$$

Note que  $|a_i(\sigma_0)| < K_i$  e  $|b_i(\sigma_0)| < c_i$ , onde  $c_i$  são constantes positivas.

A equação  $\dot{\sigma}_n = -\kappa_n \text{sign}(\sigma_0) - f^{(n+1)}(t)$  pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\dot{\sigma}_n = -a_n(\sigma_0) - b_n$$

onde:

$$a_n(\sigma_0) = \kappa_n \text{sign}(\sigma_0)$$

$$b_n = f^{(n+1)}(t)$$

Note que  $|a_n(\sigma_0)| < K_n$  e  $|b_n| < K_{n+1}$ .

Definindo o vetor de estados completo como sendo  $\Sigma = [\sigma_0 \ \sigma_1 \ \dots \ \sigma_n]^T$ , o sistema (E.1) pode ser reescrito como:

$$\dot{\Sigma} = A(\Sigma)\Sigma + b(\Sigma) \tag{E.2}$$

onde:

$$A(\Sigma) = \begin{bmatrix} -a_0(\sigma_0) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1(\sigma_0) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1}(\sigma_0) & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(\sigma_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$b(\Sigma) = \begin{bmatrix} -b_0(\sigma_0) \\ -b_1(\sigma_0) \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Deve se destacar que  $\|A(\Sigma)\| < c_1$  e  $\|b(\Sigma)\| < c_2$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são duas constantes positivas.

Considere a seguinte função de Lyapunov:

$$V(\Sigma) = \Sigma^T \Sigma \tag{E.3}$$

De (E.2) a função de Lyapunov (E.3) tem a seguinte derivada temporal:

$$\dot{V}(\Sigma) = \Sigma^T [A(\Sigma) + A^T(\Sigma)] \Sigma + 2\Sigma^T b(\Sigma) \tag{E.4}$$

De (E.4), tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\Sigma) &\leq c_3 \|\Sigma\|^2 + c_4 \|\Sigma\| \\ \dot{V}(\Sigma) &\leq c_3 \|\Sigma\|^2 \\ \dot{V}(\Sigma) &\leq c_3 V(\Sigma)\end{aligned}\tag{E.5}$$

onde:  $c_3$  e  $c_4$  são constantes positivas.

Usando a equação de comparação:

$$\dot{V}_c(\Sigma) = c_3 V_c(\Sigma)$$

sabe-se que se  $V_c(0) = V(0)$ , então:

$$V(t) \leq V_c(t), \quad \forall t \geq 0$$

Como  $V_c(t) = e^{c_3 t} V_c(0)$ , então:

$$V(t) \leq e^{c_3 t} V(0)$$

Logo,  $V(t)$  não escapa em tempo finito para qualquer constante  $K_{n+1}$  finita.

# Apêndice F

## Lema Auxiliar e Provas dos Teoremas do Capítulo 5

No que se segue,  $\kappa$ 's denotam constantes positivas;  $\pi(t)$  é uma função de decaimento exponencial ( $|\pi(t)| \leq Ke^{-\lambda t}, \forall t$ ), onde  $K$  é uma constante positiva, que pode depender das condições iniciais do sistema, e  $\lambda$  é uma constante positiva (genérica).

### F.1 Lema Auxiliar

**Lema F.1** *Considere a seguinte equação diferencial:*

$$\dot{\nu} = -a_m \nu + K_p [u + d]$$

onde  $a_m > 0$ ;  $K_p$  é assumido como sendo positivo, sem perda de generalidade;  $u = -f(t)\text{sgn}(\xi(t))$ ,  $d(t)$  e  $f(t)$  são funções localmente integráveis,  $\xi(t) := \nu(t) + \beta(t)$ , onde  $\beta(t)$  é absolutamente contínua ( $\forall t$ ). Se  $f(t) \geq |d(t)|, \forall t$ , então os sinais  $\xi(t)$  e  $\nu(t)$  são limitados por:

$$|\xi(t)| \text{ and } |\nu(t)| \leq |\nu(t_0)| e^{-a_m(t-t_0)} + 2 \|\beta_{[t_0,t]}\| \quad (\text{F.1})$$

*Prova:* A demonstração é baseada no Lema da comparação (Filippov 1964). A prova completa pode ser encontrada em (Hsu et al. 1997). ■

## F.2 Prova do Teorema 5.1

Para analisar as propriedades de estabilidade e de convergência do sistema do erro em malha fechada. Primeiramente, será provado que o subsistema- $x_\varepsilon$ , definido em (5.23) é ISpS com respeito à entrada  $x_e$ . Para esta finalidade, considere a seguinte função de Lyapunov-ISpS candidata:

$$V(x_\varepsilon) = x_\varepsilon^T P x_\varepsilon,$$

onde  $P = P^T > 0$  e  $A_\varepsilon^T P + P A_\varepsilon = -Q$ , com  $Q = Q^T > 0$ . A derivada temporal de  $V(x_\varepsilon)$  ao longo da solução de (5.23) é dada por:

$$\dot{V} = -\frac{1}{\tau} x_\varepsilon^T Q x_\varepsilon + 2x_\varepsilon^T P b_\varepsilon \dot{\nu},$$

podendo ser majorada por:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{\tau} \kappa_1 |x_\varepsilon|^2 + \tau \kappa_2 |\dot{\nu}|^2 \quad (\text{F.2})$$

onde  $\kappa_1 = \lambda_m(Q)/2$  e  $\kappa_2 = 2|Pb_\varepsilon|^2/\lambda_m(Q)$ . De (F.2), é possível mostrar que:

$$|x_\varepsilon| \leq \pi_\varepsilon + \tau \kappa_3 \|\dot{\nu}_{[t_0, t]}\| \quad (\text{F.3})$$

Usando a relação  $\omega = \Omega_1 X + \Omega_2 r$  e  $x_e = X - X_m$ , tem-se que  $\omega = \Omega_1 x_e + \Omega_1 X_m + \Omega_2 r$ . Como o modelo de referência é um sistema estável e os sinais  $r$ ,  $d_f$  e  $d$  são uniformemente limitados, é possível concluir que  $X_m$  também é uniformemente limitado. Desta forma, segue que:

$$\varrho(t) < \kappa_4 |x_e| + \kappa_5 \quad (\text{F.4})$$

De (5.9), (5.18) e (F.4), e como  $\varrho(t) \geq |\bar{U}|$ , o seguinte majorante para  $\dot{\nu}$  pode ser estabelecido:

$$\|\dot{\nu}\| \leq \kappa_6 \|x_e\| + \kappa_7 \quad (\text{F.5})$$

De (F.3) e (F.5), pode-se verificar que:

$$|x_\varepsilon| \leq \pi_\varepsilon + \tau \kappa_\varepsilon \|x_{e[t_0, t]}\| + \tau \kappa_8 \quad (\text{F.6})$$

Logo, pela Definição 1, pode-se concluir que  $x_\varepsilon$  é ISpS com respeito à entrada  $x_e$ . Agora, será provado que o subsistema- $x_e$  definido em (5.9) é ISpS com respeito à entrada  $x_\varepsilon$ .

De (5.9) e (5.18), e como é assumido que a planta possui grau relativo  $\rho$ , segue que:

$$\dot{\nu} = h_c^T A_c^\rho x_e + \sum_{i=0}^{\rho-2} l_i h_c^T A_c^{(i+1)} x_e + k^* h_c^T A_c^{\rho-1} b_c [u - \bar{U}]$$

De (5.3) e usando o Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se:

$$A_c^\rho = - \sum_{i=0}^{\rho-2} l_i A_c^{(i+1)} - a_m \sum_{i=0}^{\rho-1} l_i A_c^{(i)}, \quad (l_{\rho-1} = 1)$$

Então, usando o fato de que  $k^* = K_p/K_m$ , pode-se concluir que:

$$\dot{\nu} = -a_m \nu + K_p [u - \bar{U}] \quad (\text{F.7})$$

onde o sinal de controle (5.20) pode ser reescrito como  $u = -f(t) \text{sgn}(\xi)$ , com  $\xi := \nu + \beta$  e  $\beta := \varepsilon_l + \beta_\alpha$ , uma vez que  $\hat{\nu}_l = \nu + \varepsilon_l$ . De (5.23) e usando o fato que  $\beta_\alpha \leq \tau K_R$ , o sinal auxiliar  $\beta(t)$  pode ser majorado por:

$$\|\beta\| \leq \|x_\varepsilon\| + \tau K_R$$

Agora, como  $\varrho(t) \geq |\bar{U}|$  e  $\beta(t)$  é absolutamente contínuo, aplicando o Lema F.1 para (F.7), tem-se:

$$|\nu(t)| \leq \pi_\nu + 2 \left\| x_{\varepsilon_{[t_0, t]}} \right\| + 2\tau K_R \quad (\text{F.8})$$

De (5.9) e (F.7), o seguinte resultado pode ser obtido:

$$\dot{x}_e = A_c x_e + \frac{b_c}{K_m} (\dot{\nu} + a_m \nu)$$

Então, para eliminar o termo derivativo  $\dot{\nu}$ , a seguinte transformação de variáveis  $\hat{x}_e := x_e - [b_c \nu]/K_m$  é realizada, resultando em:

$$\dot{\hat{x}}_e = A_c \hat{x}_e + \frac{b_c}{K_m} (A_c + a_m I) \nu$$

Deste modo, o erro auxiliar  $\hat{x}_e$  pode ser majorado por:  $|\hat{x}_e(t)| \leq \pi_{\hat{e}}(t) + \nu_f(t)$ , onde  $\nu_f(t) = W_\nu(t) * |\nu(t)|$ , com  $W_\nu(t)$  sendo a resposta ao impulso de um filtro de primeira ordem dado por  $W_\nu(s) = c_e/(s + \lambda_e)$ , onde  $\lambda_e := \min_k \{-\text{Re}(p_k)\}$ , com  $\{p_k\}$  sendo os autovalores de  $A_c$ . De (F.8) e como  $|x_e| \leq |\hat{x}_e| + \kappa_9 |\nu|$ , pode-se verificar que:

$$|x_e| \leq \pi_e + \kappa_e \left\| x_{\varepsilon_{[t_0, t]}} \right\| + \tau \kappa_{10} \quad (\text{F.9})$$



Portanto, pela Definição 1, é possível concluir que  $x_e$  é ISpS com respeito à entrada  $x_\varepsilon$ . De acordo com o Teorema de Pequeno Ganhos Generalizado (Jiang et al. 1994, Jiang & Mareels 1997), se  $\tau$  for escolhido tal que:

$$\tau \leq \frac{1}{\kappa_e \kappa_\varepsilon},$$

pode-se concluir que o sistema do erro com estado  $X_e^T = [x_e^T \ x_\varepsilon^T]$  é GApS. Além disso, como as funções de classe  $\mathcal{KL}$  das desigualdades (F.6) e (F.9) são exponenciais e os ganhos ISpS são lineares, é possível estender este resultado, provando estabilidade exponencial prática para este caso.

De (F.6), (F.9), e como  $|X_e(t)| \leq |x_\varepsilon(t)| + |x_e(t)|$ , é possível mostrar que:

$$|X_e(t)| \leq \kappa_{11} |X_e(t_0)| + \tau \kappa_{12}, \quad \forall t_0, \forall t \quad (\text{F.10})$$

Seguindo as provas do Teorema 2.1 em (Jiang et al. 1994) e do Teorema 1 em (Jiang & Mareels 1997), pode-se verificar que:

$$|X_e(t)| \leq \beta_X(|X_e(t_0)|, t - t_0) + \tau K_X, \quad \forall t_0, \forall t \quad (\text{F.11})$$

onde  $\beta_X \in \mathcal{KL}$  e  $\tau K_X$  é uma constante que depende linearmente de  $\tau \kappa_8$  e  $\tau \kappa_{10}$ . Se  $|X_e(t_0)| = 0$ , segue que  $|X_e(t)| \leq \tau K_X, \forall t_0, \forall t$ . Agora, considerando que  $|X_e(t_0)| \neq 0$  e a seguinte transformação de variáveis:  $\bar{x}_\varepsilon = x_\varepsilon / |X_e(t_0)|$  and  $\bar{x}_e = x_e / |X_e(t_0)|$ , tem-se:

$$\begin{aligned} |\bar{x}_\varepsilon| &\leq \pi_\varepsilon + \tau \kappa_\varepsilon \left\| \bar{x}_{\varepsilon[t_0, t]} \right\| + \frac{\tau \kappa_8}{|X_e(t_0)|}, \\ |\bar{x}_e| &\leq \pi_e + \kappa_e \left\| \bar{x}_{\varepsilon[t_0, t]} \right\| + \frac{\tau \kappa_{10}}{|X_e(t_0)|} \end{aligned}$$

De (F.11) e como o termo  $\tau K_X$  é linear, o seguinte majorante pode ser estabelecido:

$$|\bar{X}_e(t)| \leq \beta_X(|\bar{X}_e(t_0)|, t - t_0) + \frac{\tau K_X}{|X_e(t_0)|}, \quad \forall t_0, \forall t,$$

onde  $\bar{X}_e^T = [\bar{x}_e^T \ \bar{x}_\varepsilon^T]$ . Logo, é possível concluir que:

$$|X_e(t)| \leq |X_e(t_0)| \beta_X(1, t - t_0) + \tau K_X, \quad \forall t_0, \forall t \quad (\text{F.12})$$

Como  $\beta_X$  é uma função de classe  $\mathcal{KL}$ , existem  $T_\beta$  and  $\varsigma < 1$  tais que  $\beta_X(1, t - t_0) = \varsigma$ , para  $t = t_0 + T_\beta$ . Notando que o tempo inicial  $t_0$  é irrelevante para o desenvolvimento das expressões acima, pode-se escrever, para um tempo  $t \geq t_0 \geq 0$  arbitrário:

$$|X_e(t_{k+1})| \leq \varsigma |X_e(t_k)| + \tau K_X, \quad (\text{F.13})$$

onde  $t_1 := t_0 + T_\beta$  e  $t_{k+1} := t_k + T_\beta$ . Através da simples desigualdade recursiva (F.13) e de (F.10) pode-se concluir que, para  $\tau$  suficientemente pequeno, o sistema do erro com estado  $X_e$  é GEPS com respeito a um conjunto residual de ordem  $\tau$ , i.e, existem constantes positivas  $c_X$  e  $a$  tais que

$$\forall X_e(t_0), \forall t \geq t_0 \geq 0, |X_e(t)| \leq c_X e^{-a(t-t_0)} |X_e(t_0)| + O(\tau)$$

Desta forma, o estado  $X_e$ , e conseqüentemente os estados  $x_e$  e  $x_\varepsilon$ , são uniformemente limitados. Além disso, como  $X_m$  é uniformemente limitado, segue que o estado aumentado  $X$ , bem como os estados  $\bar{x}$ ,  $\omega_u$  e  $\omega_y$  também são uniformemente limitados. Finalmente, é possível concluir que todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados, através da Hipótese 5.1. ■

### F.3 Prova do Corolário 5.1.2

O sinal  $e^{(\rho)}(t)$  é dado por:

$$e^{(\rho)}(t) = h_c^T A_c^\rho x_e(t) + k^* h_c^T A_c^{\rho-1} b_c [u(t) - \bar{U}(t)]$$

Como o estado  $x_e(t)$ , e os sinais  $u(t)$  e  $\bar{U}(t)$  são uniformemente limitados, pode-se concluir que  $e^{(\rho)}(t)$  também é uniformemente limitado. Além disso, o seguinte majorante pode ser obtido:

$$|e^{(\rho)}(t)| \leq |h_c^T A_c^\rho| |x_e(t)| + |k^* h_c^T A_c^{\rho-1} b_c| 2\rho(t)$$

Logo, (5.25) segue, de (F.4) e da suposição de que  $|x_e(t)| \leq R \forall t \geq T$ . ■

### F.4 Prova do Teorema 5.2

As estimativas fornecidas pelo filtro de avanço e pelo RED podem ser relacionadas com  $\nu$  em (5.18) da seguinte forma:

$$\hat{\nu}_l(t) = \nu(t) + \varepsilon_l(t), \quad \hat{\nu}_r(t) = \nu(t) + \varepsilon_r(t) \quad (\text{F.14})$$

Onde  $\varepsilon_l(t)$  e  $\varepsilon_r(t)$  são erros de estimação. De (F.14), a equação (5.27) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_g(t) &= \nu(t) + \varepsilon_g(t), \\ \varepsilon_g(t) &= \alpha(\tilde{\nu}_{rl})\varepsilon_l(t) + [1 - \alpha(\tilde{\nu}_{rl})]\varepsilon_r(t) \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

O erro de estimação  $\varepsilon_g(t)$  pode ser considerado como sendo uma perturbação de saída. Deste modo, o sistema (5.1), (5.3), (5.27) e (5.29) pode ser descrito por:

$$\dot{x}_e = A_c x_e + k^* b_c [u - \bar{U}], \quad \nu = \bar{h}^T x_e, \quad (\text{F.16})$$

$$u = -f(t) \text{sgn}(\nu + \varepsilon_g) \quad (\text{F.17})$$

Note que  $\{A_c, b_c, \bar{h}^T\}$  é uma realização não mínima de

$$M(s)L(s) = \frac{K_m}{s + a_m},$$

sendo, portanto, SPR. De (5.28), o erro de estimação  $\varepsilon_g(t)$  pode ser reescrito por:

$$\varepsilon_g(t) = \varepsilon_l(t) + \beta_\alpha(\tilde{\nu}_{rl}(t)) \quad (\text{F.18})$$

onde, por projeto,  $\beta_\alpha(\tilde{\nu}_{rl}(t))$  é uniformemente limitada por

$$|\beta_\alpha(\tilde{\nu}_{rl}(t))| < \varepsilon_M, \text{ com } \varepsilon_M = \tau K_R$$

Além disso,  $\beta_\alpha(\tilde{\nu}_{rl}(t))$  é uma função absolutamente contínua em  $t$ , uma vez que a função de chaveamento  $\alpha(\tilde{\nu}_{rl})$  é Lipschitz contínua e os sinais  $\hat{\nu}_r(t)$  e  $\hat{\nu}_l(t)$  são absolutamente contínuos, já que são soluções de Filippov (para maiores detalhes ver a Proposição 2 em (Nunes et al. 2004)).

Substituindo (F.18) em (F.17), pode ser visto que a equação (F.17) é equivalente a (5.24), onde  $\varepsilon_l(t)$  é dado por (5.23),  $\nu(t)$  é dado por (5.18) e  $e(t)$  é dado por (5.9). Logo, o sistema com o controlador GRED-SMC descrito por (F.15), (F.16) e (F.17) com função de chaveamento  $\alpha(\tilde{\nu}_{rl}(t))$  definida em (5.28) é equivalente a um SMC usando um filtro de avanço de fase com uma perturbação de saída  $\beta_\alpha(\tilde{\nu}_{rl})$ , podendo, então, ser descrito de forma equivalente por (5.9), (5.18), (5.23) e (5.24), com  $|\beta_\alpha(\tilde{\nu}_{rl}(t))| \leq \varepsilon_M$ .

Portanto, o Teorema 5.1 é válido se todos os sinais do sistema em malha fechada forem limitados para todo  $t$  finito, ou seja, se eles pertencerem a  $L_{\infty e}$ . Para provar que esta condição é verdadeira basta apenas mostrar que os sinais do RED pertencem a  $L_{\infty e}$ . Esta propriedade pode ser provada por contradição. Suponha que o máximo intervalo para o qual os sinais do RED são definidos seja  $[0, T_M)$ . Durante este intervalo, todas as condições do Teorema 5.1 são satisfeitas. Logo todos os sinais restantes do sistema são limitados por uma constante, inclusive o sinal  $e^{(\rho)}(t)$ ,

pelo Corolário 5.1.2. Este fato gera uma contradição com o Lema 4.1. Desta forma, pode-se concluir que os sinais do RED não podem divergir ilimitadamente à medida que  $t \rightarrow T_M$ . Como consequência do Teorema da Continuidade para equações diferenciais descontínuas (na Teoria de Filippov),  $T_M$  deve ser  $\infty$ , o que implica que todos os sinais são definidos  $\forall t \geq 0$ .

Logo, o Teorema 5.1 é válido para o sistema com o controlador GRED-SMC e, portanto, o sistema do erro em malha fechada com estado  $X_e$  é GEpS com respeito a um conjunto residual de ordem  $\tau$ .

Agora, a propriedade de convergência será analisada. De acordo com o Corolário 5.1.1, para  $\tau$  suficientemente pequeno, o estado do erro  $X_e$  é conduzido globalmente para um conjunto compacto e invariante  $D_R := \{X_e : |X_e(t)| < R\}$  num tempo finito  $T_1 \geq 0$ . Então, de (F.6), segue que

$$\|x_{\varepsilon_{[T_1, t]}}\| \leq \pi_\varepsilon + \tau\kappa_\varepsilon R + \tau\kappa_8$$

Como  $|\varepsilon_l| \leq |x_\varepsilon|$ , é fácil verificar que para algum tempo finito  $T_2 \geq T_1$ ,  $\|\varepsilon_{l_{[T_2, t]}}\| \leq \bar{\varepsilon}_l$ , onde  $\bar{\varepsilon}_l = \tau K_l$ , com  $K_l$  sendo uma constante positiva apropriada.

Como o RED é invariante no tempo, suas condições iniciais podem ser consideradas em  $T_1$ . Do Lemma 4.1, sabe-se que estas condições iniciais são finitas. Se os parâmetros  $\lambda_i$  forem ajustados apropriadamente (e.g. (4.51)), então pelo Teorema 4.4 o erro de estimação  $\varepsilon_r(t)$  converge para zero num tempo finito  $T_3 > T_1$ .

Como  $K_R$  é escolhido de modo que  $\varepsilon_M > \bar{\varepsilon}_l + \Delta$ , então  $\alpha(\check{\nu}_{rl}) = 0$ , após algum tempo finito  $\bar{T} = \max\{T_2, T_3\}$ , o que implica que  $\varepsilon_g(t) = 0, \forall t \geq \bar{T}$ . Neste caso, uma malha de deslizamento ideal é formada e aplicando o Lema 1 de (Hsu et al. 1997) para o sistema (F.15)–(F.17), com  $\varrho(t)$  satisfazendo (5.16), pode-se concluir que o estado do erro  $X_e$  converge exponencialmente para zero e  $\nu$  se torna identicamente nulo após algum tempo finito. ■

# Apêndice G

## Provas das Proposições e do Teorema do Capítulo 6

### G.1 Prova do Teorema 6.1

De (6.18) e (6.20) é possível verificar que  $\hat{v}_g$  pode ser reescrito por:

$$\hat{v}_g = \hat{v}_e + d_\alpha \tag{G.1}$$

onde  $d_\alpha(t)$  é uniformemente limitado por  $\bar{d}_\alpha$ . Além disso, como a função de chaveamento é Lipschitz contínua e os sinais  $\hat{v}_e$  e  $\hat{v}_r$  são absolutamente contínuos, já que são soluções de Filippov, é possível concluir que o sinal  $d_\alpha(t)$  é absolutamente contínuo.

Substituindo (G.1) em (6.19) e como  $\bar{d}_\alpha \leq \bar{d}_o$ , de acordo com (6.21), pode-se concluir que (6.18)–(6.20) é equivalente a (6.6), (6.10)–(6.12), com  $d_\alpha = d_o$ . Portanto, de acordo com a Hipótese 6.6 o sistema completo do erro (6.5), (6.10)–(6.12) é (GApS)

Para provar que todos os sinais do sistema são limitados para todo  $t$  finito, ou seja, que eles pertencem a  $L_{\infty e}$ , basta apenas mostrar que os sinais do RED pertencem a  $L_{\infty e}$ , já que os demais sinais são uniformemente limitados segundo a Hipótese 6.6. Um simples argumento por contradição é suficiente para provar esta propriedade. Suponha que o máximo intervalo de definição dos sinais presentes no RED seja  $[0, T_M)$ . Durante este intervalo, pela Hipótese 6.6 o sinal  $e(t)^{(\rho)}$  é uniformemente limitado, fato que gera uma contradição com o Lema 4.1. Desta

forma, pode-se concluir que os sinais do RED não podem divergir ilimitadamente à medida que  $t \rightarrow T_M$ . Como consequência do Teorema da Continuação para equações diferenciais descontínuas (na Teoria de Filippov),  $T_M$  deve ser  $\infty$ , o que implica que todos os sinais do sistema em malha fechada são definidos  $\forall t \geq 0$  finito.

Para concluir, falta mostrar que a função de chaveamento (6.20) também assegura que o estado  $x_e$  converge globalmente para zero. De acordo com a Hipótese 6.6, o estado  $X_e(t)$  converge para um conjunto compacto  $D_R := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$  num tempo finito  $T_1$ . Dentro deste conjunto, pela Hipótese 6.6 a derivada  $e$  de ordem  $\rho$  pode ser majorada por (6.13). Como o RED é um sistema invariante no tempo suas condições iniciais podem ser consideradas em  $t = T_1$ . Do Lema 4.1 sabe-se que estas condições iniciais serão finitas. Desta forma, se os parâmetros  $\lambda_i$  forem escolhidos apropriadamente ( e.g. (4.51)), então pelo Teorema 4.4  $\hat{\nu}_r = \nu, \forall t \geq T_2$ , para algum tempo finito  $T_2 \geq T_1$ .

Como o erro de estimação  $\epsilon_r(t) = \hat{\nu}_r - \nu$  cometido pelo RED se torna zero num tempo finito  $T_2$ , tem-se:

$$|\tilde{\nu}_{re}| = |\hat{\nu}_r - \hat{\nu}_e| = |\epsilon_r - \epsilon_e| = |\epsilon_e|, \forall t \geq T_2$$

De acordo com a Hipótese 6.7 o erro de estimação  $\epsilon_e$  pode ser majorado por  $\bar{\epsilon}_e$  após algum tempo finito  $T_3$ . Como o parâmetro  $\bar{d}_\alpha$  é escolhido tal que  $\bar{d}_\alpha \geq \bar{\epsilon}_e + \Delta$ , então, da definição da função de chaveamento (6.20), pode-se concluir que após um tempo finito  $T_4 = \max\{T_2, T_3\}$ , a estimação da saída  $\nu$  passa a ser exata, sendo feita exclusivamente pelo RED ( $\alpha(\tilde{\nu}_{re}) = 0, \forall t \geq T_3$ ).

Portanto, após um tempo finito  $T_4$ ,  $\hat{\nu}_g = \nu$ . Logo, a lei de controle (6.19) passa a ser igual a lei de controle (6.7) e de acordo com a Hipótese 6.4 o estado  $x_e$  converge uniformemente globalmente assintoticamente para zero. ■

## G.2 Prova da Proposição 6.1

Considere a seguinte função de Lyapunov candidata:

$$V(x_e) = \frac{1}{2} \dot{e}^T M(q) \dot{e} + \frac{1}{2} e^T K_p e + \varepsilon_2 \phi^T(e) M(q) \dot{e}$$

A derivada temporal de  $V_2(x_e)$  ao longo da solução de (6.29) é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_e) = & -\dot{e}^T (f_D(q, \dot{q}) - f_D(q, \dot{q}_d)) - \dot{e}^T K_d \dot{e} - \dot{e}^T h_e + \dot{e}^T \left( Y_d \tilde{\theta} + U(e, \dot{e}) \right) \\ & + \varepsilon_2 \dot{\phi}^T(e) M(q) \dot{e} + \varepsilon_2 \phi^T(e) C^T(q, \dot{q}) \dot{e} - \varepsilon_2 \phi^T(e) (f_D(q, \dot{q}) - f_D(q, \dot{q}_d)) \\ & - \varepsilon_2 \phi^T(e) K_p e - \varepsilon_2 \phi^T(e) K_d \dot{e} - \varepsilon_2 \phi^T(e) h_e + \varepsilon_2 \phi^T(e) \left( Y_d \tilde{\theta} + U(e, \dot{e}) \right)\end{aligned}$$

onde as Propriedades 3.3 e 3.4 foram utilizadas.

Seguindo os desenvolvimentos apresentados na seção D.3, fazendo as devidas modificações, pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned}\dot{V} \leq & -\dot{e}^T K_d \dot{e} + c_1 |\dot{q}_d|_M |\dot{e}|^2 + |\dot{e}| |\phi(e)| + (\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e))^T \left( Y_d \tilde{\theta} + U(e, \dot{e}) \right) \\ & + 2\varepsilon_2 \lambda_M(M) c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} |\dot{e}|^2 + 2\varepsilon_2 c_1 |\dot{q}_d|_M |\dot{e}| |\phi(e)| + \varepsilon_2 c_1 c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2} |\dot{e}|^2 \\ & + \varepsilon_2 (K_1 + 2K_2 |\dot{q}_d|_M) |\phi(e)| |\dot{e}| + \varepsilon_2 K_2 c_h \sqrt{\frac{1}{\varsigma^2} + \Delta_h^2} |\dot{e}|^2 - \frac{3}{4} \varepsilon_2 \frac{\lambda_m(K_p)}{c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}} |\phi(e)|^2 \\ & - \frac{1}{4} \varepsilon_2 \lambda_m(K_p) c_h \frac{\sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} |e|^2}{\sqrt{1 + \varsigma^2} |e|^2} + \varepsilon_2 \lambda_M(K_d) |\phi(e)| |\dot{e}| + \varepsilon_2 |\phi(e)|^2\end{aligned}$$

De (6.26) é possível verificar que:

$$(\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e))^T U(e, \dot{e}) = -\varrho(t) \frac{(\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e))^T (\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e))}{\sqrt{(\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e))^T (\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e))}} = -\varrho(t) |\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e)|$$

Logo o termo  $(\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e))^T (Y_d \tilde{\theta} + U(e, \dot{e}))$  pode ser majorado do seguinte modo:

$$\begin{aligned}(\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e))^T (Y_d \tilde{\theta} + U(e, \dot{e})) & \leq -\left(\varrho(t) - |Y_d \tilde{\theta}|\right) |\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e)| \\ & \leq -\delta |\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e)|\end{aligned}\tag{G.2}$$

onde a segunda desigualdade de (G.2) é obtida a partir da definição da função de modulação, apresentada em (6.28). Desta forma, o seguinte resultado pode ser obtido:

$$\dot{V}(x_e) \leq -\left[ |\dot{e}| \quad |\phi(e)| \right] Q \begin{bmatrix} |\dot{e}| \\ |\phi(e)| \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \varepsilon_2 \lambda_m(K_p) c_h \frac{\sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2} |e|^2}{\sqrt{1 + \varsigma^2} |e|^2} - \delta |\dot{e} + \varepsilon_2 \phi(e)|$$

onde  $Q$  é uma matriz simétrica dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_m(K_d) - \chi_1 & -\frac{\chi_2}{2} \\ -\frac{\chi_2}{2} & \varepsilon_2 \left( \frac{3\lambda_m(K_p)}{4c_h \sqrt{1 + \varsigma^2 \Delta_h^2}} - 1 \right) \end{bmatrix}$$

com  $\chi_2$  e  $\chi_3$  definidos por:

$$\chi_1 := c_1 |\dot{q}_d|_M + 2\varepsilon_2 \lambda_M(M) c_h \sqrt{1 + \zeta^2 \Delta_h^2} + \varepsilon_2 c_h \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} + \Delta_h^2} (c_1 + K_2)$$

$$\chi_2 := 1 + \varepsilon_2 (K_1 + 2K_2 |\dot{q}_d|_M + \lambda_M(K_d) + 2c_1 |\dot{q}_d|_M);$$

Se os parâmetros  $K_p$  e  $K_d$  forem suficientemente grandes, então  $Q$  será positiva definida, o que implica que a função  $\dot{V}(x_e)$  é negativa definida. Desta forma, pode-se concluir que o sistema do erro em malha fechada (6.29) é GAS. ■

### G.3 Prova da Proposição 6.2

De (6.30), tem-se:

$$\dot{\hat{\nu}}_e = -\frac{1}{\mu} \hat{\nu}_e + \frac{1}{\mu} \dot{e} \quad (\text{G.3})$$

A derivada temporal da função de Lyapunov candidata  $V(\nu_e) = \frac{1}{2} \hat{\nu}_e^T \nu_e$  pode ser majorada por:

$$\dot{V}(\nu_e) \leq -\frac{1}{2\mu} \hat{\nu}_e^T \nu_e + \frac{1}{2\mu} |\dot{e}|^2 \quad (\text{G.4})$$

De (G.4) e usando o Lema da comparação pode-se concluir que:

$$|\hat{\nu}_e(t)| \leq e^{-\frac{1}{2\mu}(t-t_0)} \hat{\nu}_e(t_0) + \|\dot{e}\|, \quad \forall t \quad (\text{G.5})$$

Se  $|X_e| \leq R, \forall t \geq T_R$ , então  $|\dot{e}| \leq R, \forall t \geq T_R$ . Logo o seguinte majorante para  $\hat{\nu}_e$  pode ser obtido:

$$\|\hat{\nu}_{e_{[T_R, t]}}\| \leq e^{-\frac{1}{2\mu}(T-t_0)} \hat{\nu}_e(t_0) + R \leq \kappa_1 \quad (\text{G.6})$$

onde  $\kappa_1$  é uma constante positiva. O sinal  $\ddot{e}$  é dado por:

$$\begin{aligned} \ddot{e} = & M^{-1}(e+q_d) [-C(e+q_d, \dot{e}+\dot{q}_d)(\dot{e}+\dot{q}_d) - f_D(e+q_d, \dot{e}+\dot{q}_d) - g(e+q_d) \\ & -K_p e - K_d(\hat{\nu}_e + d_o) + Y_d \theta + Y_d \tilde{\theta} + U(e, \hat{\nu}_e + d_o) - M(e+q_d) \ddot{q}_d] \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

De (3.3), (3.4) e (3.5), e como  $\dot{e} \leq R$  o seguinte resultado pode ser obtido:

$$\|f_D(e+q_d, \dot{e}+\dot{q}_d)_{[T_R, t]}\| \leq \lambda_M(D_l)(|\dot{q}_d|_M + R) + \delta_M(|\dot{q}_d|_M + R)^2$$

Usando as Propriedades 3.1 e 3.8, o fato de que  $|X_e| \leq R, \forall t \geq T_R$ , e o majorante (G.6), o sinal  $\ddot{e}$  pode ser majorado por:

$$\begin{aligned} \|\ddot{e}_{[T_R, t]}\| \leq & \frac{1}{\lambda_m(M)} [(c_1 + \delta_M)(|\dot{q}_d|_M + R)^2 + \lambda_M(D_l)(|\dot{q}_d|_M + R) + c_g + \lambda_M(K_p)R \\ & + \lambda_M(K_d)(\kappa_1 + \bar{d}_o) + |Y_d| c_\theta + 2|Y_d| \bar{\theta} \lambda_M(M) |\ddot{q}_d|_M] \leq C_2 \end{aligned}$$

■



## G.4 Prova da Proposição 6.3

Considere a seguinte função de Lyapunov candidata  $V(\epsilon_e) = \frac{1}{2}\epsilon_e^T \epsilon_e$ , cuja derivada temporal pode ser majorada por:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2\mu}\epsilon_e^2 + \frac{1}{2}\mu|\ddot{e}|^2 \quad (\text{G.8})$$

De (G.8) e usando o Lema da comparação é possível mostrar que:

$$|\epsilon_e(t)| \leq e^{-\frac{1}{2\mu}(t-t_0)} |\epsilon_e(t_0)| + \mu \|\ddot{e}\| \quad (\text{G.9})$$

Seja  $T_1$  tal que  $e^{-\frac{1}{2\mu}(T_1-t_0)} |\epsilon_e(t_0)| \leq \mu C_2$ . Então, usando (G.9) e o resultado obtido na Proposição 6.2, segue que:

$$|\epsilon_e(t)| \leq 2\mu C_2 = \bar{\epsilon}_e, \forall t \geq \bar{T} \quad (\text{G.10})$$

onde  $\bar{T} = \max\{T_R, T_1\}$ . ■