



CARACTERÍSTICA DE PROPAGAÇÃO DE CONDUTORES ENTERRADOS ISOLADOS E NUS

Antônio Paulo Cardillo Magalhães

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Antonio Carlos Siqueira de Lima

Rio de Janeiro

Março de 2015

CARACTERÍSTICA DE PROPAGAÇÃO DE CONDUTORES ENTERRADOS
ISOLADOS E NUS


Antônio Paulo Cardillo Magalhães

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:


Prof. Antonio Carlos Siqueira de Lima, D.Sc.


Prof. Rubens de Andrade Júnior, D.Sc.


Prof. Guilherme Gonçalves Sotelo, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2015

Magalhães, Antônio Paulo Cardillo

Característica de Propagação de Condutores Enterrados Isolados e Nus /Antônio Paulo Cardillo Magalhães – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2015.

XIV, 78 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Antonio Carlos Siqueira de Lima

Dissertação (Mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Elétrica, 2015.

Referências Bibliográficas: p. 72-76.

1. Modelo de Onda Completa. 2. Aproximações Quase-TEM. 3. Constante de Propagação. 4. Cabos Enterrados. I. Lima, Antonio Carlos Siqueira de. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

Especialmente dedicado a

Meus pais Sr. Antônio Romão Magalhães
e Sra. Angelina Maria Cardillo Magalhães
e irmão João Mateus Cardillo Magalhães.

AGRADECIMENTOS

Eternamente grato ao meu orientador Prof. Dr. Antonio Carlos Siqueira de Lima, pela amizade, pelo conhecimento transmitido, apoio, dedicação e paciência com minha insanidade.

Agradeço meu pai Antônio Romão, minha mãe Angelina Maria e meu irmão João Mateus pelo grande apoio que tornou este trabalho possível.

Muito grato a José Carlos Leão Veloso Silva pelo trabalho que desenvolvemos e pelas grandes reflexões eletromagnéticas.

Grato, gratíssimo aos colegas de Laspot/COPPE: Aline Zimmermann, Joaquim Neto, Cristiano Carvalho, João Salvador, Thassiana Costa, Alicia Masa, Camilo Rosero, David Parrini, Mirko Yanque Tomasevich, Sergio Cárdenas, Renan Fernandes e Tálita Moura.

Aos professores da COPPE/UFRJ.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

CARACTERÍSTICA DE PROPAGAÇÃO DE CONDUTORES ENTERRADOS ISOLADOS E NUS

Antônio Paulo Cardillo Magalhães

Março/2015

Orientador: Antonio Carlos Siqueira de Lima

Programa: Engenharia Elétrica

Este trabalho apresenta um estudo sobre a constante de propagação, e, conseqüentemente, dos parâmetros impedância e admitância por unidade de comprimento de condutores enterrados nus e enterrados isolados, perante a presença de diferentes modelos de solo. Inicialmente, os parâmetros impedância e admitância são deduzidos diretamente da equação modal do modelo de onda completa. Para se estabelecer a equação modal, diferentes formulações são utilizadas. A partir dos resultados do modelo de onda completa estabeleceu-se a metodologia necessária para a obtenção das aproximações quase-TEM para condutores enterrados nus e isolados. Os limites de validade destas aproximações propostas são avaliados no domínio da frequência. Os resultados indicam que não há necessidade de se recorrer ao modelo de onda completa, pois não há somente uma possibilidade de aproximação quase-TEM, de forma que, para estudos em intervalos de frequência fora do limite de validade da aproximação, pode-se estabelecer outra aproximação denominada por *High Frequency Quasi-TEM Approximation (HFQT)*.

Os efeitos das aproximações propostas são avaliados no domínio do tempo sobre a consideração do efeito da corrente de deslocamento no solo. As respostas temporais são obtidas para os casos de condutor monofásico enterrado isolado e cabo *Single Core (SC)* monofásico enterrado. Para o condutor isolado não foram encontradas diferenças entre os resultados obtidos pelo modelo de onda completa e a aproximação quase-TEM. Para o cabo SC, não há extensão do modelo de onda completa, porém, os resultados indicam a importância de se considerar a corrente de deslocamento no solo na análise de sobretensões na blindagem do condutor.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

CHARACTERISTIC OF PROPAGATION OF BURIED INSULATED AND BARE CABLES

Antônio Paulo Cardillo Magalhães

March/2015

Advisor: Antonio Carlos Siqueira de Lima

Department: Electric Engineering

This work presents a study on the propagation constant and the impedance and admittance per-unit of length of buried bare and insulated conductors in presence of different ground models. Initially, these parameters are deducted directly from the full-wave modal equation. An analysis of different formulations used to establish the modal equation is also presented. The quasi-TEM approximations for buried bare and insulated conductors are established as approximation of the full-wave model. The validity limits of these proposed approximations are evaluated in frequency domain. The results indicate that there is no need to resort to full-wave model because there is not only one possible quasi-TEM approximation, so that to studies in frequency range outside the validity limits of the approximations can be established another approximation called High Frequency Quasi-TEM Approximation (HFQT).

The effects of the proposed approximations are evaluated in the time domain on the consideration of the effect of displacement current on the ground. The time domain responses are obtained for the single-phase buried insulated conductor and a buried Single Core (SC) cable cases. In bare insulated conductor case no differences were found between the results obtained by full-wave model and quasi-TEM approximation. For the SC cable there is no extension of the full-wave model, however, the results indicate the importance of considering the displacement current in ground in analysis of sheath overvoltage.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	1
INTRODUÇÃO	1
1.1 Metodologia.....	3
1.2 Breve Contextualização.....	4
1.3 Identificação do problema	5
1.4 Motivação	7
1.5 Objetivos.....	7
1.6 Estrutura do Texto	8
CAPÍTULO 2	9
FORMULAÇÃO DO MODELO DE ONDA COMPLETA	9
2.1 Formulação Por Vetores de Hertz	11
2.2 Formulação com Potencial Escalar e Potencial Vetor.....	13
2.3 Decomposição do Vetor Potencial em Modos TE e TM.....	15
2.4 Equação Modal.....	18
2.4.1 Constante de Propagação – Linha de Transmissão	20
2.4.2 Constante de Propagação – Condutor Enterrado.....	26
2.5 Impedância Longitudinal e Admitância Transversal.....	29
2.5.1 Condutor Enterrado Nu	30
2.5.2 Condutor Enterrado Isolado	31
CAPÍTULO 3	33
PROPOSTAS DE APROXIMAÇÕES QUASE-TEM E REFORMULAÇÃO DO MODELO DE WEDEPOHL	33
3.1 Condutor Enterrado Nu	34
3.1.1 Constante de Propagação	35
3.2 Condutor Enterrado Isolado.....	37
3.2.1 Constante de Propagação	39
3.3 Proposta de Reformulação do Modelo de Onda Completa de Wedepohl ..	41
CAPITULO 4	51
CASOS TESTE.....	51

4.1	Domínio da Frequência	52
4.1.1	Condutor Enterrado Nu (comparação Z e Y por QT e FW).....	52
4.1.2	Condutor Enterrado Isolado (comparação Z e Y por QT e FW).....	53
4.2	Resposta temporal	59
4.2.1	Admitância Característica e Função de Propagação	60
4.2.2	Cabo Monofásico Enterrado Isolado.....	61
4.2.3	Condutor Enterrado Isolado e Blindado – Cabo <i>Single Core</i> (SC).....	63
4.2.4	Energização do núcleo	64
4.2.5	Energização da Blindagem.....	67
CAPÍTULO 5		70
CONCLUSÕES		70
5.1	Principais Conclusões.....	70
5.2	Propostas de Trabalhos Futuros.....	71
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....		72
ANEXO A		
RELAÇÃO ENTRE OS CAMPOS		77

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Configuração do condutor e interface entre os meios.....	10
Figura 2: Constante de atenuação. A- Wedepohl, B- D`amore e Sarto e C- Pettersson	22
Figura 3: Constante de fase. A- Wedepohl, B- D`amore e Sarto e C- Pettersson	22
Figura 4: Desvio percentual relativo à parte real de gamma em relação ao ar. A- Wedepohl, B- D`Amore e Sarto e C- Pettersson	24
Figura 5: Erro percentual relativo à parte imaginária de gamma em relação ao ar. A- Wedepohl, B- D`Amore e Sarto e C- Pettersson	24
Figura 6:: Comparação entre formulações. Real de gamma. a- Wedepohl, b- D`Amore e Sarto e c- Pettersson	25
Figura 7:Comparação entre formulações. Imaginário de gamma. a- Wedepohl, b- D`Amore e Sarto e c- Pettersson	26
Figura 8: Constante de atenuação $\sigma_s=0.01S/m$	27
Figura 9: Constante de fase, $\sigma_s=0.01S/m$	27
Figura 10: Constante e atenuação, $\sigma_s=0.001S/m$	28
Figura 11: Constante de fase, $\sigma_s=0.001S/m$	28
Figura 12: Constante de atenuação, condutor nu. FW- Modelo de onda completa e QT- Aproximação Quase-TEM.....	36
Figura 13: Constante de fase, condutor nu. FW- Modelo de onda completa e QT- Aproximação Quase-TEM.....	37
Figura 14: Constante de atenuação, condutor isolado. FW- Modelo de onda completa e QT- Aproximação Quase-TEM	39
Figura 15: Constante de fase, condutor isolado. FW- Modelo de onda completa e QT- Aproximação Quase-TEM.....	40
Figura 16: Constante de atenuação determinada pela reformulação de Wedepohl.....	46
Figura 17: Constante de fase determinada pela reformulação de Wedepohl.	47
Figura 18: Desvio entre a formulação original e a reformulação.	47
Figura 19: Constante de atenuação. Formulação proposta para condutor isolado.	48
Figura 20: Constante de fase. Formulação proposta para condutor isolado.....	49
Figura 21: Desvio entre reformulação e equação modal M.....	50
Figura 22: Fluxograma. Esquema de solução do modelo de onda completa e quase-TEM	51

Figura 23: Impedância p.u.l. (condutor nu). Za-Papadopoulos et al [27]. Zb- Onda completa e Zc- Aproximação quase-TEM Quase-TEM.....	52
Figura 24: Admitância p.u.l. (condutor nu). Ya-Papadopoulos et al [27]. Yb- Onda completa e Yc- Aproximação quase-TEM	53
Figura 25: Impedância p.u.l. (Condutor isolado). Za- Petrache et al [36], Zb- Papadopoulos et al [27], Zc- Onda completa e Zd- Aproximação quase-TEM	54
Figura 26: Admitância p.u.l. (Condutor isolado). Ya- Petrache et al [36], Yb- Papadopoulos et al [27], Yc- Onda completa e Yd- Aproximação quase-TEM	54
Figura 27: Comparação entre a constante de atenuação associada aos diferentes modelos de solo, sendo C- solo convencional, P- Modelo de solo de Portela e V- modelo de solo de Visacro.	56
Figura 28: Comparação entre a constante de fase associada aos diferentes modelos de solo, sendo C- solo convencional, p- Modelo de solo de Portela e V- modelo de solo de Visacro.....	56
Figura 29: Comparação de impedância. FW-Onda completa e QT- Aproximação quase-TEM. C- Solo convencional, P-Modelo de solo de Portela e V- Modelo de solo de Visacro.....	57
Figura 30: Comparação de admitância. FW-Onda completa e QT- Aproximação quase-TEM. C- Solo convencional, P-Modelo de solo de Portela e V- Modelo de solo de Visacro.....	58
Figura 31: Desvio de impedância entre os modelos de Onda completa e aproximação quase-TEM. C- Solo convencional, P-Modelo de solo de Portela e V- Modelo de solo de Visacro	58
Figura 32: Desvio de admitância entre os modelos de Onda completa e aproximação quase-TEM. C- Solo convencional, P-Modelo de solo de Portela e V- Modelo de solo de Visacro.....	59
Figura 33: Esquema de energização do condutor.....	61
Figura 34: Resposta ao degrau unitário de tensão. Sistema monofásico isolado. FW-Onda completa e QT- Aproximação quase-TEM. C- Solo convencional, P-Modelo de solo de Portela e V- Modelo de solo de Visacro	62
Figura 35: Resposta ao degrau unitário de tensão. Sistema monofásico isolado. FW-Onda completa e QT- Aproximação quase-TEM. C- Solo convencional, P-Modelo de solo de Portela e V- Modelo de solo de Visacro.	62

Figura 36: A-Geometria considerada para o cabo XLPE enterrado. B- Configuração e disposição das camadas condutoras e dielétricas do cabo.	63
Figura 37: Esquema de energização do núcleo do cabo.	64
Figura 38: Tensão no terminal "1".	65
Figura 39: Tensão no terminal "2".	65
Figura 40: Tensão no terminal "3".	66
Figura 41: Tensão no terminal "4".	66
Figura 42: Energização da blindagem.	67
Figura 43: Tensão no terminal "1".	68
Figura 44: Tensão no terminal "2".	68
Figura 45: Tensão no terminal "3".	69
Figura 46: Tensão no terminal "4".	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Parâmetros dos cabos.....	63
-------------------------------------	----

Nomenclatura

A – Potencial Vetor Magnético

α – Constante de Atenuação (Np/m)

B – Indução Magnética

β – Constante de Fase (rad/s)

D – Indução Elétrica

E – Intensidade de Campo Elétrico

ϵ_0 – Permissividade Elétrica do Vácuo ($8,854 \times 10^{-12} F/m$)

ϵ_r – Permissividade Elétrica Relativa

F – Vetor Potencial Elétrico

ϕ – Potencial Escalar Elétrico

φ – Potencial Escalar Magnético

γ – Constante de Propagação ($\gamma = \alpha + j\beta$)

H – Intensidade de Campo Magnético

J – Densidade de Corrente

$$j = \sqrt{-1}$$

k_1 – Constante de Propagação do Meio “1”

k_2 – Constante de Propagação do Meio “2”

μ_0 – Permeabilidade Magnética do Vácuo ($4\pi \times 10^{-7} H/m$)

μ_r – Permeabilidade Magnética Relativa

Π_E – Vetor de Hertz do Tipo Elétrico

Π_M – Vetor de Hertz do Tipo Magnético

σ – Condutividade Elétrica

Y_{ext} – Admitância de Retorno Pelo Solo (S/m)

Z_{ext} – Impedância de Retorno Pelo Solo (Ω/m)

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A análise transitória de um dispositivo ou um sistema de potência é de fundamental relevância para que se possa obter seu comportamento dinâmico quando em operação em condição de anomalia. Do ponto vista de transitórios eletromagnéticos, existe uma ampla gama de fenômenos de origem interna ao sistema, como chaveamentos, curto-circuitos, manobras, etc, ou de origem externa, como por exemplo, surtos de descargas atmosféricas, que podem colocar, com severidade, o sistema ou dispositivo em condições de operação anômalas.

Dadas as características de cada fenômeno envolvido, descritas por parâmetros com diferentes constantes de tempo, conseqüentemente, com diferentes espectros de frequências associados, a modelagem matemática para a análise de transitórios eletromagnéticos, particularmente para modelagem de linhas de transmissão e cabos enterrados, torna-se uma tarefa complexa devido à dificuldade de se determinar e caracterizar a influência dos meios externos aos condutores sobre a características de propagação das ondas de tensão e corrente, devido a forte dependência de seus parâmetros com a frequência. Nomeadamente, para linhas de transmissão e cabos enterrados, as maiores incertezas concentram-se na influência da impedância e admitância de retorno pelo solo sobre suas características de propagação.

Para esta modelagem e obtenção da constante de propagação, existem, basicamente, três formulações distintas, que, independentemente da formulação empregada, obtém-se como resultado uma equação modal, que descreve os possíveis modos de propagação para linhas de transmissão ou para cabos enterrados, isolados ou nus.

Ao se admitir que os campos elétrico e magnético, em um plano perpendicular ao sentido de propagação variam de igual proporção, a dinâmica de propagação para estes campos é descrita por uma única constante de propagação complexa γ , que por sua vez, é composta pela constante de atenuação $\alpha = Re[\gamma]$ e a constante de fase $\beta = Im[\gamma]$. Esta constante de propagação é obtida pela solução das raízes da equação modal que satisfazem uma condição de igualdade a zero. Desta forma, a equação

modal relaciona diretamente os campos elétrico e magnético com as ondas de tensão transversal e corrente longitudinal na linha, cuja variação também é descrita pela constante de propagação.

No entanto, a equação modal envolve integrais infinitas, conhecidas como integrais de Sommerfeld, cuja constante de propagação desconhecida encontra-se no argumento destas integrais. Estas integrais não possuem solução analítica, onde métodos de integração numérica devem ser empregados para solucioná-las. Além disso, para se determinar as raízes da equação modal, ou seja, a constante de propagação devem-se, também, empregar métodos numéricos como, por exemplo, o Newton-Raphson. O modelo que possui a dependência explícita da constante de propagação é denominado por modelo de onda completa. Neste modelo, os parâmetros impedância e admitância de retorno pelo solo, que também são escritas em termos das integrais de Sommerfeld, e, conseqüentemente, também possuem dependência explícita da constante de propagação. Para se determinar estes parâmetros, primeiro é necessário determinar a constante de propagação e posteriormente inserir este resultado no argumento das integrais infinitas e novamente resolvê-las numericamente. Estas dificuldades de solução do modelo de onda completa motivaram, e ainda motivam, o desenvolvimento de aproximações com a finalidade de se estabelecer meios de livrar as integrais de Sommerfeld, e conseqüentemente, a impedância e admitância de retorno pelo solo da dependência da constante de propagação desconhecida.

Neste sentido, podem-se citar duas aproximações. A primeira, denominada por aproximação quase-TEM (quase Transversal Eletromagnético), admite que a constante de propagação desconhecida possa ser ajustada, ou seja, substituída normalmente pela constante de propagação do meio externo ao condutor. Assim, para linha de transmissão substitui-se pela constante de propagação do ar, e para cabos enterrados, pela constante de propagação do solo. Notadamente, esta consideração acarreta em um desvio entre a constante de propagação obtida pelo modelo de onda completa e a calculada pela aproximação quase-TEM. Ainda não se encontra na literatura uma estratégia específica e metódica para a obtenção desta aproximação, que até a presente data é realizada de forma aleatória. A segunda, denominada por método das imagens ou método de plano complexo, baseia-se em aproximações logarítmicas, ou seja, expressões fechadas para as integrais de Sommerfeld.

Será demonstrado neste trabalho que para a obtenção da aproximação quase-TEM, a possibilidade de se admitir que a constante de propagação desconhecida é igual a constante de propagação do solo, para todo intervalo de frequências, é uma hipótese válida somente para o caso do condutor enterrado nu. Para o caso do condutor enterrado isolado, alguns cuidados adicionais devem ser considerados, resultando em duas aproximações possíveis. A primeira refere-se à resposta no intervalo de frequência da ordem de alguns Hz até dezenas de MHz. A segunda refere-se à resposta em frequência acima de cerca de 100 MHz e será denominada por (High Frequency Quasi-TEM - HFQT).

1.1 Metodologia

Para se propor este novo modelo de aproximação quase-TEM e demonstrar sua precisão, nos domínios da frequência e do tempo, seguiu-se a seguinte metodologia:

A partir das formulações de campos eletromagnéticos pelas equações de Maxwell, e pela correta aplicação das condições de contorno na superfície do condutor e na interface ar-solo, estabeleceu-se a equação modal para o modelo de onda completa. Tanto para o condutor enterrado nu, quanto para o condutor enterrado isolado.

O comportamento do cabo enterrado foi avaliado diretamente pela resposta da constante de propagação, no domínio da frequência, obtida pelo modelo de onda completa, para o caso do condutor enterrado nu e enterrado isolado. Estes resultados estabeleceram e sustentaram as hipóteses necessárias para a definição das aproximações quase-TEM. Assim, as aproximações quase-TEM são obtidas diretamente dos resultados do modelo de onda completa tornando esta metodologia bastante robusta e de grande precisão.

As formulações apresentadas serão avaliadas nos domínios da frequência e do tempo. O objetivo destas simulações é avaliar o impacto das aproximações desenvolvidas. Para isso, diferentes modelos de solo com e sem corrente de deslocamento e modelos com parâmetros variáveis com a frequência foram considerados. Porém, a implementação do modelo de onda completa no domínio do

tempo é extremamente trabalhosa, e, além disso, ainda não existe uma extensão deste modelo para sistemas trifásicos.

Para as aproximações quase-TEM, não há problemas quanto a simulações no domínio do tempo, e a extensão para sistemas trifásicos é bastante simples. Como será mostrado, os resultados obtidos indicam que as aproximações propostas atendem satisfatoriamente os requisitos de precisão e representatividade da influência dos meios externos ao condutor.

1.2 Breve Contextualização

A busca por uma representação coerente da influência do solo sobre a característica de propagação de linhas aéreas e cabos enterrados, remetem, respectivamente, aos trabalhos desenvolvidos concomitantemente, mas independentemente por Carson [1][2] e Pollaczek [3], nos anos de 1920. Estes trabalhos apresentam uma formulação das expressões das integrais infinitas para a impedância de retorno pelo solo, baseadas no modo de propagação quase-TEM. Este modo é uma extensão do modo de propagação Transversal Eletromagnético (TEM). O modo TEM, para linhas aéreas e cabos enterrados, ocorre somente se o solo for infinitamente condutor.

As dificuldades de solução da integral infinita de Carson motivaram o desenvolvimento de expressões aproximadas. Wedepohl e Wilcox apresentam em [4] expressões aproximadas usando a técnica de expansão assintótica para cabos enterrados. Neste trabalho também é demonstrado como obter a resposta transitória de um sistema de cabos enterrados utilizando modelos de linhas de transmissão multifásicas. Em [5], Lima e Portela apresentam expressões fechadas para o cálculo da impedância de retorno pelo solo. Para a linha de transmissão, a integral de Carson foi aproximada usando a técnica de transformação integral e para cabos enterrados a integral foi aproximada usando a técnica de expansão assintótica. Outras aproximações são encontradas em [6] e [7] baseadas no método das imagens.

Recentemente, Semlyen apresentou em [8] uma avaliação das imprecisões relacionadas a condutividade do solo, mas o fez para o caso de linhas aéreas. Wise, em [9], já havia analisado a inclusão da corrente de deslocamento no solo, mas também, para linha aérea. No entanto, não se encontra nesta referência o impacto da

permissividade do solo na definição de tensão na linha. Porém, em [10], Pettersson demonstra a importância de se incluir o impacto do vetor potencial magnético na definição de tensão da linha.

A partir do desenvolvimento dos modelos de onda completa para linhas aéreas monofásicas, propostos em [11][12][13], as limitações associadas ao modo de propagação quase-TEM foram suplantadas. As extensões destes modelos para o caso trifásico foram realizadas em [14][15][16][17] e aplicações destes modelos em [18][19][20][21][22]. Para a determinação do acoplamento entre linhas aéreas e cabos enterrados as aproximações são apresentados em [23] [24] e [25].

As formulações do modelo de onda completa permitiram o entendimento que a propagação quase-TEM é, de fato, uma aproximação obtida quando a constante de propagação desconhecida no argumento das integrais infinitas é admitida como sendo nula. Em [26], Sund adotou esta aproximação para o desenvolvimento das expressões de impedância e admitância para cabos enterrados usando o vetor de Hertz do tipo elétrico. Posteriormente, esta metodologia foi utilizada em [27], mas também, usando somente o vetor de Hertz do tipo elétrico, e também adotando a premissa de Sund sobre a consideração da escolha da constante de propagação. Conforme descrito por Wait em [12], para uma formulação mais coerente de campo eletromagnético deve-se considerar os vetores de Hertz dos tipos elétrico e magnético.

Recentemente, algumas pesquisas foram (e estão sendo) realizadas sobre os modelos de onda completa e aproximações quase-TEM aplicados em linhas de transmissão, bem como análises da estabilidade numérica e violação de passividade destes modelos. Os detalhes encontram-se na dissertação de mestrado e tese de doutorado de P.E.D. Rocha, respectivamente em [28] e [29], e na dissertação de M. M. Y. Tomasevich, em [30].

1.3 Identificação do problema

Conforme se pode observar a maioria das publicações relacionadas aos modelos matemáticos para descrição e caracterização da dinâmica dos campos elétrico e magnético, referem-se a aplicações em linhas aéreas. O modelo de onda completa foi empregado quase que exclusivamente em linhas aéreas, exceto em uma rara publicação de Wait em [31], onde é demonstrado como sua formulação pode ser

estendida para sistemas enterrados e em [35] onde o modelo de onda completa, pelo método de diferenças finitas no domínio do tempo, é aplicado na análise transitória de cabos enterrados devido a descargas atmosféricas. Desta forma, a aplicabilidade das distintas formulações do modelo de onda completa pode ser questionada.

A formulação do modelo de onda completa apresentada originalmente por Wedepohl em [13] foi desenvolvida para linha aérea, onde o meio externo ao condutor é isolante. Desta forma, sua aplicabilidade para cabo enterrado é uma incerteza, dado que neste caso o meio externo é um condutor imperfeito. Além disso, esta formulação foi desenvolvida para condutores com condutividade infinita e nus. Para aplicação deste modelo em cabos isolados, há a necessidade de se incluir o efeito da impedância e admitância da camada isolante na equação modal. Neste trabalho, será proposta uma reestruturação da formulação original, que será escrita na notação canônica $\mathbf{B}_i = \nabla \times \mathbf{A}_i$ e $\mathbf{E}_i = \frac{-1}{\varepsilon_i} \nabla \times \mathbf{F}_i$, e para poder aplicá-la em cabos enterrados, serão acrescentados os efeitos da impedância e admitância da camada isolante. Neste ponto vale salientar que trata-se de uma aplicação inédita desta formulação.

As aproximações quase-TEM para cabos enterrados encontradas, a constante de propagação desconhecida é ajustada como sendo nula ou como sendo a própria constante de propagação do ar. O primeiro ajuste, como será demonstrado, é válido somente para o condutor enterrado isolado no intervalo de baixas e médias frequências. O segundo ajuste em nada se assemelha ao comportamento de condutores enterrados. Portanto, observa-se que os modelos de aproximação quase-TEM são ajustados de forma quase arbitrária, sendo este um dos aspectos a serem investigados neste trabalho: quais valores devem ser adotados para a constante de propagação desconhecida nas expressões de impedância e admitância para se obter as aproximações quase-TEM, para condutores nus e isolados

Outro problema normalmente encontrado trata-se da inclusão da corrente de deslocamento no solo. Negligenciar a corrente de deslocamento acarreta que a admitância transversal de retorno pelo solo pode ser negligenciada. No entanto, ainda não foi bem esclarecido o efeito desta corrente na resposta transitória de cabos enterrados. Para se verificar este efeito, neste trabalho adotam-se quatro modelos de solo distintos. O primeiro modelo é um solo convencional, invariável com a frequência, onde a corrente de deslocamento é negligenciada. O segundo um modelo

de solo convencional, invariável com a frequência, considerando a corrente de deslocamento. Os terceiro e quarto modelos são com parâmetros variáveis com a frequência e a corrente de deslocamento é considerada.

1.4 Motivação

A aplicação do modelo de onda completa em cabos enterrados foi motivada pela escassez de referências sobre esta aplicação e pela necessidade de se obter a resposta em frequência do cabo enterrado perante diferentes modelos de solo. Trata-se da busca pelo esclarecimento dos efeitos dos meios externos sobre a característica de propagação de cabos enterrados. Os resultados obtidos pelo modelo de onda completa mostraram um comportamento do cabo enterrado isolado ainda não citado na literatura, sendo a maior motivação para o desenvolvimento das aproximações quase-TEM que fossem mais precisas, coerentes e concisas com comportamento físico observado pela resposta do modelo de onda completa.

1.5 Objetivos

Como principais objetivos desta dissertação podem-se citar:

- Aplicação do modelo de onda completa para determinação da constante de propagação, e conseqüentemente dos parâmetros unitários impedância e admitância de retorno pelo solo, em cabos enterrados isolados e nus;
- A partir dos resultados do modelo de onda completa, estabelecer os meios para se desenvolver as aproximações quase-TEM para cabos enterrados isolados e nus;
- Avaliar alguns métodos e estratégias de solução numérica, para o modelo de onda completa e para as aproximações desenvolvidas.
- Reestruturar a formulação do modelo de onda completa proposto por Wedepohl escrevendo-a na notação canônica e incluindo a camada isolante.
- Validar as aproximações realizadas, pela resposta no domínio do tempo, para o caso do condutor enterrado isolado e para ao caso do condutor enterrado isolado e blindado (cabo Single Core – SC). Para isso, quatro modelos

distintos de solo são considerados e seus efeitos analisados para diferentes modos de energização do circuito.

1.6 Estrutura do Texto

A presente dissertação está organizada em 5 capítulos, considerando esse capítulo introdutório. A seguir é detalhada a estrutura dos demais capítulos:

- No Capítulo 2 apresenta-se a formulação matemática associada ao modelo de onda completa para condutores monofásicos, sejam eles enterrados ou não, isolados ou nus;
- No capítulo 3 apresenta-se a proposta de aproximação quase-TEM que permite a obtenção dos parâmetros unitários (impedância e admitância, ambas por unidade de comprimento) nos casos apresentados no capítulo 2. Apresenta-se, também, a proposta de reformulação do modelo de onda completa proposto por Wedepohl e uma proposta de extensão ao caso de condutor enterrado isolado;
- O capítulo 4 traz os resultados para o caso teste que consiste de um condutor enterrado em solo homogêneo, mas podendo considerar a condutância, a permissividade do solo e a permeabilidade do solo distinta do ar;
- As principais conclusões dessa dissertação estão apresentadas no capítulo 5.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO DO MODELO DE ONDA COMPLETA

A análise de propagação de tensão e corrente em um condutor, enterrado ou não, considerando que um dos meios apresenta perdas data o início do século XX [1], [2] e [3]. Inicialmente, considerava-se somente a propagação quase-TEM. Na propagação TEM (Transversal Eletromagnético), também conhecida como propagação de onda plana, não há componentes de campo elétrico e nem de campo magnético na direção de propagação, $E_z = H_z = 0$, de acordo com as coordenadas mostradas na Fig. 1. Por sua vez, a quase-TEM supõe a existência de uma componente do campo elétrico no sentido de propagação, $E_z \neq 0$ e $H_z = 0$.

Neste contexto, a modelagem de onda completa representa uma extensão dos modos TEM e quase-TEM onde supõe-se a existência de componentes de campo elétrico e magnético na direção de propagação $E_z \neq 0$ e $H_z \neq 0$, ou seja, possui componentes de campos em todas as direções. Maiores detalhes sobre estes modos de propagação são encontrados nas notas de aula da disciplina Campos e Ondas do Programa de Engenharia Elétrica, PEE/COPPE/UFRJ em [32] e nos livros especializados em eletromagnetismo, como [33] e [34]. Os primeiros trabalhos de onda completa consideram o caso de linha aérea, condutor com altura constante, comprimento infinito, comprimento ordens de grandeza maior que a altura da mesma e um dos meios possuindo condutividade e permissividade não nulas [11], [12] e [13].

Neste capítulo, apresentam-se as principais formulações matemáticas para o correto equacionamento da equação modal do modelo de onda completa. Especificamente, estas formulações compreendem no emprego das equações de Maxwell para a descrição da característica de propagação dos campos elétrico e magnético, onde equação modal é determinada pela aplicação das condições de contorno na superfície do condutor e na interface entre os meios. O objetivo desta formulação é a obtenção dos parâmetros unitários impedância longitudinal de retorno pelo solo e admitância transversal de retorno pelo solo diretamente da equação modal. Nesta dissertação, a terminologia do modelo de onda completa diz respeito ao

conjunto de expressões, ou seja, equação modal, impedância e admitância de retorno pelo solo, que possuem dependência explícita da constante de propagação desconhecida a ser determinada.

Para obtenção destas formulações matemáticas do modelo de onda completa, consideram-se dois meios semi-infinitos, lineares, isotrópicos e homogêneos, denominados, respectivamente, por meio 1 e meio 2, com suas respectivas propriedades conforme ilustra a Fig. 1.

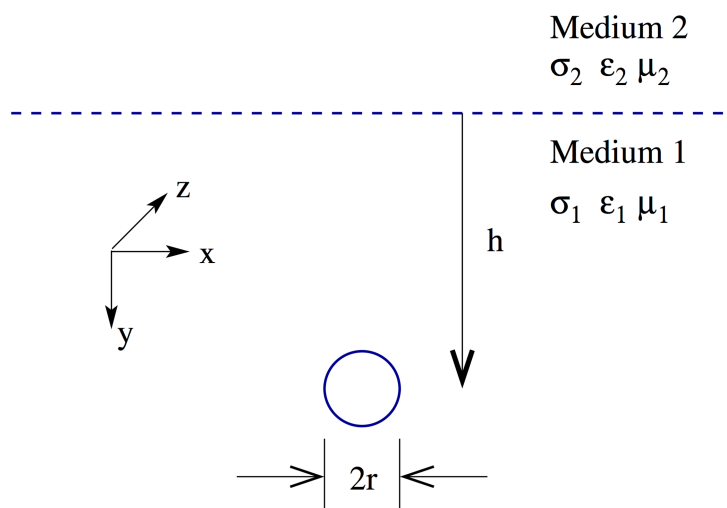


Figura 1: Configuração do condutor e interface entre os meios.

As características de propagação dos meios são dadas por $k_i = \sqrt{j\omega\mu_i(\sigma_i + j\omega\epsilon_i)}$, para $i=1,2$, referente aos meios. No meio 1 encontra-se um condutor infinitamente longo e de raio r . Para o condutor, admite-se uma corrente do tipo $I = I_0 \exp(-\gamma z + j\omega t)$, sendo γ a constante de propagação desconhecida $\gamma = \alpha + j\beta$, onde α é a constante de atenuação e β a constante de fase, sendo definidas positivas. Além disso, admitem-se as usuais hipóteses simplificativas, a saber:

- Em um plano perpendicular a direção de propagação, os campos elétrico e magnético variam em igual proporção e simultaneamente. Isto resulta que para cada modo de propagação a constante de propagação é única;
- Admite-se regime quase estacionário, resultando que $\frac{d}{dt} = j\omega$;
- O condutor encontra-se a uma distância uniforme com a interface entre os meios;

Baseando-se nesta geometria e hipóteses simplificativas, podem-se estabelecer três possíveis formulações para a obtenção da equação modal. Na seção 2.1, apresenta-se uma formulação baseada nos vetores de Hertz do tipo elétrico e magnético. Na seção 2.2, apresenta-se uma formulação mista baseada no potencial escalar e potencial vetor. Na seção 2.3, apresenta-se uma formulação baseada na decomposição dos vetores potenciais elétrico e magnético em modos transversal elétrico (TE) e transversal magnético (TM), acima e abaixo do solo. A equação modal é apresentada na seção 2.4 e as expressões de impedância e admitância de retorno pelo solo, encontram-se na seção 2.5.

Dadas as possíveis formulações do modelo de onda completa, mesmo que a equação modal possa ser expressa de forma diferente, o resultado numérico da constante de propagação deve ser o mesmo. Portanto, optou-se neste trabalho em apresentar as três principais formulações do modelo de onda completa, e os resultados mostram que de fato, se não houve algum erro na formulação, dentro do limite de precisão e facilidade de ajuste do chute inicial para solução numérica da equação modal, a constante de propagação obtida é a mesma, ou seja, independe da formulação empregada.

2.1 Formulação Por Vetores de Hertz

Numa tentativa de elucidar o mecanismo físico da radiação hertziana advinda de um dipolo oscilante localizado verticalmente na interface entre dois meios, em 1909 Sommerfeld apresenta uma possível solução baseada na decomposição da onda propagante em ondas cilíndricas dos tipos elétrica e magnética, culminando em integrais infinitas em sua função de transferência. Posteriormente, esta técnica foi implantada por Sunde [26] em uma tentativa de avaliar a influencia da condutividade do solo em linhas de transmissão. Porém, em seu trabalho, Sunde considerou apenas a componente elétrica do vetor de Hertz.

Esforços posteriores manipulam esta formulação no sentido de se incluir a componente magnética faltante como, por exemplo, na forma descrita nos trabalhos de Wait [12] e D'Amore e Sarto [15]. Recentemente, esta formulação foi utilizada em [27] para cabos enterrados, porém, a componente magnética foi novamente negligenciada.

A completa formulação parte do princípio que o campo eletromagnético pode ser decomposto em duas componentes relacionadas aos vetores de Hertz do tipo elétrico e magnético, respectivamente, Π_E e Π_M , que possuem somente componentes ao longo do eixo Z de coordenadas (ver Fig. 1). Desta forma, os campos elétrico e magnético, o potencial escalar Φ e o potencial vetor \mathbf{A} podem ser expressos diretamente de Π_E e Π_M , desconsiderando as polarizações residuais elétrica e magnética, como se segue

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i &= \nabla \times \nabla \times \Pi_{E_i} - j\omega\mu_i \nabla \times \Pi_{M_i} \\ \mathbf{H}_i &= (\sigma_i + j\omega\epsilon_i) \nabla \times \Pi_{E_i} + \nabla \times \nabla \times \Pi_{M_i}\end{aligned}\quad (1)$$

com o índice i referente aos meios 1 e 2, respectivamente, e

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mu(\sigma + j\omega\epsilon)\Pi_{E_i} + \mu\nabla \times \Pi_{M_i} \\ \phi &= -\nabla \cdot \Pi_{E_i}\end{aligned}\quad (2)$$

Mais especificamente, as componentes do campo eletromagnético podem ser escritas em um ponto genérico no meio “1”, segundo apêndice em [15],

$$\begin{aligned}\Pi_{E_1}(x, y, z) &= \left(\frac{-j\omega\mu_0}{4\pi k_1^2} \right) I_0 e^{-j\gamma z} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [e^{-u_1|y-h|} + R_E(\lambda)e^{-u_1|y+h|}] \frac{e^{-jx\lambda}}{u_1} \right\} d\lambda \\ \Pi_{H_1}(x, y, z) &= \left(\frac{-j\omega\mu_0}{4\pi k_1^2} \right) I_0 e^{-j\gamma z} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ R_H(\lambda)e^{-u_1|y+h|} \frac{e^{-jx\lambda}}{u_1} \right\} d\lambda\end{aligned}\quad (3)$$

E no meio “2”:

$$\begin{aligned}\Pi_{E_2}(x, y, z) &= \left(\frac{-j\omega\mu_0}{4\pi k_1^2} \right) I_0 e^{-j\gamma z} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ R_{E_2}(\lambda)e^{(-u_1h+u_2y)} \frac{e^{-jx\lambda}}{u_1} \right\} d\lambda \\ \Pi_{H_2}(x, y, z) &= \left(\frac{-j\omega\mu_0}{4\pi k_1^2} \right) I_0 e^{-j\gamma z} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ R_{H_2}(\lambda)e^{(-u_1h+u_2y)} \frac{e^{-jx\lambda}}{u_1} \right\} d\lambda\end{aligned}\quad (4)$$

com parâmetros

$$\begin{aligned}u_1 &= (\lambda^2 + \gamma^2 - k_1^2)^{1/2} \\ u_2 &= (\lambda^2 + \gamma^2 - k_2^2)^{1/2}\end{aligned}$$

onde $R_{E_1}(\lambda)$, $R_{H_1}(\lambda)$, $R_{E_2}(\lambda)$ e $R_{H_2}(\lambda)$ são dados por

$$\begin{aligned}
R_{E_1}(\lambda) &= 1 - u_0 \frac{2k_1^2}{k_1^2 - \gamma^2} \left(\frac{1}{u_1 + u_2} - \frac{\gamma^2}{k_2^2 u_1 + k_1^2 u_2} \right) \\
R_{H_1}(\lambda) &= -\frac{\gamma \lambda}{j\omega\mu_0} \frac{2k_0^2}{k_1^2 - \gamma^2} \left(\frac{1}{u_1 + u_2} - \frac{k_1^2}{k_2^2 u_1 + k_1^2 u_2} \right) \\
R_{E_2}(\lambda) &= -u_1 \frac{2k_1^2}{k_2^2 - \gamma^2} \left(\frac{1}{u_1 + u_2} - \frac{\gamma^2}{k_2^2 u_1 + k_1^2 u_2} \right) \\
R_{H_2}(\lambda) &= -\frac{\gamma \lambda}{j\omega\mu_0} \frac{2k_0^2}{k_2^2 - \gamma^2} \left(\frac{1}{u_1 + u_2} - \frac{k_0^2}{k_2^2 u_1 + k_1^2 u_2} \right)
\end{aligned} \tag{5}$$

Sendo as propriedades dos meios

$$\begin{aligned}
k_0 &= \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \\
k_i &= k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\epsilon_0} - \frac{j \sigma_i}{\omega \epsilon_0}}
\end{aligned}$$

Assim sendo, as equações de onda de tensão e corrente podem ser obtidas diretamente da expressão rotacional dos campos em sua forma integral,

$$\oint_l E \cdot dl = -j\omega\mu_0 \iint_s H \cdot \hat{n} dS \tag{6}$$

atentando-se para as condições de contorno que devem considerar a componente tangencial do campo elétrico na superfície do condutor nula, e a igualdade dos campos na interface entre os meios em $y=0$.

Esta formulação apresenta uma restrição em relação as permeabilidades magnéticas dos meios, que devem ser iguais. Além disso, para avaliação numérica devem-se resolver as integrais infinitas de Sommerfeld, cuja constante de propagação desconhecida é uma variável no integrando destas.

2.2 Formulação com Potencial Escalar e Potencial Vetor

Proposta inicialmente por Kikuchi [11], esta formulação destaca-se pela direta utilização dos potenciais vetor e escalar, onde estes potenciais devem satisfazer a equação de onda (equação de Helmholtz) para os campos nos meios 1 e 2. Em 1999, Petterson apresentou em [14] uma formulação baseada no trabalho de Kikuchi, utilizando também o calibre de Lorenz e admitindo um ponto de potencial nulo no infinito. Neste mesmo trabalho, Petterson apresenta sua aproximação para o modelo quase-TEM, e sua aproximação para o método das imagens. Esta formulação foi

recentemente empregada em [36], onde Rachid apresenta uma revisão dos modelos de acoplamento de campos em linhas de transmissão, dando ênfase em simulação de sobretensões induzidas por descargas atmosféricas.

Consideram-se dois vetores potenciais \mathbf{A}_i e dois potenciais escalares ϕ_i , com índice i referente aos meios 1 e 2. Os campos elétrico e magnético relacionam-se com os potenciais através das expressões

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_i &= \nabla \times \mathbf{A}_i \\ \mathbf{E}_i &= -\nabla \phi_i - j\omega \mathbf{A}_i\end{aligned}\quad (7)$$

e pela aplicação do calibre de Lorentz,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_i = -\mu\sigma\phi_i - \mu\epsilon j\omega\phi_i \quad (8)$$

para a mesma configuração da figura 1, as equações de ondas são descritas por

$$\begin{aligned}(\nabla^2 + \gamma_1^2 + \gamma^2)\mathbf{A}_1 &= -\mu_1 I \delta(r - r_0) \\ (\nabla^2 + \gamma_2^2 + \gamma^2)\mathbf{A}_2 &= 0 \\ (\nabla^2 + \gamma_1^2 + \gamma^2)\phi_1 &= -\frac{\gamma}{j\omega\epsilon} \delta(r - r_0) \\ (\nabla^2 + \gamma_2^2 + \gamma^2)\phi_2 &= 0\end{aligned}\quad (9)$$

sendo

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \lambda_i^2 &= k_i^2 + \gamma \\ k_i^2 &= \omega \sqrt{\left(\epsilon_i - j\frac{\sigma_i}{\omega}\right)} \mu_0\end{aligned}$$

para $i=1$ e 2 .

Para se resolver as equações em (9), deve-se considerar as condições de contorno, ou seja, a relação de continuidade dos potenciais na interface entre os meios, a relação de continuidade entre as componentes tangenciais da densidade de fluxo magnético também na interface entre os meios e a componente tangencial do campo elétrico na superfície do condutor.

2.3 Decomposição do Vetor Potencial em Modos TE e TM

Esta formulação foi desenvolvida originalmente por Wedepohl em [13] e parte do princípio que a onda transversal eletromagnética, TEM, pode ser dividida em componentes TE e TM para os meios 1 e 2. Desta forma, relacionam-se vetores potenciais de modo que o campo magnético possa se expresso, para cada modo e cada meio, por $H_i = \nabla \times A_i$, com $i=1,2,3,4$. Pela utilização do calibre de Lorentz, relaciona-se o potencial vetor A_i com o potencial escalar ϕ_i . Esta modelagem apresenta um diferencial de não se admitir que as permeabilidades magnéticas dos meios sejam iguais. Este fato acarreta em uma modelagem mais genérica com a vantagem de poder-se definir meios com propriedades magnéticas distintas.

Porém, na modelagem original publicada por Wedepohl, mais especificamente na aplicação da técnica da transformada espacial de Fourier para solução das equações de onda, encontram-se erros de grafia nas transformadas inversas seno de Fourier, as quais foram escritas como transformadas inversas exponenciais, o que não condiz com a simetria apresentada sobre transformada espacial ao longo do eixo y de coordenadas, que apresenta simetria ímpar. Porém, como se trata de um erro de grafia, não acarreta em danos na formulação geral da equação modal. Os resultados obtidos para esta formulação corroboram com esta afirmação e, por sua vez, a mantém válida.

Neste trabalho apresenta-se a correta formulação com a correta aplicação das transformadas de Fourier. Neste sentido, pode-se escrever a equação de onda para o modo TM no meio 1 como se segue

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_1 &= (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \mathbf{E}_1 - I \delta(x + x_c) \delta(y + y_c) \\ \nabla \times \mathbf{E}_1 &= j\omega \mathbf{B}_1 \end{aligned} \quad (10)$$

aplicando $\mathbf{H}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\nabla \phi_1 - j\omega\mu_1 \mathbf{A}_1 \\ \nabla \times \mathbf{H}_1 &= (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)(-\nabla \phi_1 - j\omega\mu_1 \mathbf{A}_1) + I \delta(x + x_c) \delta(y + y_c) \end{aligned} \quad (11)$$

com aplicação do calibre de Lorenz $\nabla \cdot \mathbf{A}_1 = -\mu_1 m_1^2 \phi_1$, e com $m_1^2 = (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)$, chega-se a equação de onda TM para o meio 1.

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2 \right) - j\omega\mu_1 m_1^2 \right] \mathbf{A}_1 = -I \delta(x - x_c) \delta(y - y_c) \quad (12)$$

Ao fazer $\lambda_1^2 = \gamma^2 - j\omega\mu_1 m_1^2$, pode-se reescrever (12) como

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_1^2 \right) \mathbf{A}_1 = -I\delta(x-x_c)\delta(y-y_c) \quad (13)$$

Com desenvolvimento semelhante, chega-se a expressão para onda TM no meio 2.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_2 &= (\sigma_2 + j\omega\epsilon_2) \mathbf{E}_2 \\ \nabla \times \mathbf{E}_2 &= j\omega\mathbf{B}_2 \end{aligned} \quad (14)$$

aplicando $\mathbf{H}_2 = \nabla \times \mathbf{A}_2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= -\nabla\phi_2 - j\omega\mu_2\mathbf{A}_2 \\ \nabla \times \mathbf{H}_2 &= (\sigma_2 + j\omega\epsilon_2)(-\nabla\phi_2 - j\omega\mu_2\mathbf{A}_2) \end{aligned} \quad (15)$$

com aplicação do calibre de Lorenz $\nabla \cdot \mathbf{A}_2 = -\mu_2 m_2^2 \phi_2$, e com $m_2^2 = (\sigma_2 + j\omega\epsilon_2)$, logo, para $\lambda_2^2 = \gamma^2 - j\omega\mu_2 m_2^2$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_2^2 \right) \mathbf{A}_2 = 0 \quad (16)$$

Para a onda TE no meio 1, a fonte do campo elétrico está relacionada ao rotacional do vetor potencial. Para este caso pode-se definir $\mathbf{E}_3 = \nabla \times \mathbf{A}_3$, e

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_3 &= j\omega\mathbf{B}_3 \\ \nabla \times \mathbf{H}_3 &= (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{H}_3 &= \nabla\phi_3 - m_1^2 \mathbf{A}_3 \end{aligned} \quad (17)$$

com aplicação do calibre de Lorenz $\nabla \cdot \mathbf{A}_3 = -j\omega\mu_1\epsilon_1\phi_3$,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_1^2 \right) \mathbf{A}_3 = 0 \quad (18)$$

E para onda TE no meio 2

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_4 &= j\omega\mathbf{B}_4 \\ \nabla \times \mathbf{H}_4 &= (\sigma_2 + j\omega\epsilon_2) \mathbf{E}_4 \\ \mathbf{H}_4 &= \nabla\phi_4 - m_2^2 \mathbf{A}_4 \end{aligned} \quad (19)$$

com aplicação do calibre de Lorenz $\nabla \cdot \mathbf{A}_4 = -j\omega\mu_2\epsilon_2\phi_4$,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_2^2 \right) \mathbf{A}_4 = 0 \quad (20)$$

As soluções das equações de onda em (13), (16), (18) e (20) são obtidas pela

técnica da aplicação das transformadas espaciais de Fourier. Ao longo do eixo X de coordenadas, aplica-se a seguinte transformada

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{j\alpha x} dx \quad (21)$$

e ao longo do eixo Y de coordenadas, considera-se a simetria ímpar $f(y) = -f(-y)$, e a seguinte transformada deve ser utilizada

$$F(\beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(y) \text{sen}(\beta y) dy \quad (22)$$

Estas transformadas estão escritas no padrão do programa *Mathematica* para manter o formalismo utilizado para a obtenção dos resultados. Desta forma, aplicando-se (21) em (13), obtém-se

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\alpha^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_1^2 \right) \bar{\mathbf{A}}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} I e^{-jx_c \alpha} \delta(y - y_c) \quad (23)$$

e, posteriormente, aplicando-se (22) em (23), resulta

$$\left(-\alpha^2 - \beta^2 + \lambda_1^2 \right) \bar{\bar{\mathbf{A}}}_1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta \bar{\mathbf{A}}_1 = -I e^{-jx_c \alpha} \text{sen}(y_c \beta) \quad (24)$$

Assim, pode-se isolar $\bar{\bar{\mathbf{A}}}_1$,

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}_1 = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta \bar{\mathbf{A}}_1 - I e^{-j\alpha x_c} \text{sen}(\beta y_c)}{(+\alpha^2 + \beta^2 - \lambda_1^2)} \quad (25)$$

Para retornar ao domínio da coordenada espacial aplica-se a transformada seno inversa de Fourier em na expressão (25), resultando em

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \bar{\mathbf{A}}_{10} e^{-k_1 y} - \frac{I e^{-j\alpha x_c}}{2k_1} \left(e^{-k_1 |y - y_c|} - e^{-k_1 (y + y_c)} \right) \quad (26)$$

onde $k_1 = \sqrt{\alpha^2 - \lambda_1^2}$.

Aplicando o mesmo procedimento para as demais equações de onda, encontra-se o modo TM abaixo do solo, com $k_2 = \sqrt{\alpha^2 - \lambda_2^2}$:

$$\bar{\mathbf{A}}_2 = \bar{\mathbf{A}}_{20} e^{-k_2 y} \quad (27)$$

Para TE acima do solo:

$$\bar{\mathbf{A}}_3 = \bar{A}_{30} e^{-k_1 y} \quad (28)$$

Para TE abaixo do solo:

$$\bar{\mathbf{A}}_4 = \bar{A}_{40} e^{-k_2 y} \quad (29)$$

Ainda no domínio de Fourier, mas referente ao eixo X de coordenadas, pode-se estabelecer a relação entre as componentes dos campos elétricos e magnéticos e os vetores potenciais (Anexo A). Com a condição de contorno na superfície do condutor, pode-se determinar a equação modal. No entanto, a equação modal resultante desta formulação é um pouco distinta da equação modal resultante das formulações apresentadas nas seções anteriores.

Neste sentido, na próxima seção apresentam-se as equações modais encontradas, e, como será visto, as constantes de propagação encontradas referentes à solução numérica das equações modais, são, inequivocamente, as mesmas. Portanto, o valor numérico da constante de propagação independe da formulação utilizada para se estabelecer a equação modal.

2.4 Equação Modal

Para se obter a equação modal pela formulação de Wedepohl (seção 2.3), deve-se aplicar a condição de contorno sobre a componente axial do campo elétrico (E_z) na superfície do condutor, e posteriormente, aplicar a transformada inversa de Fourier, o que resulta em

$$E_{Zc} = \lambda_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[f(\alpha, \gamma) - \frac{1}{2k_1} \right] e^{-2k_1 y_c} + \frac{1}{2k_1} e^{-2k_1 r_c} \right\} d\alpha \quad (30)$$

onde

$$f(\alpha, \gamma) = \left[k_1 + \frac{k_2 \lambda_1^2 m_2^2}{\lambda_2^2 m_1^2} + \frac{j(\alpha\gamma)^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2}{\omega \lambda_2^2 m_1^2 (k_1 \lambda_2^2 \mu_1 + k_2 \lambda_1^2 \mu_2)} \right]^{-1} \quad (31)$$

Porém, ao se estabelecer as condições de contorno sobre as formulações apresentadas nas seções 2.1 e 2.2, referente às formulações baseadas nos vetores de Hertz, a equação modal resultante é:

$$M = \frac{2\pi}{j\omega\mu_0} z_{int} + \left(1 - \frac{\gamma^2}{\gamma_1^2}\right) \Lambda + \left(S_1 - \frac{\gamma^2}{\gamma_1^2} S_2\right) \quad (32)$$

com $\Lambda = K_0(r\eta_1) - K_0(d\eta_1)$ sendo K_0 a função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem zero, $\eta_1 = \sqrt{\gamma_1^2 - \gamma^2}$, $d = \sqrt{4h^2 + r^2}$ e Z_{int} sendo a impedância interna de um condutor cilíndrico escrita em termos das funções de Bessel modificadas de primeira espécie, de ordem zero e de primeira ordem, respectivamente I_0 e I_1 . Logo,

$$z_{int} = \frac{1}{2\pi r_0} \left(\frac{j\omega\mu_c}{\sigma_c}\right)^{1/2} \frac{I_0(\gamma_c r_0)}{I_1(\gamma_c r_0)} \quad (33)$$

com a constante de propagação do condutor $\gamma_c = \sqrt{j\omega\mu_c(\sigma_c + j\omega\epsilon_c)}$.

Nesta equação modal, S_1 e S_2 são as integrais infinitas de Sommerfeld definidas como

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-2hu_1)}{u_1 + u_2} \exp(-jr\lambda) d\lambda \\ S_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-2hu_1)}{n^2 u_1 + u_2} \exp(-jr\lambda) d\lambda \\ u_1 &= \sqrt{\lambda^2 + \gamma_1^2 - \gamma^2}, u_2 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_2^2 - \gamma^2} \end{aligned} \quad (34)$$

As equações em (30) e (32) podem parecer bastante distintas entre si, mas uma equivalência pode ser estabelecida. Primeiramente, a equação modal em (30) é estabelecida admitindo-se o condutor com condutividade infinita resultando em uma impedância interna ao condutor nula. Desta forma, se particularizar a equação modal em (32) com $Z_{int} = 0$, obtém-se

$$M = \left(1 - \frac{\gamma^2}{\gamma_1^2}\right) \Lambda + \left(S_1 - \frac{\gamma^2}{\gamma_1^2} S_2\right) \quad (35)$$

Por esta simples consideração, pode-se concluir que os termos referentes das integrais infinitas de Sommerfeld equivale ao termo da transformada inversa de Fourier na equação modal de Wedepohl, ou seja

$$\left(S_1 - \frac{\gamma^2}{\gamma_1^2} S_2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[f(\alpha, \gamma) - \frac{1}{2k_1} \right] e^{-2k_1 y_c} + \frac{1}{2k_1} e^{-2k_1 r_c} \right\} d\alpha \quad (36)$$

Esta correspondência explica o fato que a constante de propagação calculada por (30) e (32) serem numericamente iguais, o que corresponde com a interpretação física do fenômeno de propagação de campos para este sistema.

Estas equações modais, determinadas para condutor nu, são válidas para o caso de linha de transmissão monofásica e para condutor monofásico enterrado nu. Para o caso do condutor monofásico enterrado isolado, deve-se estabelecer uma equação modal específica. Neste caso, torna-se simples, pois as expressões de impedância e admitância são contabilizadas nas expressões relativas ao condutor, ficando-se desta forma o restante da equação modal inalterada, ou seja, a camada isolante em nada interfere nas expressões relativas ao solo.

Considerando-se uma camada isolante de raio r_d envolvendo o condutor de raio r , na mesma distância h da interface entre os meios. Para este isolante, admite-se uma constante de propagação dada por $\gamma_d = j\omega\sqrt{\mu_o\varepsilon_d}$, sendo ε_d a permissividade elétrica do isolante. A equação modal para este caso é estabelecida como

$$M = \frac{2\pi}{j\omega\mu_o} z_a + \left(1 - \frac{\gamma^2}{\gamma_1^2}\right) \Lambda + \left(S_1 - \frac{\gamma^2}{\gamma_1^2} S_2\right) = 0 \quad (37)$$

onde Z_a é a nova impedância do condutor

$$z_a = z_{\text{int}} + z_d - \gamma^2 y_d^{-1} \quad (38)$$

considerando-se a impedância e admitância da camada isolante, respectivamente, Z_d e Y_d . Observa-se que o restante da equação modal em nada se altera.

Com as expressões das equações modais desenvolvidas, torna-se necessária a determinação da constante de propagação e algumas comparações para demonstrar, numericamente, que independentemente da formulação utilizada, a constante de propagação que descreve um modo de propagação para uma determinada configuração é única.

2.4.1 Constante de Propagação – Linha de Transmissão

O objetivo desta seção é verificar a equação modal através dos resultados da resposta em frequência da constante de propagação para o caso de linha de transmissão. Esta verificação é importante para assegurar o correto funcionamento da estrutura de solução numérica da equação modal. Os resultados encontrados são

comparados com os resultados de Pettersson [10], D'Amore e Sarto em [11] e Wedepohl em [13]. Estas referências cobrem os resultados, respectivamente, das três possíveis formulações.

Dada a geometria apresentada na Fig. 1, admite-se que o meio 1 é o ar, com propriedades $\epsilon_{r1} = 1$, $\mu_{r1} = 1$ e $\sigma_1 = 0 S/m$, e o meio 2 é o solo com perdas, com propriedades $\epsilon_{r2} \neq 1$, $\mu_{r2} = 1$ e $\sigma_2 \neq 0 S/m$, sendo a permeabilidade magnética e permissividade elétrica para o vácuo, respectivamente, dadas por $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$ e $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} F/m$. Assim, para uma altura $h = 10 m$, $\sigma_2 = 0.05 S/m$ e $\epsilon_{r2} = 5$, a Fig. 2 apresenta os resultados para a constante de atenuação e a Fig. 3 os resultados para a constante de fase.

Pela Fig. 2 observa-se a ocorrência de uma descontinuidade em torno de 5Mhz, devido a comutação entre as raízes da equação modal. No plano complexo, a constante de propagação possui duas possíveis raízes, e seus conjugados complexos. Em baixas frequências, uma destas raízes é dominante, porém, conforme se aumenta a frequência, a segunda raiz torna-se dominante e ocorre a comutação. Dependendo do chute inicial, ou seja, do valor da constante de propagação previamente estabelecido para a convergência da rotina de solução numérica, esta comutação pode não ocorrer, resultando em um modo de propagação diferente ao modo linha de transmissão (TL). Este outro modo, denominado por modo onda rápida, embora previsto no modelo matemático, não se trata de uma descrição física real do comportamento de linhas de transmissão. Além disso, a visualização desta descontinuidade torna-se mais clara conforme se aumenta o numero de pontos de amostragem na frequência.

O processo de solução numérica dividiu-se em basicamente duas partes. Na primeira, encontra-se uma estrutura de integração numérica para a solução da transformada inversa de Fourier, na formulação de Wedepohl, e das integrais infinitas de Sommerfeld nas demais formulações. Na segunda, encontra-se uma estrutura de solução das raízes da equação modal que satisfazem a identidade de igualdade à zero, e é válida independentemente da formulação. Nesta parte, avalia-se a constante de propagação desconhecida. Em ambas as estruturas, observaram-se algumas peculiaridades que valem ser mencionadas.

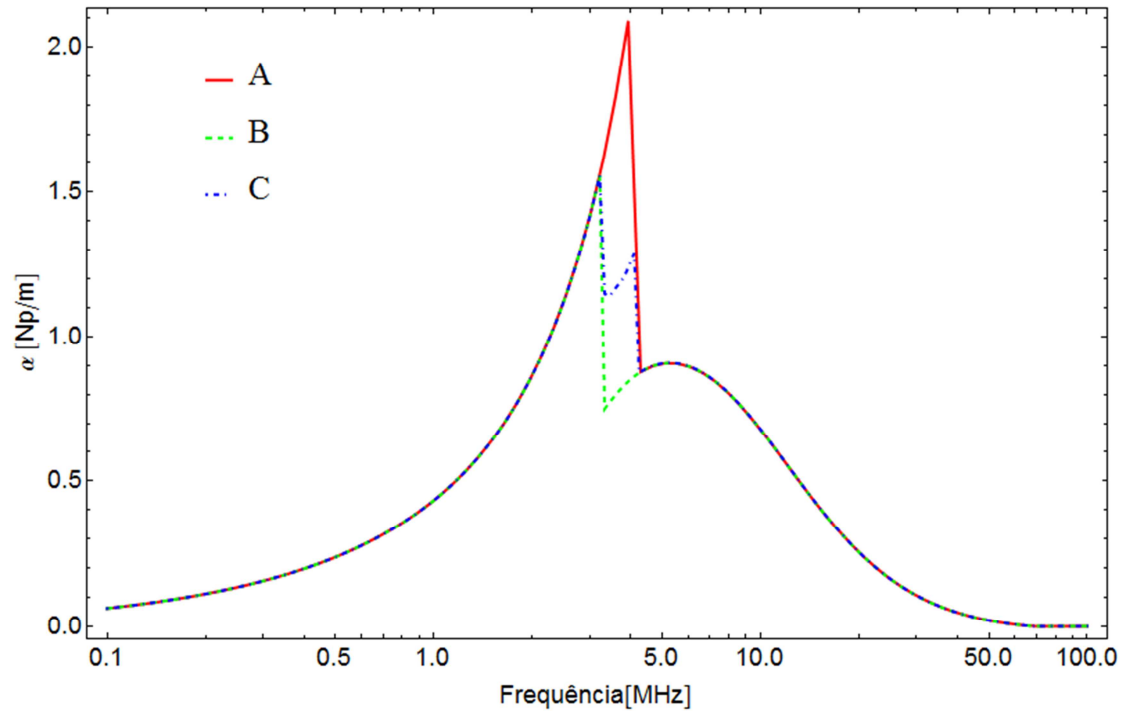


Figura 2: Constante de atenuação. A- Wedepohl, B- D`amore e Sarto e C- Pettersson

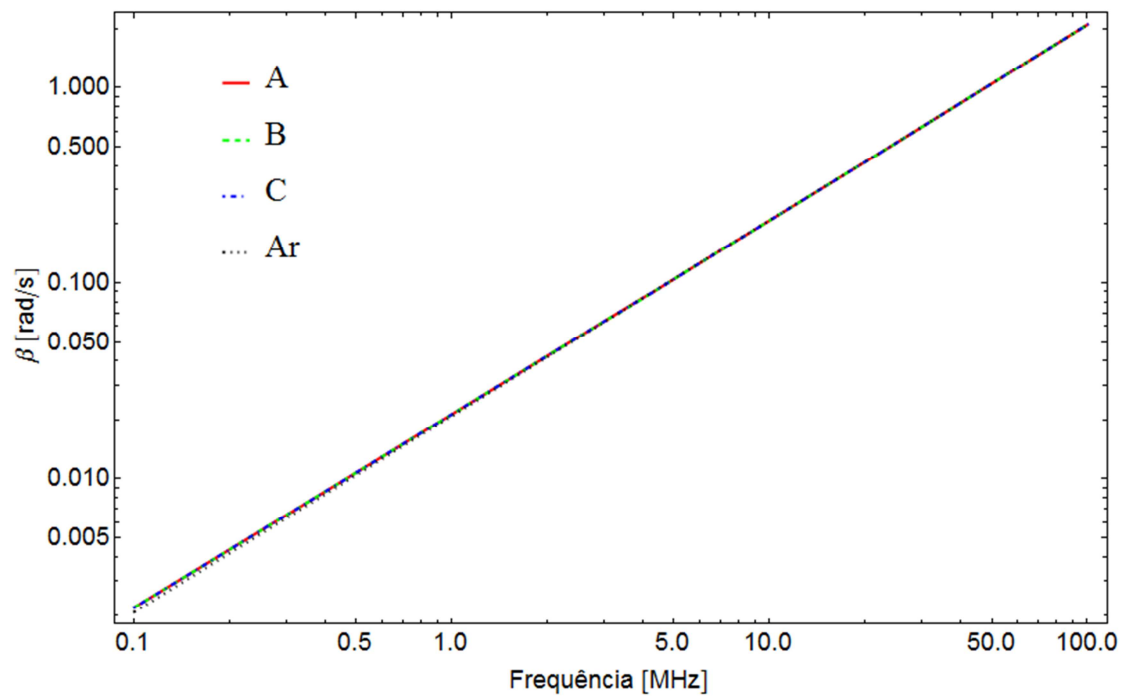


Figura 3: Constante de fase. A- Wedepohl, B- D`amore e Sarto e C- Pettersson

A primeira dificuldade está relacionada com o fato da constante de propagação desconhecida ser uma variável no integrando da transformada inversa de Fourier, na formulação de Wedepohl, ou das integrais de Sommerfeld, nas demais formulações. Além disso, este integrando comporta-se de forma oscilatória. Para se contornar estes problemas, a estrutura do laço numérico foi implantada de forma mista, ou seja, simbólico-numérica, de forma a se obter uma estimativa do resultado numérico da integral, que de fato não é o resultado definitivo, mas como a constante desconhecida é avaliada na rotina para determinação das raízes da equação modal, e esta deve satisfazer a identidade de igualdade à zero, a diferença numérica no resultado desta igualdade é o valor da constante de propagação que deve satisfazer esta identidade. Para se contornar o comportamento oscilatório da função integrando, testaram-se alguns métodos de integração numérica, tais como o Trapezoidal, e o *Double Exponential Oscillatory*. Porém, a maior eficiência e os melhores resultados foram obtidos com a estratégia Global Adaptativa, cujo padrão é o esquema Gauss-Kronrod adaptativo, que encontra-se detalhado em [38][39].

Ao longo dos testes realizados, notou-se a forte dependência do procedimento numérico em relação ao chute inicial dado para solução das raízes da equação modal. Aqui, testaram-se métodos como das secantes e o de Newton. A melhor convergência foi obtida utilizando-se o método de Newton com chute inicial perturbado. Esta dificuldade em estabelecer um chute inicial consistente, surge do fato que para a linha de transmissão, a constante de propagação diverge dos valores das constantes de propagação do ar e do solo. Este último, influencia fortemente a resposta em frequência da constante de propagação da linha. Vale salientar que dependendo do chute inicial, a solução pode convergir em um modo de propagação que não o modo linha de transmissão. As Figs. 4 e 5 mostram os desvios, em percentual, associados à parte real e imaginária da constante de propagação em relação à constante de propagação do ar.

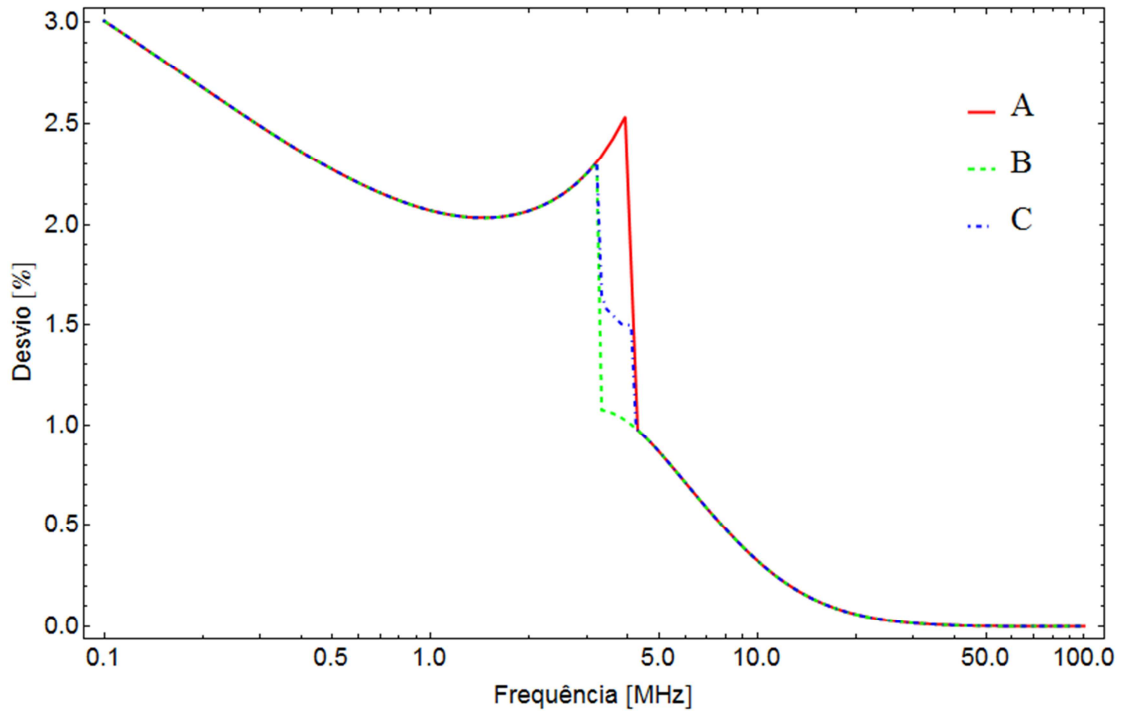


Figura 4: Desvio percentual relativo à parte real de gamma em relação ao ar. A- Wedepohl, B- D'Amore e Sarto e C- Pettersson

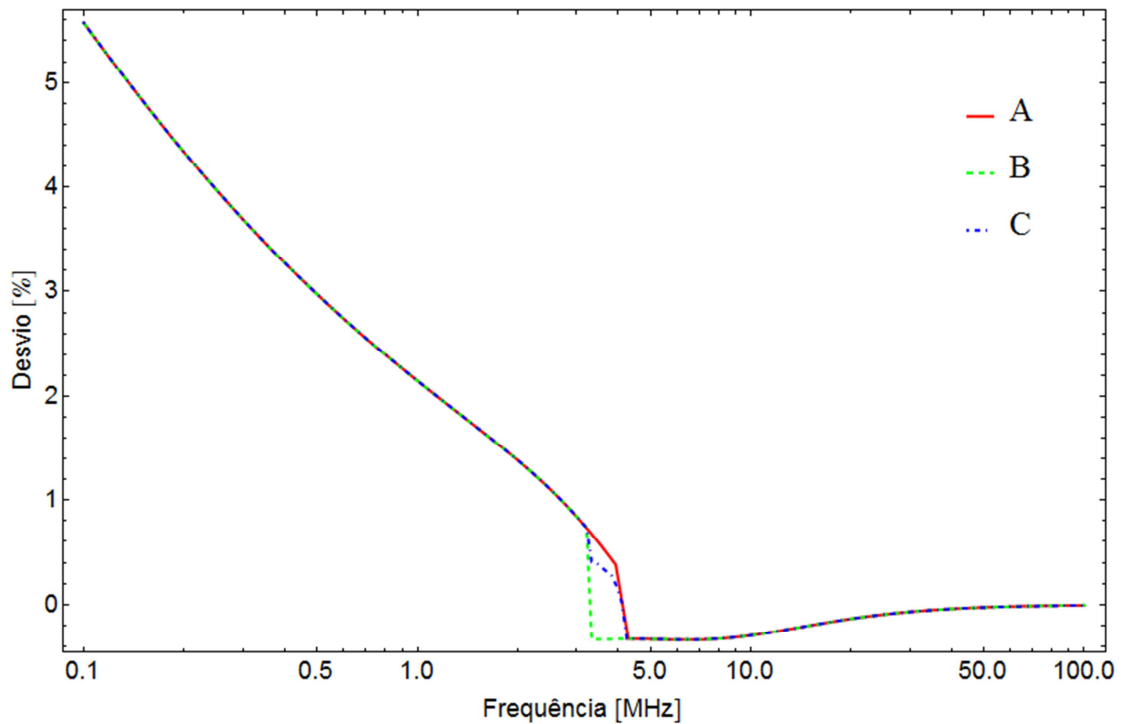


Figura 5: Erro percentual relativo à parte imaginária de gamma em relação ao ar. A- Wedepohl, B- D'Amore e Sarto e C- Pettersson

Estes desvios são obtidos com as seguintes expressões:

$$\text{desvio parte real}[\%] = \text{Re} \left[\frac{\text{Re}[\gamma]}{(\gamma_o / j)} 100 \right] \quad (39)$$

$$\text{desvio parte imaginária}[\%] = \text{Re} \left[\frac{\text{Im}[\gamma] - (\gamma_o / j)}{(\gamma_o / j)} 100 \right] \quad (40)$$

e, como pode-se observar, conforme se aumenta a frequência o desvio da constante de propagação reduz, ou seja, se aproxima do valor da constante de propagação do ar. Isto se deve, majoritariamente, ao efeito pelicular no condutor e da corrente induzida no solo, demonstrando que para altas frequências, basicamente, a propagação dos campos ocorre no ar.

Para a mesma geometria e mesmos valores, as Figs. 6 e 7 mostram uma comparação entre os modelos de onda completa, aproximação quase-TEM e método das imagens. Os resultados para o modelo quase-TEM e método das imagens foram obtidos pelas formulações de Pettersson [10] e D`Amoré e Sarto [11]. Maiores detalhes do modelo de onda completa aplicado especificamente para linhas de transmissão podem ser encontrados [28][29] e [30].

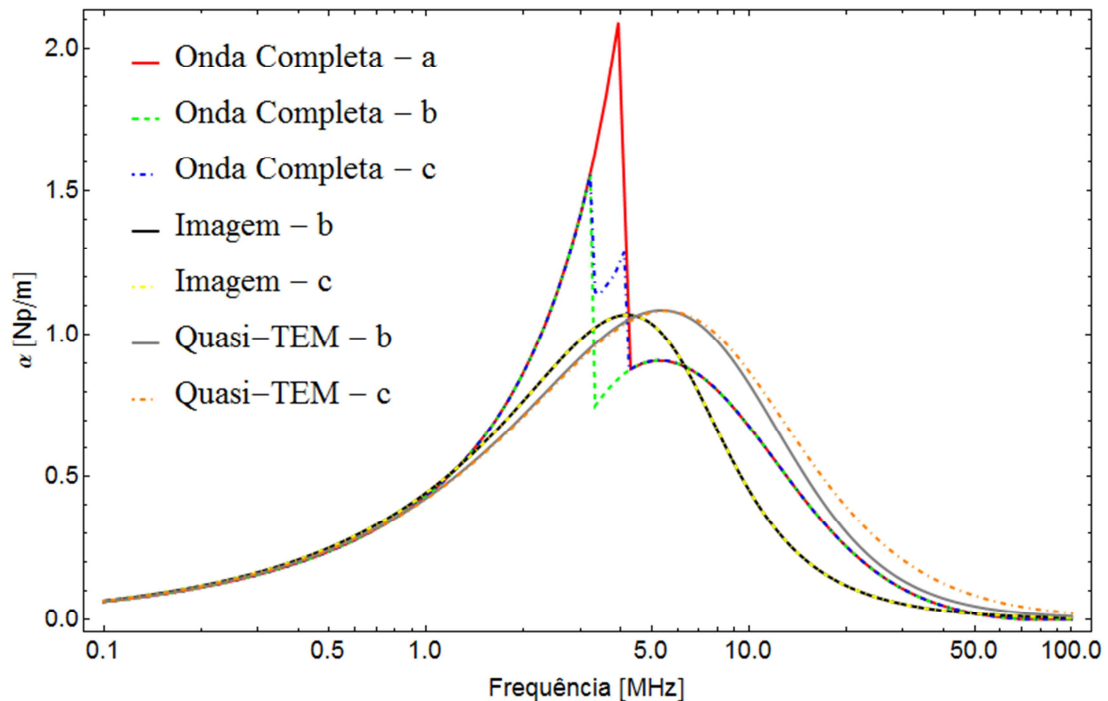


Figura 6:: Comparação entre formulações. Real de gamma. a- Wedepohl, b- D`Amore e Sarto e c- Pettersson

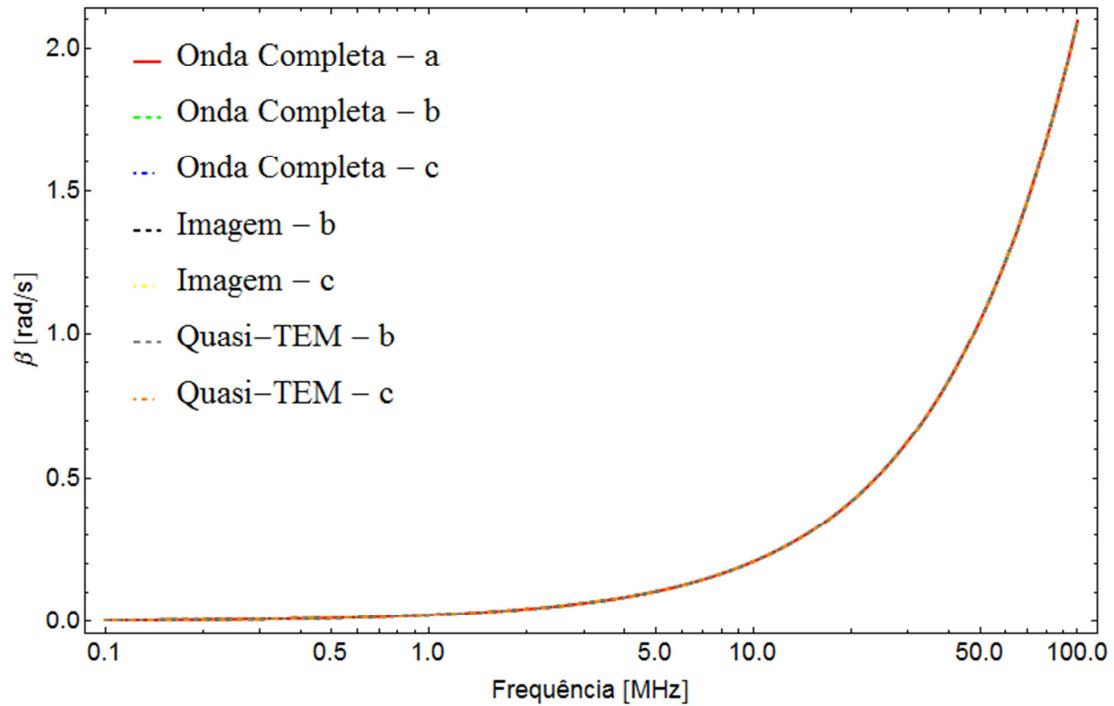


Figura 7: Comparação entre formulações. Imaginário de gamma. a- Wedepohl, b- D'Amore e Sarto e c- Pettersson

Apesar do modelo de onda completa ser teoricamente mais preciso, sua descontinuidade característica torna os resultados das aproximações quasi-TEM e imagens mais próximas do comportamento real da linha de transmissão, que apresenta um comportamento suave. Desta forma, o esforço computacional exigido e a dificuldade de estabelecimento de um chute inicial consistente, são fatores determinísticos em favor aos modelos de aproximação quasi-TEM e imagens.

2.4.2 Constante de Propagação – Condutor Enterrado

Considerando o condutor enterrado a 1m de profundidade e um solo com condutividade de $\sigma_s = 0.01S/m$, e com permissividade elétrica relativa de $\epsilon_{rs} = 10$, os seguintes resultados para variações da espessura da camada isolante foram encontrados e são mostrados nas Figs. 8 e 10, respectivamente, para a constante de atenuação e constante de fase.

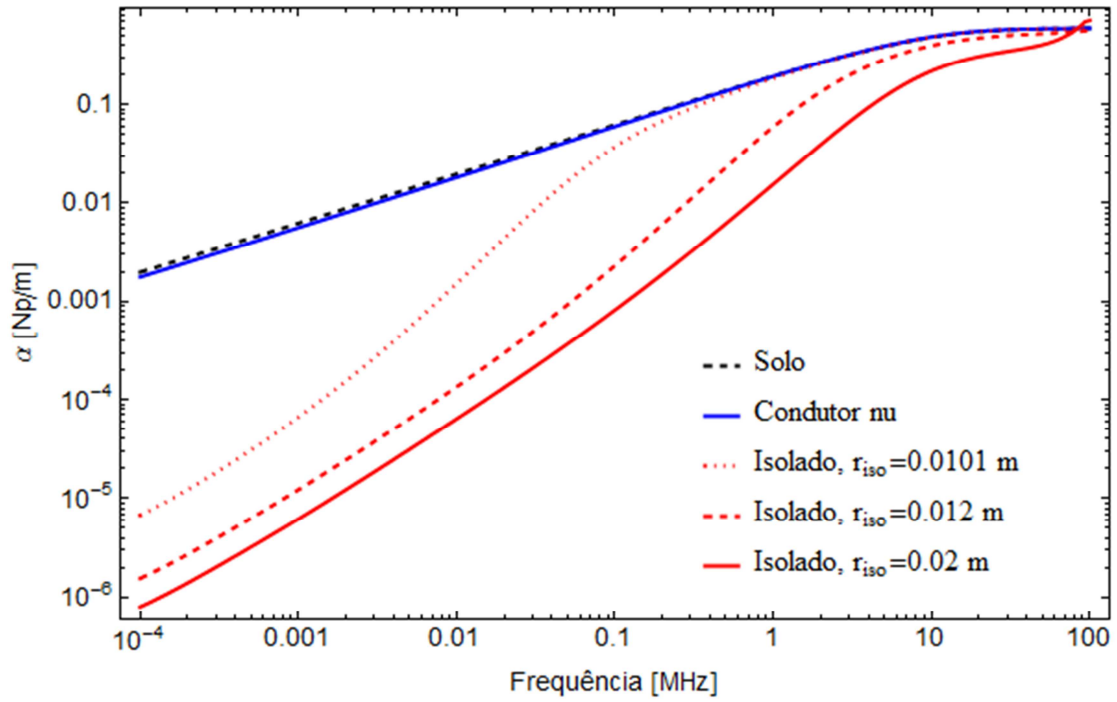


Figura 8: Constante de atenuação $\sigma_s=0.01S/m$

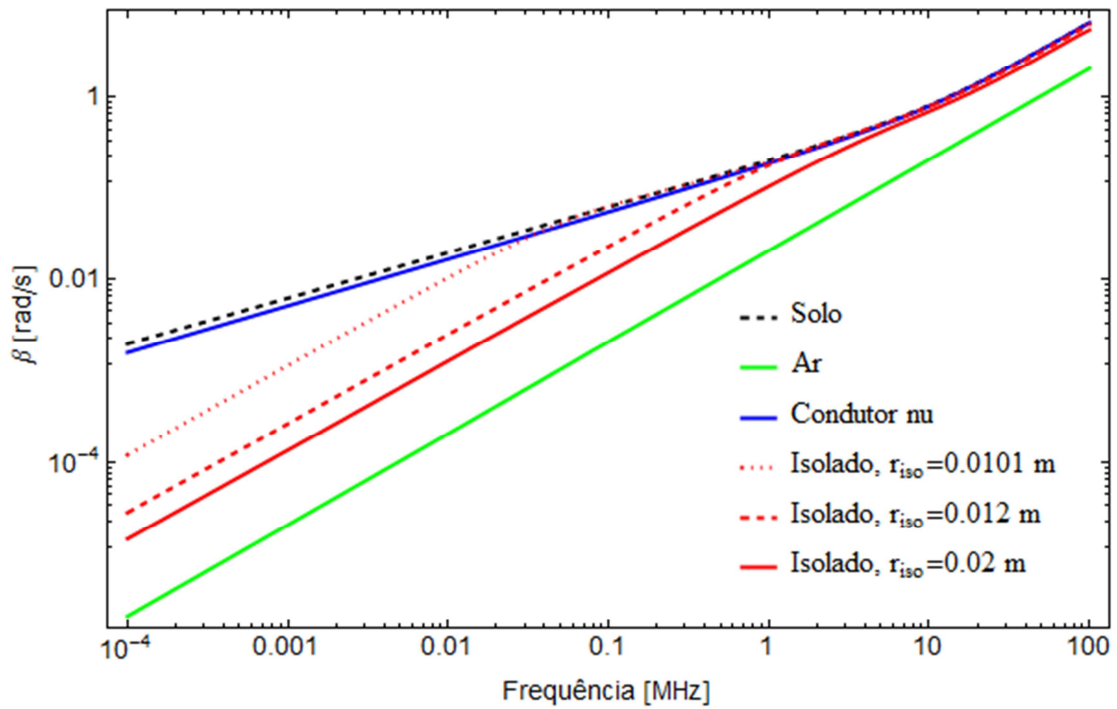


Figura 9: Constante de fase, $\sigma_s=0.01S/m$

E para condutividade do solo de $\sigma_s = 0.001S/m$, os resultados são mostrados nas Figs. 10 e 11, respectivamente, para a constante de atenuação e constante de fase.

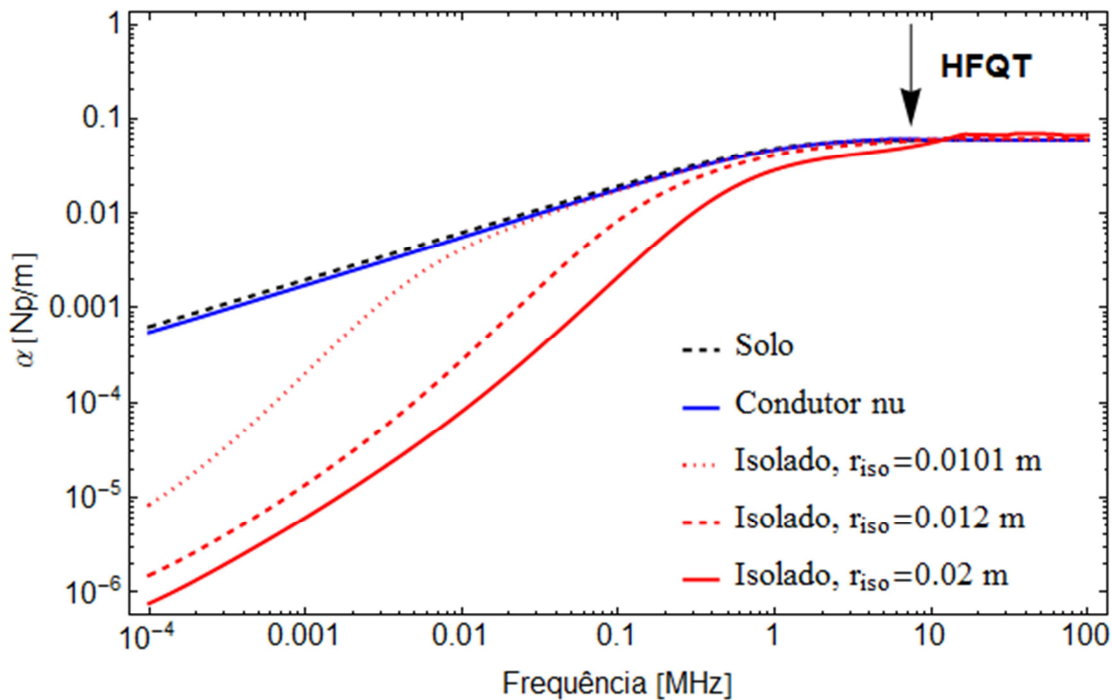


Figura 10: Constante e atenuação, $\sigma_s=0.001\text{S/m}$

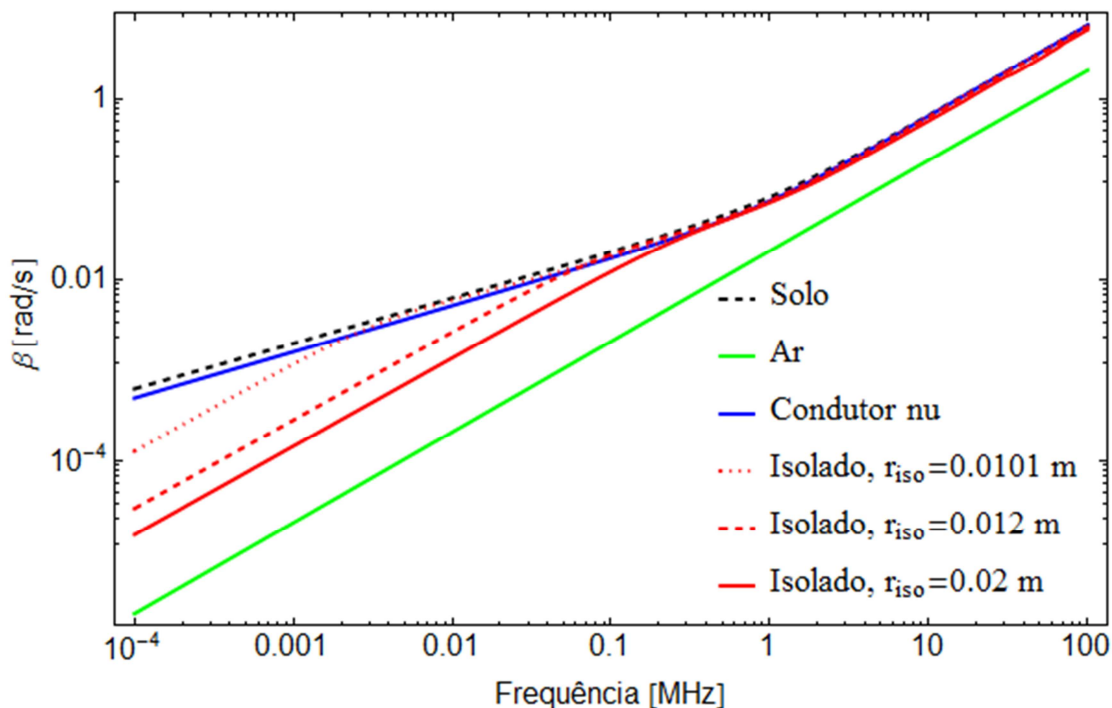


Figura 11: Constante de fase, $\sigma_s=0.001\text{S/m}$

No caso do condutor enterrado nu, as condições de contorno para a obtenção da equação modal, e conseqüentemente a própria equação modal, continuam sendo válidas, dado que a condutividade do condutor é muito maior que a condutividade do

solo. No entanto, fisicamente, há uma diminuta fuga de corrente do condutor para o solo, porém, não afeta a condição de contorno na superfície do condutor.

No caso do condutor enterrado isolado, estes resultados demonstram que ao se diminuir a espessura da camada isolante, a resposta da constante de propagação calculada tende ao comportamento da constante de propagação do solo. Isto significa que ao se reduzir a espessura da camada isolante, o condutor isolado tende a se comportar de forma idêntica ao condutor nu. O mesmo comportamento pode ser observado para variações da profundidade do condutor, raio do condutor, e permissividade elétrica relativa do solo. Porém, a observação mais relevante a salientar, trata-se sobre a resposta do condutor isolado. Para baixas e médias frequências (até cerca de 10MHz), a constante de propagação calculada difere da constante do solo. Isto indica que a propagação se dá majoritariamente no condutor, e neste caso, a camada isolante interfere significativamente sobre a constante de propagação. Para altas frequências, acima de cerca de 10MHz, os resultados indicam que a propagação ocorre basicamente no solo. Isso se deve ao efeito pelicular no condutor, que é muito maior que no solo. Nesta faixa de frequência, a camada isolante torna-se insignificante, e nada influencia na constante de propagação. Este comportamento justifica o desenvolvimento de aproximações quase-TEM específicas para cada intervalo de frequência, ou seja, uma aproximação que represente o comportamento do sistema para baixas e médias frequências, e outra aproximação especialista em altas frequências denominada por *High Frequency Quase-TEM Approximation* (HFQT).

2.5 Impedância Longitudinal e Admitância Transversal

As expressões de impedância e admitância nesta seção são baseadas no modelo de onda completa, e são obtidas admitindo-se que as ondas de corrente, tensão, campo elétrico e magnético, em um plano perpendicular à direção de propagação, variam em igual proporção, dada pela constante de propagação.

Ao longo da direção de propagação, sentido longitudinal do condutor, a dinâmica de propagação é descrita pelas derivadas da tensão transversal e da corrente longitudinal no condutor

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = ZYV = \gamma^2 V \quad (41)$$

neste caso, Z e Y são escalares. Portanto, o mesmo é válido para corrente

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = YZI = \gamma^2 I \quad (42)$$

sendo V a tensão transversal, I a corrente longitudinal, Z a impedância longitudinal por unidade de comprimento (do inglês *Per Unit Length* - p.u.l.), Y a admitância transversal p.u.l, e γ a constante de propagação dada por $\gamma = \sqrt{ZY}$.

A tensão transversal é definida como diferença de potencial entre a superfície do condutor e o solo

$$V = - \int_0^{h-r} E_y dy = \phi(0, h-r) - \phi(0, 0) + j\omega \int_0^{h-r} A_y(0, \xi) d\xi \quad (43)$$

onde ϕ é o potencial escalar e A_y é a componente y do vetor potencial, que contribui para a elevação da tensão no condutor.

2.5.1 Condutor Enterrado Nu

Para o caso de condutores nus, dada a definição de impedância interna para condutores cilíndricos na expressão (33, pag. 19), a impedância por unidade de comprimento pode ser escrita como

$$Z = Z_{int} + Z_{ext} \quad (44)$$

Nesta equação, a única dependência dos parâmetros do solo está contida no termo da impedância externa, que é a impedância longitudinal de retorno pelo solo,

$$z_{ext} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left[\Lambda + S_1 - \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} \right)^2 (T + S_2) \right] \quad (45)$$

S_1 e S_2 são dadas pelas expressões (34, pag. 19). Neste caso, γ é a constante de propagação obtida pela solução da equação modal do modelo de onda completa, e T é dado por

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_2}{u_1} \frac{[\exp(-hu_1) - \exp(-2hu_1)]}{n^2 u_1 + u_2} \exp(-jr\lambda) d\lambda \quad (46)$$

onde $n = (\gamma_2/\gamma_1)^2$ é o índice de refração do meio 2 e $u_i = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_i^2 - \gamma^2}$ para $i=1$ e 2.

Para o condutor nu, o único parâmetro transversal presente é a admitância de retorno pelo solo, e pode ser escrita como

$$Y = Y_{ext} = 2\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)[\Lambda - T]^{-1} \quad (47)$$

2.5.2 Condutor Enterrado Isolado

Para o caso do condutor enterrado isolado, as expressões de impedância longitudinal e admitância transversal são modificadas a fim de se considerar a presença da camada isolante. Este procedimento encontra-se bem detalhado em [31][42], e, em nada difere ao realizado para contabilizar a camada isolante na equação modal. Desta forma, a impedância longitudinal para o condutor enterrado e isolado, pode ser escrita como

$$Z = z_{int} + z_d + z_{ext} \quad (48)$$

sendo Z_d a impedância da camada isolante, descrita por

$$Z_d = \frac{j\omega\mu}{2\pi} Ln \left[\frac{r_d}{r} \right] \quad (49)$$

Sendo r_d o raio da camada isolante e r o raio do condutor.

Igualmente, para a admitância, o procedimento é similar. Porém, a admitância do isolante está em série com a admitância de retorno pelo solo. Desta forma, o parâmetro transversal resultante pode ser escrito como

$$Y = (y_d^{-1} + Y_{ext}^{-1})^{-1} \quad (50)$$

e

$$y_d = j\omega 2\pi \frac{\epsilon_1}{Ln \left[\frac{r_d}{r} \right]}$$

Tal como na equação modal, ao se incluir a camada isolante, as definições referentes ao meio externo (Z_{ext} e Y_{ext}) não são alterados. Porém, para se determinar estes parâmetros, deve-se solucionar numericamente a equação modal, para se determinar a constante de propagação. Com a constante de propagação determinada, calculam-se os valores de impedância e admitância, também por métodos de

integração numérica. Isto resulta que as integrais infinitas devem ser resolvidas na equação modal, e novamente resolvidas para o cálculo de impedância e admitância. Esta estratégia de solução requerida pelo modelo de onda completa exige grande esforço computacional e tempo de simulação.

No entanto, há uma forma de se contornar este problema. A estratégia é livrar as expressões de impedância e admitância da dependência da constante de propagação, ou seja, aproximar a constante de propagação, dentro das integrais de Sommerfeld, por um valor conhecido previamente. Neste trabalho utilizaram-se os resultados do modelo de onda completa para se obter estas aproximações, denominadas por aproximações quase-TEM.

CAPÍTULO 3

PROPOSTAS DE APROXIMAÇÕES QUASE-TEM E REFORMULAÇÃO DO MODELO DE WEDEPOHL

A aproximação quasi-TEM surge das dificuldades de solução da equação modal do modelo de onda completa, sendo seu principal objetivo de livrar os parâmetros impedância e admitância externas da dependência da constante de propagação desconhecida. Esta estratégia consiste na escolha (ajuste) de um valor para a constante de propagação desconhecida no argumento das integrais infinitas que definem as expressões de impedância e admitância. Conseqüentemente, este ajuste é realizado em uma faixa de frequências, impondo-se desta forma, um limite de validade para a aproximação.

Em um trabalho de Pierre Degauque *et. al.* de 1983 [48], os autores descrevem sobre a aproximação quasi-TEM. A seguir reproduzem-se suas palavras de forma literal.

“It may be important to emphasize that the so-called quasi-TEM approximation is based on an approximation of the unknown variable in an integrand [no caso, das integrais de Sommerfeld]. The value which is then obtained can be thus higher or lower than the exact value” [obtido pelo modelo de onda completa].

Apesar de amplamente utilizada, principalmente em simulações computacionais, não há, na literatura especializada, uma forma ou roteiro para obtenção desta aproximação. Majoritariamente, a aproximação quasi-TEM é obtida admitindo-se que a constante de propagação desconhecida é igual a constante do ar, para linhas de transmissão, e igual a constante de propagação do solo, para cabos enterrados. Para este último, a constante de propagação obtida pela solução da equação modal do modelo de onda completa, difere das constantes de propagação do ar e do solo, mostrando-se que simplesmente ajustar a constante de propagação desconhecida pela constante de propagação do meio que envolve o condutor, acarreta

em desvios da resposta da constante de propagação, e conseqüentemente, da impedância e admitância. Estes resultados corroboram com as palavras de Degauque *et. al.*

Diferentemente do até então encontrado na literatura especializada, onde realizam-se as aproximações quase-TEM e tentam-se generalizá-las para o modelo de onda completa, as aproximações quase-TEM para cabos enterrados, isolados e nus, neste trabalho foram obtidas a partir dos resultados do modelo de onda completa. Desta forma, reduziram-se grandemente os desvios entre a constante de propagação por modelo de onda completa e quasi-TEM.

3.1 Condutor Enterrado Nu

Para o condutor enterrado e nu, observaram-se pelos resultados da resposta em frequência da constante de propagação (seção 2.4.2), obtidos pelo modelo de onda completa, que para todo intervalo de frequência avaliado a constante de propagação resultante é muito próxima da constante de propagação do solo. Esta proximidade foi verificada para variações no raio do condutor, profundidade do condutor, permissividade e condutividade do solo.

Seguindo-se destes resultados, verificou-se a possibilidade de se realizar a aproximação quasi-TEM admitindo-se que a constante de propagação desconhecida é igual a constante de propagação do solo. Esta possibilidade foi confirmada pelos resultados obtidos pelo recálculo da constante de propagação obtida pela aproximação quasi-TEM, que foi confrontado com o resultado do modelo de onda completa. Portanto, segue a proposta de aproximação para o condutor enterrado nu.

Para o condutor enterrado nu, admite-se que a constante de propagação desconhecida é igual a constante de propagação do solo, para todo intervalo de frequência $\gamma = \gamma_{solo} = \gamma_1$. Além disso, a constante de propagação do ar é muito pequena, e nada influencia no cálculo dos parâmetros unitários. Com este procedimento, os argumentos das integrais de Sommerfeld ficam independentes da constante desconhecida, e podem ser escritas da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\bar{S}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-2h\bar{u}_1)}{\bar{u}_1 + \bar{u}_2} \exp(-jr\lambda) d\lambda \\ \bar{S}_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-2h\bar{u}_1)}{n^2\bar{u}_1 + \bar{u}_2} \exp(-jr\lambda) d\lambda\end{aligned}\quad (51)$$

$$\text{com } \bar{u}_1 = \lambda \text{ e } \bar{u}_2 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_2^2 - \gamma_1^2} = \sqrt{\lambda^2 - \gamma_1^2} \text{ e } \bar{\Lambda} = \ln\left[\frac{2h}{r}\right]$$

Uma consequência direta destas considerações é também poder escrever uma expressão de impedância e admitância que sejam independentes da constante de propagação desconhecida em todo intervalo de frequências, que para condutor nu, resulta em

$$z_{ext} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} [\bar{\Lambda} + \bar{S}_1 - \bar{T} + \bar{S}_2] \quad (52)$$

e

$$Y = 2\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) [\bar{\Lambda} - \bar{T}]^{-1} \quad (53)$$

Com

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{u}_2 [\exp(-h\bar{u}_1) - \exp(-2h\bar{u}_1)]}{\bar{u}_1 (n^2\bar{u}_1 + \bar{u}_2)} \exp(-jr\lambda) d\lambda \quad (54)$$

Para obtenção da constante de propagação a partir das aproximações quase-TEM para o condutor nu, deve-se considerar a seguinte expressão

$$\gamma = \sqrt{(z_{int} + \bar{z}_{ext}) \cdot \bar{Y}_{ext}} \quad (55)$$

3.1.1 Constante de Propagação

A seguir, os resultados das constantes de propagação para o condutor nu e isolado são apresentadas, juntamente com uma comparação entre a constante de propagação obtida pelo modelo de onda completa. Os resultados foram obtidos com os seguintes ajustes dos parâmetros.

$$\begin{aligned}h &= 1m \\ r_1 &= 0.01m \\ r_2 = r_{iso} &= 0.012m \\ \epsilon_{rs} &= 10\end{aligned}$$

$$\sigma_s = 0.01S/m$$

Variações sobre estes parâmetros também foram realizadas. No entanto, o mesmo comportamento foi verificado. Para evitar redundâncias, inseriram-se somente estes resultados para estes valores, não acarretando em perda de informação.

Para o condutor nu os resultados encontrados e são mostrados nas Figs. 12 e 13. Estas figuras mostram que ao se recalculer a constante de propagação pelo modelo de aproximação quase-TEM ocorre um pequeno desvio entre os resultados do modelo de onda completa. Este desvio se deve ao fato que para o condutor enterrado nu, a constante de propagação desconhecida foi ajustada como sendo igual a constante de propagação do solo em todo intervalo de frequência. Porém, como pode se observar, a constante de propagação obtida pelo modelo de onda completa não é exatamente igual à constante de propagação do solo, o que causa um leve desvio na constante de propagação calculada pela aproximação quase-TEM.

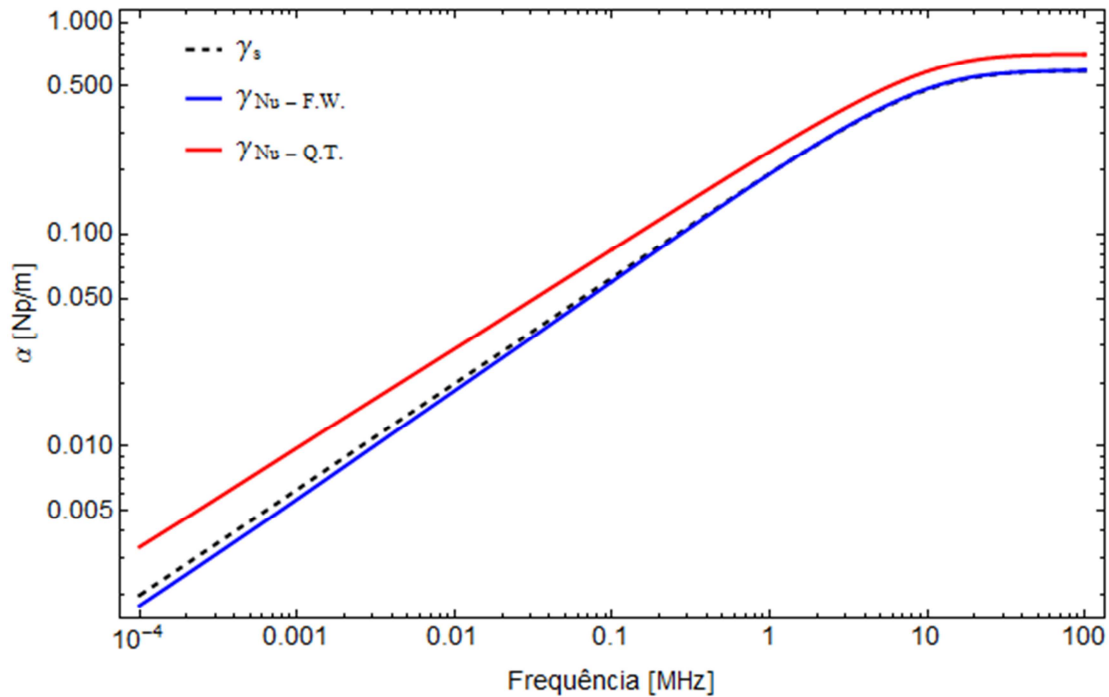


Figura 12: Constante de atenuação, condutor nu. FW- Modelo de onda completa e QT- Aproximação Quase-TEM

Estes resultados foram obtidos utilizando $1.0001\gamma_s$ (constante de propagação do solo) como chute inicial para solução do modelo de onda completa. Para o condutor nu houve a convergência em 207.32s considerando uma amostragem de 200 pontos com distribuição logarítmica na frequência. Com a mesma amostragem, a aproximação quase-TEM é resolvida em cerca de 30s.

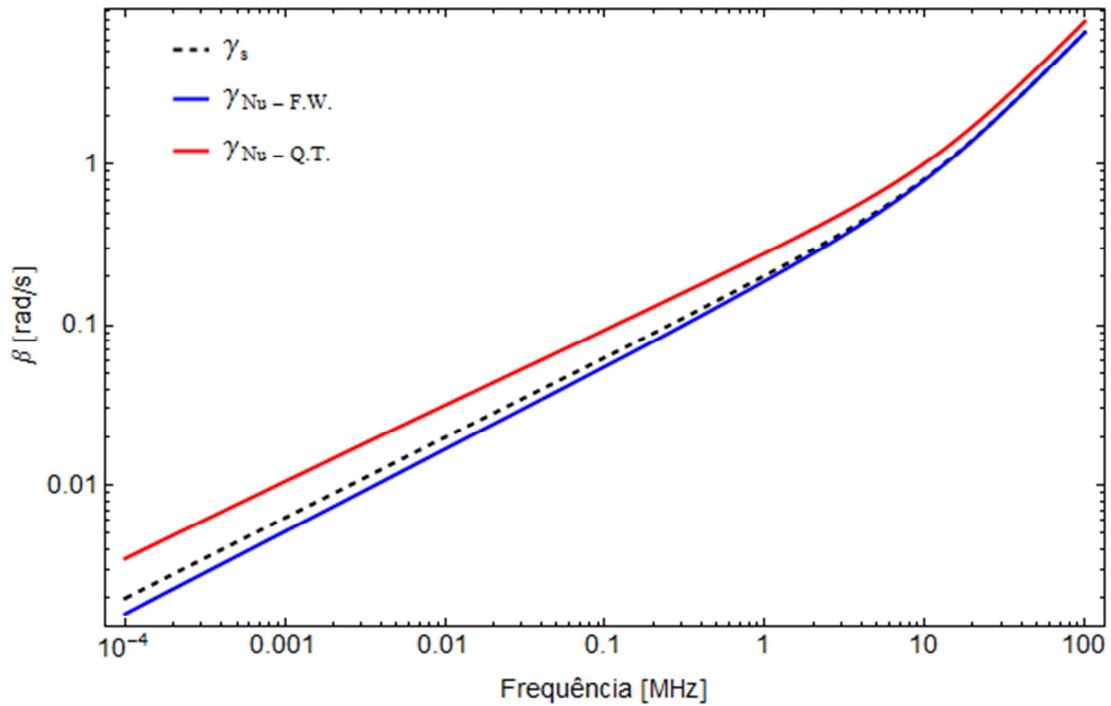


Figura 13: Constante de fase, condutor nu. FW- Modelo de onda completa e QT- Aproximação Quase-TEM

3.2 Condutor Enterrado Isolado

No caso do condutor enterrado isolado, os resultados do modelo de onda completa sugerem que para a obtenção da aproximação quasi-TEM, torna-se inconveniente o ajuste da constante de propagação desconhecida para todo intervalo de frequência. Isto se deve ao fato que para baixas e médias frequências, a presença da camada isolante provoca um desvio do valor da constante de propagação obtida pelo modelo de onda completa, sendo o resultado muito menor que a constante de propagação do solo. Inversamente, para altas frequências a presença da camada isolante torna-se insignificante no cálculo da constante de propagação, recaindo-se ao caso de condutor nu, ou seja, propagação dos campos ocorre majoritariamente no meio externo.

Para baixas frequências, a constante de propagação calculada pouco influencia na resposta em frequência do cabo. Para esta faixa de frequência, admite-se que a

constante de propagação é desprezível, ou seja, $\gamma = 0$, e a aproximação quasi-TEM resulta em

$$u_1 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_1^2} = \bar{u}_1 ; u_2 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_2^2} = \bar{u}_2 ; \eta_1 = \gamma_1$$

Isto equivale, matematicamente, a dizer que os termos T e S2 na expressão de impedância tornaram-se insignificantes, e nada influenciam na resposta em frequência da impedância longitudinal para cabos enterrados. Assim sendo, pode-se escrever as expressões de impedância e admitância como

$$\begin{aligned} \bar{z}_{ext} &= \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} [\bar{\Lambda} + \bar{S}_1] \\ \bar{Y}_{ext} &= 2\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) [\bar{\Lambda} - \bar{T}]^{-1} \end{aligned} \quad (56)$$

Onde $\bar{\Lambda} = K_0(r\gamma_1) - K_0(d\gamma_1)$, e

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-2h\bar{u}_1)}{\bar{u}_1 + \bar{u}_2} \exp(-jr\lambda) d\lambda \\ \bar{T} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1} \frac{[\exp(-h\bar{u}_1) - \exp(-2h\bar{u}_1)]}{n^2\bar{u}_1 + \bar{u}_2} \exp(-jr\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (57)$$

Para o condutor isolado, a constante de propagação é obtida por

$$\gamma = \sqrt{(z_{int} + z_d + \bar{z}_{ext}) \cdot (y_d^{-1} + \bar{Y}_{ext}^{-1})^{-1}} \quad (58)$$

Para altas frequências, a camada isolante é insignificante, e aproximação quase-TEM, para este caso, é dada pela aproximação quase-TEM para o condutor nu, descrita na seção anterior. Porém, a análise detalhada para este caso foge do escopo deste trabalho por se tratar de uma faixa de frequências geralmente utilizadas em telecomunicações. Para análise de transitórios eletromagnéticos, no entanto, a aproximação realizada para baixas e médias frequências é suficiente para a maioria dos fenômenos envolvidos. Portanto, os resultados que serão apresentados neste trabalho restringem-se ao modelo de aproximação para baixas e médias frequências, que é válido para frequências até cerca de 100MHz.

3.2.1 Constante de Propagação

Para condutor isolado resultados obtidos são mostrados nas Figs. 14 e 15 que demonstram que a constante de propagação calculada pela aproximação quase-TEM encontra-se muito próxima do valor encontrado pelo modelo de onda completa. Isto demonstra que para o condutor isolado, considerar que a constante de propagação seja desprezível não acarreta em grandes diferenças.

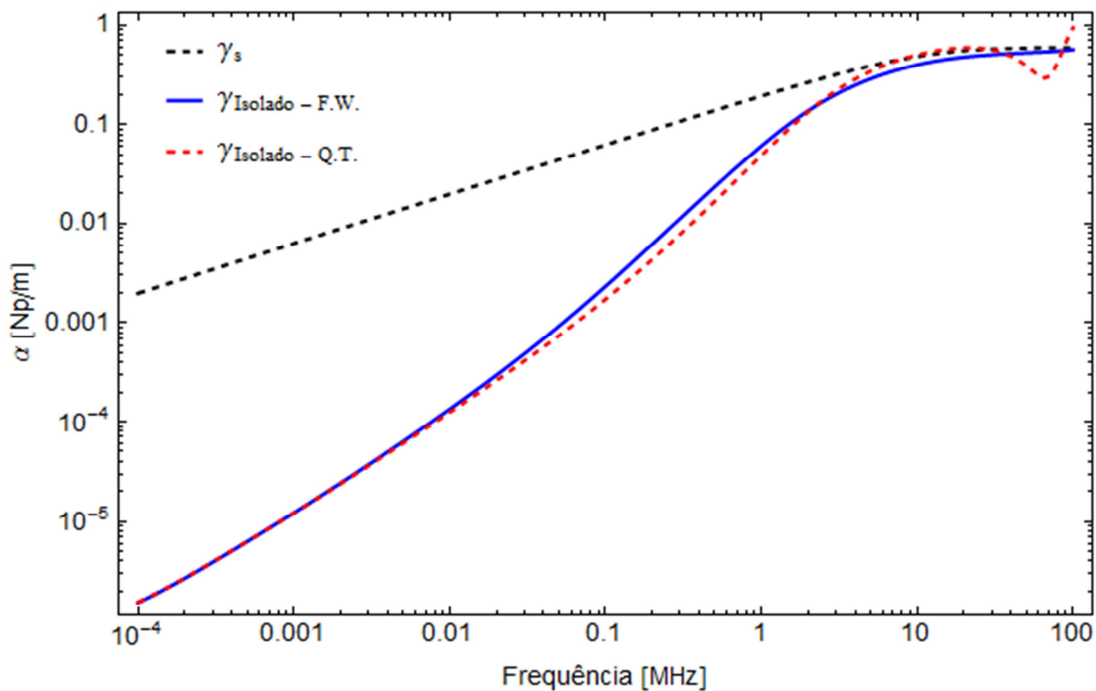


Figura 14: Constante de atenuação, condutor isolado. FW- Modelo de onda completa e QT- Aproximação Quase-TEM

Estes resultados foram obtidos utilizando $1.0001\gamma_s$ (constante de propagação do solo) como chute inicial para solução do modelo de onda completa. Para o condutor isolado houve a convergência em 156.92s considerando uma amostragem de 200 pontos com distribuição logarítmica na frequência. Para esta mesma amostragem solução da aproximação quase-TEM dura cerca de 45s.

As expressões de impedância e admitância desenvolvidas neste trabalho foram para o caso monofásico com condutor nu ou isolado. No entanto, estas expressões podem ser expandidas para os casos de cabos blindados segundo o procedimento em [43] e para o caso trifásico, segundo procedimento em [44].

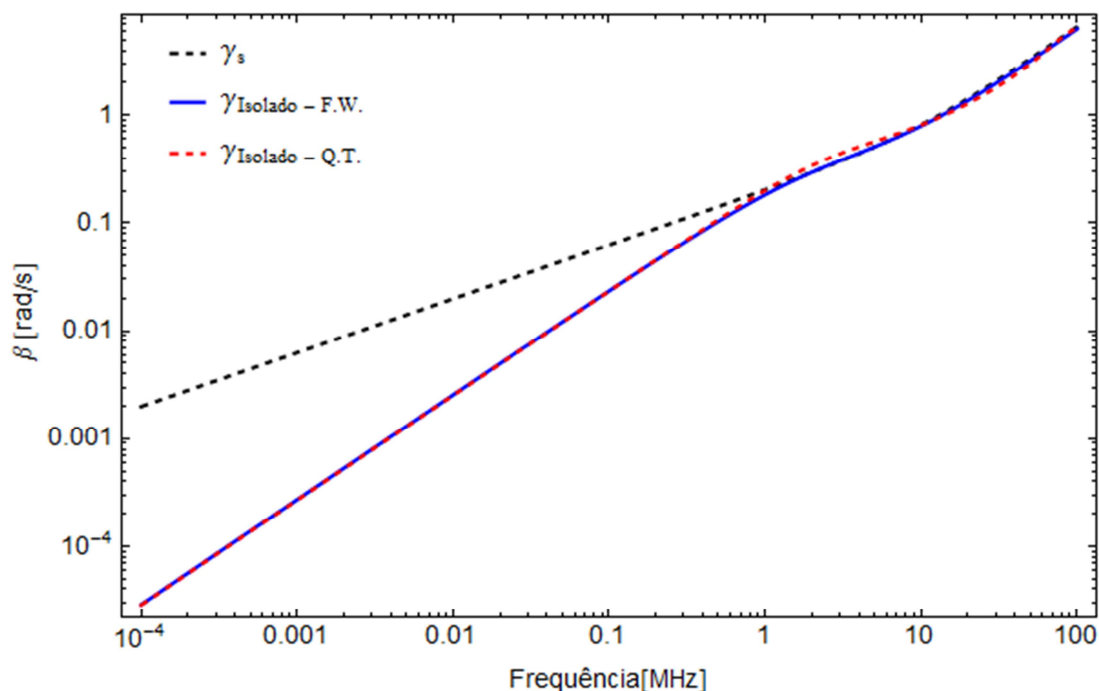


Figura 15: Constante de fase, condutor isolado. FW- Modelo de onda completa e QT- Aproximação Quase-TEM

Um dos aspectos mais importantes a se salientar está embasado nos resultados apresentados nas Figs. 12 a 15 comparativas entre os resultados do modelo de onda completa e as aproximações quase-TEM e complementares aos resultados das Figs. 8 a 11. Por elas, podem-se notar que as aproximações quase-TEM apresentam uma resposta muito próxima da resposta do modelo de onda completa. Este fato acarreta que dentro do intervalo de validade das aproximações quase-TEM não há necessidade de se recorrer ao modelo de onda completa para a obtenção precisa da constante de propagação. Além disso, dentre as maiores contribuições deste trabalho, pode-se dizer que fora do intervalo de validade das aproximações quase-TEM também não há necessidade de se recorrer ao modelo de onda completa, pois outra aproximação quase-TEM pode ser obtida. Estes resultados demonstram que, contrariamente ao que se afirma na literatura, onde há somente uma aproximação quase-TEM possível sendo que para análise em um intervalo de frequência fora de seu intervalo de validade deve-se recorrer ao modelo de onda completa, na verdade, existem diversas aproximações quase-TEM especialistas em sua região de validade, de modo que, com a aproximação correta, não há necessidade de se recorrer ao modelo de onda completa independentemente do intervalo de frequências em análise.

3.3 Proposta de Reformulação do Modelo de Onda Completa de Wedepohl

Conforme demonstrado na seção (2.3) a formulação escrita originalmente por Wedepohl baseia-se na definição do potencial vetor magnético como $H_i = \nabla \times A_i$. Muito embora possa se encontrar em alguns livros especializados em eletromagnetismo esta definição, como em [41], esta notação não é usual na engenharia elétrica.

Como se pode observar, esta formulação é extremamente sensível ao chute inicial dado no processo de determinação da constante de propagação. Este fato desperta dúvidas se esta dificuldade está relacionada com a formulação (definição de potencial vetor) empregada originalmente, pois esta definição altera a estrutura da função integrando da transformada inversa de Fourier. Desta forma, optou-se por reestruturar esta formulação, para o caso do condutor nu e propor a extensão desta formulação para o caso do condutor isolado, como se segue.

As definições usadas são $\mathbf{B}_i = \nabla \times \mathbf{A}_i$ para o potencial vetor magnético e $\mathbf{E}_i = \frac{-1}{\epsilon_i} \nabla \times \mathbf{F}_i$ para o potencial vetor elétrico, com o índice $i = 1, 2$, respectivos aos meios “1” e “2”. Desta forma, para o modo TM os campos podem ser definidos como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= -\nabla \phi_i - j\omega \mathbf{A}_i \\ \mathbf{H}_i &= \frac{1}{\mu_i} \nabla \times \mathbf{A}_i \end{aligned} \quad (59)$$

Onde ϕ_i é o potencial escalar, que se relaciona com o potencial vetor magnético pelo calibre de Lorenz

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_i + \mu_i (\sigma_i + i\omega \epsilon_i) \phi_i = 0 \quad (60)$$

Neste caso, o potencial vetor magnético possui somente componentes ao longo de Z.

$$\mathbf{A}_i = A_{i0}(x, y) e^{-\gamma z} \hat{\mathbf{Z}} \quad (61)$$

onde a variação nesta direção é descrita pela constante de propagação γ .

Abaixo do solo, meio “1” (pela Fig. 1, pag. 10) o vetor densidade de corrente pode ser definido como:

$$\mathbf{J} = I_0 e^{-\gamma z} \delta(x - x_c) \delta(y - y_c) \hat{\mathbf{Z}} \quad (62)$$

E a equação de onda para este modo resulta em

$$\nabla^2 \mathbf{A}_1 + \lambda_1^2 \mathbf{A}_1 = \mu_1 I \delta(x - x_c) \delta(y - y_c) \quad (63)$$

onde x_c e y_c são as coordenadas do condutor, $\lambda_1^2 = (\gamma^2 - \gamma_1^2)$ e $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Acima do solo, (meio 2) não há corrente associada como fonte dos campos e a equação de onda pode ser escrita da seguinte forma:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_2 + \lambda_2^2 \mathbf{A}_2 = 0 \quad (64)$$

com $\lambda_2^2 = (\gamma^2 - \gamma_2^2)$.

Para os modos TE, os campos elétricos e magnéticos são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= -\frac{1}{\epsilon_i} \nabla \times \mathbf{F}_i \\ \mathbf{H}_i &= \nabla \varphi_i - \frac{1}{\epsilon_i} (\sigma_i + j\omega \epsilon_i) \mathbf{F}_i \end{aligned} \quad (65)$$

sendo φ_i o potencial escalar magnético no meio i . Para este modo, não há corrente associada como fonte dos campos e a equação de onda que descreve o comportamento dos campos é dada por

$$\nabla^2 \mathbf{F}_i + (\gamma^2 - \gamma_i^2) \mathbf{F}_i = 0 \quad (66)$$

e a relação entre φ_i e \mathbf{F}_i é descrita pelo calibre de Lorenz

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}_i + i\omega \epsilon_i \mu_i \varphi_i &= 0 \\ \varphi_i &= \frac{\gamma}{j\omega \epsilon_i \mu_i} \mathbf{F}_i \end{aligned} \quad (67)$$

As condições de contorno são aplicadas no domínio de Fourier (α) (referente ao eixo de coordenadas X). Logo, os vetores potenciais são funções $\bar{A}(\alpha, y)$ e $\bar{F}(\alpha, y)$. Para a componente H_z do campo magnético, existente somente no modo TE, segue a seguinte relação de continuidade:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{TEZ1} &= \bar{H}_{TEZ2} \\ \frac{\lambda_1^2}{j\omega \mu_1 \epsilon_1} \bar{F}_1 &= \frac{\lambda_2^2}{j\omega \mu_2 \epsilon_2} \bar{F}_2 \\ \frac{\lambda_1^2}{j\omega \mu_1 \epsilon_1} \bar{F}_{10} e^{-u_1 y} &= \frac{\lambda_2^2}{j\omega \mu_2 \epsilon_2} \bar{F}_{20} e^{u_2 y} \end{aligned} \quad (68)$$

Resultando em

$$\frac{\lambda_1^2}{j\omega\mu_1\epsilon_1}\bar{F}_{10} = \frac{\lambda_2^2}{j\omega\mu_2\epsilon_2}\bar{F}_{20}$$

$$\bar{F}_{20} = \frac{\mu_2\epsilon_2\lambda_1^2}{\mu_1\epsilon_1\lambda_2^2}\bar{F}_{10}$$
(69)

Para $y=0$ (interface entre os meios).

Para a componente E_z do campo elétrico, existente somente no modo TM, pode-se estabelecer a seguinte relação de continuidade:

$$\bar{E}_{TMZ1} = \bar{E}_{TMZ2}$$

$$j\omega\frac{\lambda_1^2}{\gamma_1^2}\bar{A}_1 = j\omega\frac{\lambda_2^2}{\gamma_2^2}\bar{A}_2$$

$$\frac{\lambda_1^2}{\gamma_1^2}\left[\bar{A}_{10}e^{-u_1y} + \frac{I\mu_1e^{-j\alpha x_c}(e^{u_1(y-y_c)} - e^{-u_1(y+y_c)})}{2u_1}\right] = \frac{\lambda_2^2}{\gamma_2^2}\bar{A}_{20}e^{u_2y}$$
(70)

Que em $y=0$ retorna

$$\frac{\lambda_1^2}{\gamma_1^2}\bar{A}_{10} = \frac{\lambda_2^2}{\gamma_2^2}\bar{A}_{20}$$

$$\bar{A}_{20} = \frac{\lambda_1^2\gamma_2^2}{\lambda_2^2\gamma_1^2}\bar{A}_{10}$$
(71)

Para a componente E_x do campo elétrico o processo é semelhante, porém, mais elaborado, pois esta componente possui contribuição para os modos TE e TM. A continuidade desta componente é:

$$\bar{E}_{TMx1} + \bar{E}_{TEx1} = \bar{E}_{TMx2} + \bar{E}_{TEx2}$$

Neste caso as componentes são dadas por

$$-j\omega\frac{\gamma}{\gamma_1^2}\frac{\partial\bar{A}_1}{\partial x} - \frac{1}{\epsilon_1}\frac{\partial\bar{F}_1}{\partial x} = -j\omega\frac{\gamma}{\gamma_2^2}\frac{\partial\bar{A}_2}{\partial x} - \frac{1}{\epsilon_2}\frac{\partial\bar{F}_2}{\partial x}$$
(72)

Que em $y=0$ resulta em

$$-j\omega\frac{\gamma\alpha}{\gamma_1^2}\bar{A}_{10} - \frac{u_1}{\epsilon_1}\bar{F}_{10} = -j\omega\frac{\gamma\alpha}{\gamma_2^2}\bar{A}_{20} - \frac{u_2}{\epsilon_2}\bar{F}_{20}$$
(73)

Como (da relação de continuidade de E_z e H_z)

$$\bar{A}_{20} = \frac{\lambda_1^2\gamma_2^2}{\lambda_2^2\gamma_1^2}\bar{A}_{10}$$

$$\bar{F}_{20} = \frac{\mu_2\epsilon_2\lambda_1^2}{\mu_1\epsilon_1\lambda_2^2}\bar{F}_{10}$$
(74)

E substituindo em (77) resulta:

$$\begin{aligned}
 -j\omega \frac{\gamma}{\gamma_1^2} \bar{A}_{10} - \frac{u_1}{\varepsilon_1} \bar{F}_{10} &= -j\omega \frac{\gamma\alpha}{\gamma_2^2} \frac{\lambda_1^2 \gamma_2^2}{\lambda_2^2 \gamma_1^2} \bar{A}_{10} - \frac{u_2}{\varepsilon_2} \frac{\mu_2 \varepsilon_2 \lambda_1^2}{\mu_1 \varepsilon_1 \lambda_2^2} \bar{F}_{10} \\
 -j\omega \frac{\gamma\alpha}{\gamma_1^2} \bar{A}_{10} + j\omega\gamma\alpha \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2 \gamma_1^2} \bar{A}_{10} &= \frac{u_1}{\varepsilon_1} \bar{F}_{10} - \frac{u_2}{\varepsilon_2} \frac{\mu_2 \varepsilon_2 \lambda_1^2}{\mu_1 \varepsilon_1 \lambda_2^2} \bar{F}_{10} \\
 j\omega\gamma\alpha \left(\frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_2^2 \gamma_1^2} \right) \bar{A}_{10} &= \left(\frac{u_1 \mu_1 \lambda_2^2 - u_2 \mu_2 \lambda_1^2}{\mu_1 \varepsilon_1 \lambda_2^2} \right) \bar{F}_{10}
 \end{aligned} \tag{75}$$

Obtém-se

$$\bar{F}_{10} = \frac{j\omega\mu_1\varepsilon_1\gamma\alpha}{\gamma_1^2} \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(u_1\mu_1\lambda_2^2 - u_2\mu_2\lambda_1^2)} \bar{A}_{10} \tag{76}$$

Para a componente H_x do campo magnético a relação de continuidade é dada por:

$$\bar{H}_{TMx1} + \bar{H}_{TEs1} = \bar{H}_{TMx2} + \bar{H}_{TEs2}$$

As componentes dos campos são dadas por

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y} - \frac{\gamma}{j\omega\mu_1\varepsilon_1} \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial y} - \frac{\gamma}{j\omega\mu_2\varepsilon_2} \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial x} \tag{77}$$

Na interface entre os meios ($y=0$) pode ser escrita como

$$\frac{u_1}{\mu_1} \bar{A}_{10} + Ie^{-j\alpha x} - \frac{\gamma\alpha}{j\omega\mu_1\varepsilon_1} \bar{F}_{10} = \frac{u_2}{\mu_2} \bar{A}_{20} - \frac{\gamma\alpha}{j\omega\mu_2\varepsilon_2} \bar{F}_{20} \tag{78}$$

como

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_{20} &= \frac{\mu_2 \varepsilon_2 \lambda_1^2}{\mu_1 \varepsilon_1 \lambda_2^2} \bar{F}_{10} \\
 \bar{A}_{20} &= \frac{\gamma_2^2 \lambda_1^2}{\gamma_1^2 \lambda_2^2} \bar{A}_{10}
 \end{aligned} \tag{79}$$

e

$$\bar{F}_{10} = \frac{j\omega\mu_1\varepsilon_1\gamma\alpha}{\gamma_1^2} \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(u_1\mu_1\lambda_2^2 - u_2\mu_2\lambda_1^2)} \bar{A}_{10} \tag{80}$$

O vetor \bar{F}_{20} pode ser escrito como

$$\bar{F}_{20} = \frac{j\omega\mu_2\varepsilon_2\gamma\alpha\lambda_1^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{\gamma_1^2 \lambda_2^2 (u_1\mu_1\lambda_2^2 - u_2\mu_2\lambda_1^2)} \bar{A}_{10} \tag{81}$$

Substituindo na equação de continuidade resulta

$$Ie^{-j\alpha x_c} e^{-u_1 y_c} = \left[\frac{-u_1}{\mu_1} + \frac{u_2 \gamma_2^2 \lambda_1^2}{\gamma_1^2 \lambda_2^2 \mu_2} - \frac{\alpha^2 \gamma^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{\gamma_1^2 \lambda_2^2 (u_1 \mu_1 \lambda_2^2 - u_2 \mu_2 \lambda_1^2)} \right] \bar{A}_{10}$$

$$f(\alpha, y)^{-1} = \left[\frac{-u_1}{\mu_1} + \frac{u_2 \gamma_2^2 \lambda_1^2}{\gamma_1^2 \lambda_2^2 \mu_2} - \frac{\alpha^2 \gamma^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{\gamma_1^2 \lambda_2^2 (u_1 \mu_1 \lambda_2^2 - u_2 \mu_2 \lambda_1^2)} \right] \quad (82)$$

$$\bar{A}_{10} = Ie^{-j\alpha x_c} e^{-u_1 y_c} f(\alpha, y)$$

Por último, pode-se estabelecer a condição na superfície do condutor. Esta condição estabelece a continuidade da Componente E_z na interface entre o condutor e o meio externo. Esta relação também é conhecida como condição metálica e, pode ser escrita como se segue:

$$\bar{E}_z = \frac{j\omega \lambda_1^2}{\gamma_1^2} \bar{A}_1 \quad (83)$$

Dado que

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_{10} e^{-u_1 y} + \frac{I\mu_1 e^{-j\alpha x_c}}{2u_1} (e^{-u_1(y-y_c)} - e^{-u_1(y+y_c)}) \quad (84)$$

E pela continuidade de H_x

$$\bar{A}_1 = Ie^{-j\alpha x_c} f(\alpha, y) e^{-u_1(y-y_c)} + \frac{I\mu_1 e^{-j\alpha x_c}}{2u_1} (e^{-u_1(y-y_c)} - e^{-u_1(y+y_c)}) \quad (85)$$

$$\bar{A}_1 = \left[\left(f(\alpha, y) - \frac{\mu_1}{2u_1} \right) e^{-u_1(y+y_c)} + \frac{\mu_1}{2u_1} e^{-u_1(y-y_c)} \right] Ie^{-j\alpha x_c} \quad (86)$$

Logo

$$\bar{E}_z = \frac{j\omega \lambda_1^2}{\gamma_1^2} \left[\left(f(\alpha, y) - \frac{\mu_1}{2u_1} \right) e^{-u_1(y+y_c)} + \frac{\mu_1}{2u_1} e^{-u_1(y-y_c)} \right] Ie^{-j\alpha x_c} \quad (87)$$

Para se determinar E_z deve-se aplicar a transformada inversa de Fourier. Assim, pode-se escrever a equação integral da seguinte forma:

$$E_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega \lambda_1^2}{\gamma_1^2} \left[\left(f(\alpha, y) - \frac{\mu_1}{2u_1} \right) e^{-u_1(y+y_c)} + \frac{\mu_1}{2u_1} e^{-u_1(y-y_c)} \right] Ie^{-j\alpha x_c} e^{-j\alpha x} d\alpha \quad (88)$$

Na superfície do condutor,

$$E_{zc} = \frac{\lambda_1^2}{\gamma_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(f(\alpha, y) - \frac{\mu_1}{2u_1} \right) e^{-2u_1 y_c} + \frac{\mu_1}{2u_1} e^{-u_1 y_c} \right] d\alpha \quad (89)$$

Esta componente deve ser nula, estabelecendo-se a equação modal para o condutor enterrado nú:

$$E_{zc} = \frac{\lambda_1^2}{\gamma_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(f(\alpha, y) - \frac{\mu_1}{2u_1} \right) e^{-2u_1 y_c} + \frac{\mu_1}{2u_1} e^{-u_1 r_c} \right] d\alpha = 0 \quad (90)$$

A constante de propagação é determinada encontrando-se as raízes que satisfaçam à condição de igualdade a zero. Considerando-se um condutor de raio $r=0.01\text{m}$, enterrado a $h=1\text{m}$ de profundidade em um solo com $\sigma_s = 0.01 [S/m]$, a resposta da constante de atenuação encontrada pela reformulação é mostrada na Fig.16 e a constante de fase na Fig. 17

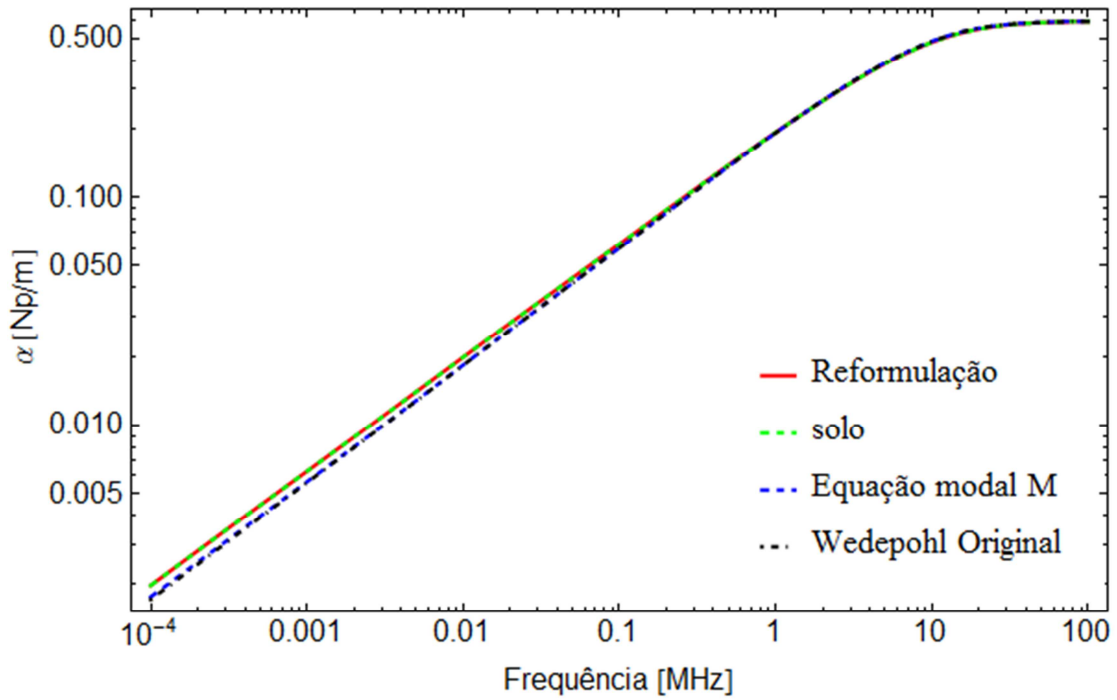


Figura 16: Constante de atenuação determinada pela reformulação de Wedepohl.

A Fig. 18 mostra o desvio entre a formulação original e a reformulação. Este desvio foi calculado com

$$Desvio = \frac{(\gamma_{reformulação} - \gamma_{original})}{\gamma_{original}} \quad (91)$$

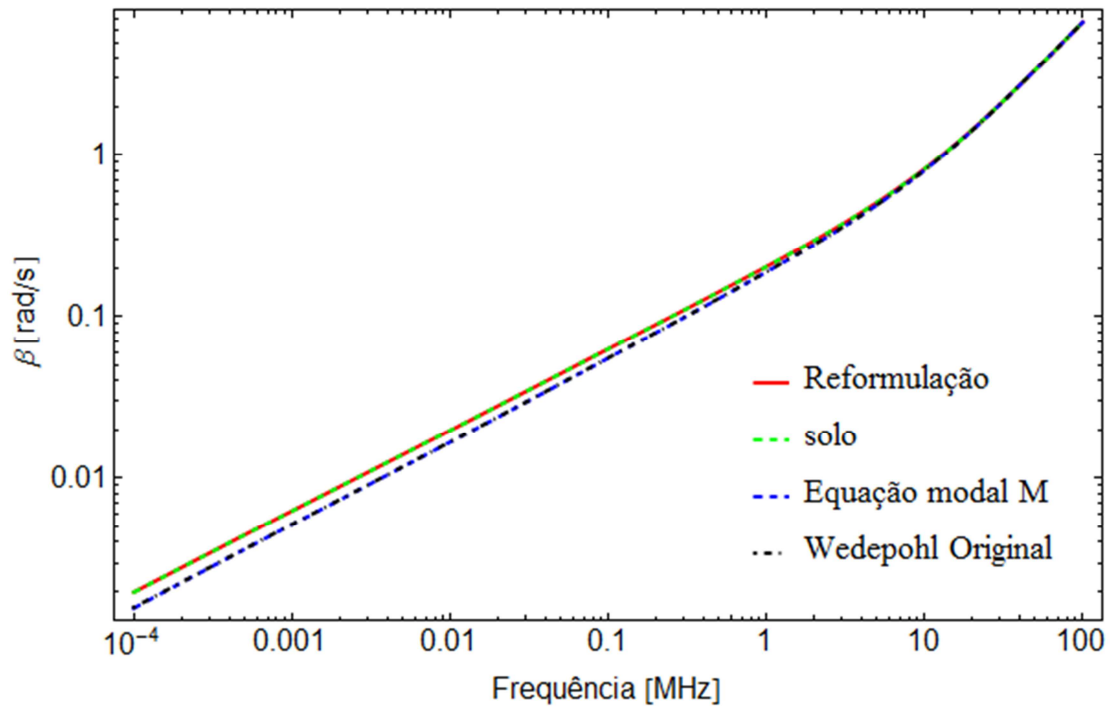


Figura 17: Constante de fase determinada pela reformulação de Wedepohl.

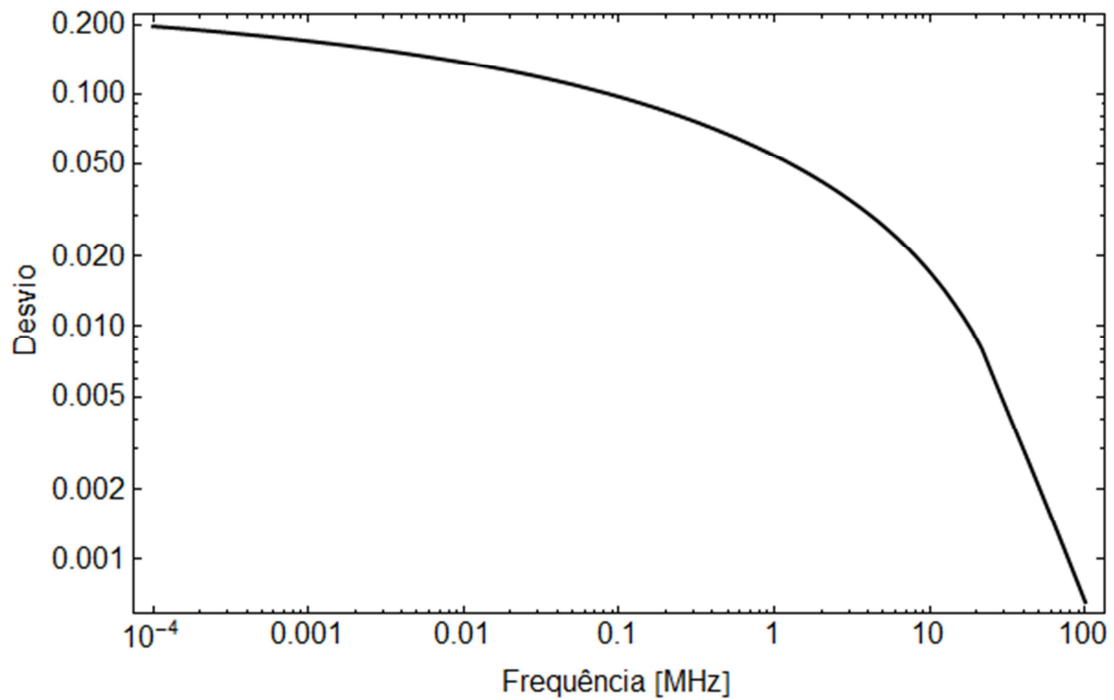


Figura 18: Desvio entre a formulação original e a reformulação.

Para o caso do condutor enterrado isolado há a necessidade de se incluir a impedância e admitância da camada isolante. Este procedimento em nada altera o argumento da integral infinita, pois esta expressão está relacionada ao efeito do solo.

Desta forma, a extensão da equação modal da formulação de Wedepohl para o condutor enterrado isolado pode ser escrita como:

$$E_{zc} = \frac{2\pi}{j\omega\mu_1} \left(Z_{int} + Z_d - \frac{\gamma^2}{Y_d} \right) + \frac{j\omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda_1^2}{\gamma_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(f(\alpha, y) - \frac{\mu_1}{2u_1} \right) e^{-2u_1 y_c} + \frac{\mu_1}{2u_1} e^{-u_1 r_c} \right] d\alpha = 0 \quad (92)$$

onde Z_{int} é impedância interna do condutor, Z_d a impedância da camada isolante e Y_d a admitância da camada isolante.

$$\begin{aligned} Z_{int} &= \frac{1}{2\pi r_0} \left(\frac{j\omega\mu_c}{\sigma_c} \right)^{1/2} \frac{I_0(\gamma_c r_0)}{I_1(\gamma_c r_0)} \\ Z_d &= \frac{j\omega\mu}{2\pi} \text{Ln} \left[\frac{r_d}{r} \right] \\ Y_d &= j\omega 2\pi \frac{\epsilon_1}{\text{Ln} \left[\frac{r_d}{r} \right]} \end{aligned} \quad (93)$$

Considerando o condutor de raio $r_0 = 0.01m$ envolvido por uma camada isolante de raio $r_d = 0.012m$ enterrado a $h=1m$ de profundidade em um solo com $\sigma_s = 0.01 [S/m]$, a constante de propagação é mostrada nas Fig. 19 e 20, respectivamente, suas componentes de atenuação e fase.

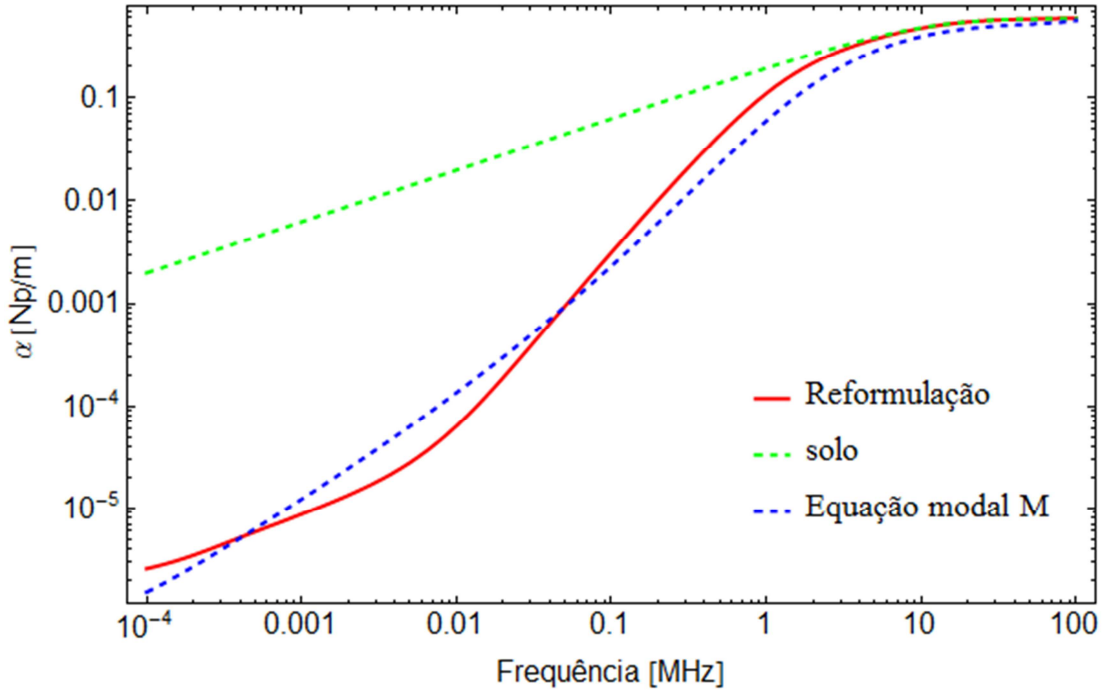


Figura 19: Constante de atenuação. Formulação proposta para condutor isolado.

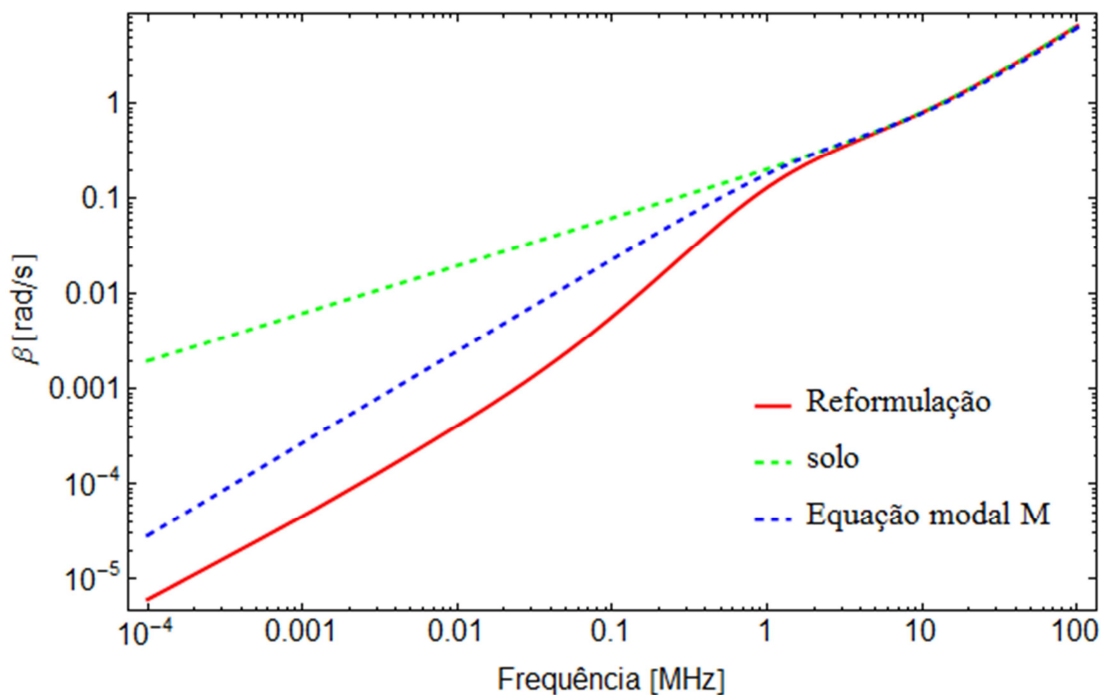


Figura 20: Constante de fase. Formulação proposta para condutor isolado.

O importante a salientar é que contrariamente ao que se esperava, ao se realizar esta reformulação o processo de solução da equação modal ficou mais sensível ao chute inicial. Para o caso do condutor isolado, observaram-se alguns desvios numéricos entre as constantes de propagação obtidas pela reformulação e pela equação modal M descrita na equação (37, pág. 20), no entanto, a resposta em frequência esbanja o mesmo comportamento. Este fato demonstra a maior sensibilidade desta reformulação ao chute inicial.

Estes resultados foram obtidos utilizando $(1,00001 + j0.6)\gamma_s$ (constante de propagação do solo) como chute inicial. Este chute foi o que apresentou melhor convergência. Para o condutor nu houve a convergência em 18.7s e para o condutor isolado em 101,87s, considerando uma amostragem de 200 pontos com distribuição logarítmica na frequência.

A Fig. 21 abaixo mostra o desvio entre a reformulação e o resultado obtido pela equação modal M.

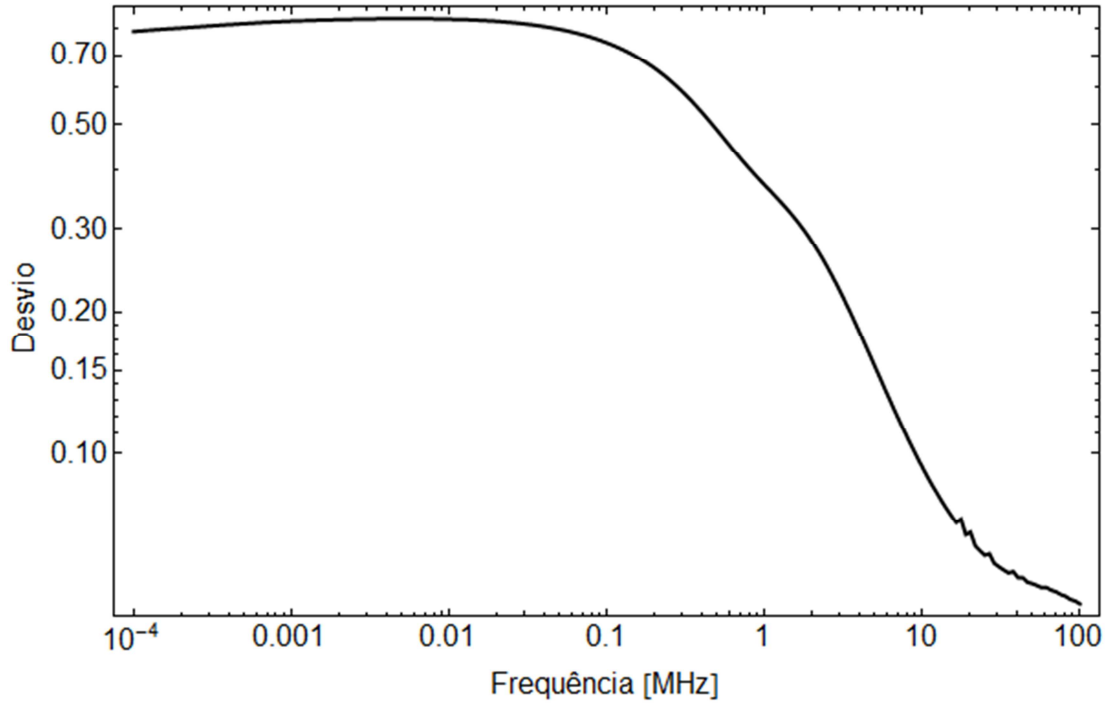


Figura 21: Desvio entre reformulação e equação modal M.

Este desvio foi obtido por:

$$Desvio = \frac{(\gamma_{reformulação} - \gamma_{eqM})}{\gamma_{eqM}} \quad (94)$$

sendo γ_{eqM} a constante de propagação obtida pela solução da equação modal M.

CAPITULO 4

CASOS TESTE

Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos da resposta em frequência da constante de propagação, impedância longitudinal e admitância transversal. Para isto, consideram-se o modelo de onda completa e as aproximações quase-TEM, em cenários caracterizados como linha de transmissão e cabos enterrados. As rotinas de solução dos modelos foram implementadas em programas desenvolvidos na plataforma *Mathematica*. Basicamente, os programas desenvolvidos seguem o fluxograma da Fig. 22.

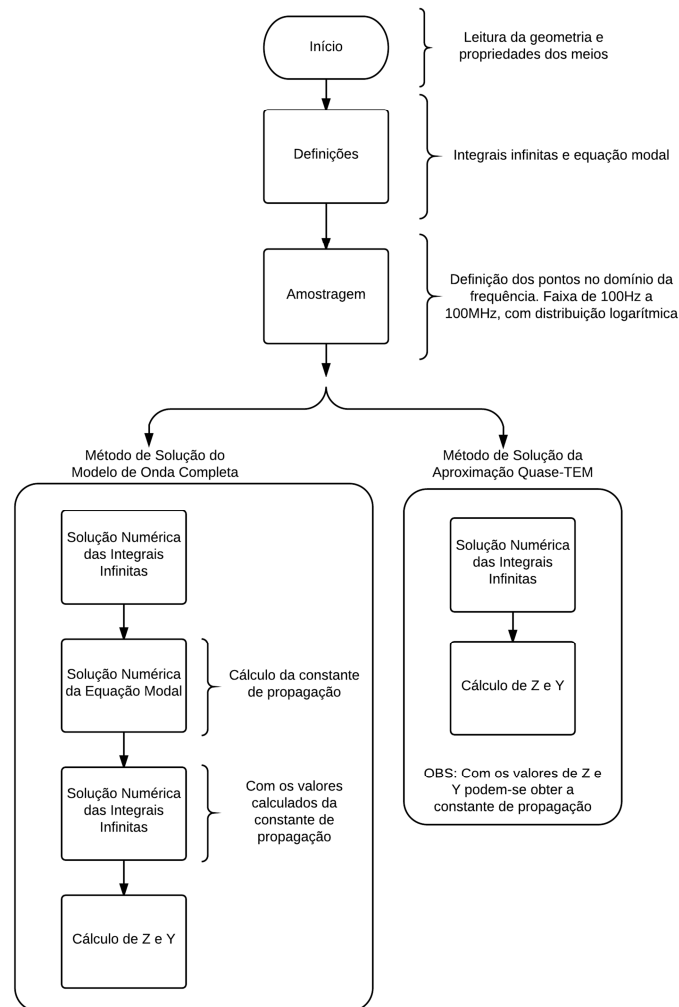


Figura 22: Fluxograma. Esquema de solução do modelo de onda completa e quase-TEM

4.1 Domínio da Frequência

4.1.1 Condutor Enterrado Nu (comparação Z e Y por QT e FW)

Os resultados apresentados nesta seção foram obtidos pelo modelo de onda completa e pelas aproximações quase-TEM apresentadas. Estes resultados são comparados, para o caso do condutor nu, com as aproximações propostas por Papadopoulos *et al* em [27]. Os resultados são para um solo convencional onde se considera a corrente de deslocamento. Os parâmetros foram ajustados para $h = 1m$, $r_1 = 0.01m$, $r_2 = r_{iso} = 0.012m$, $\epsilon_{rs} = 10$ e $\sigma_s = 0.01S/m$. A Fig. 23 mostra uma comparação entre impedâncias calculadas pelo modelo de onda completa, aproximação quase-TEM proposta e aproximação quase-TEM proposta em [27].

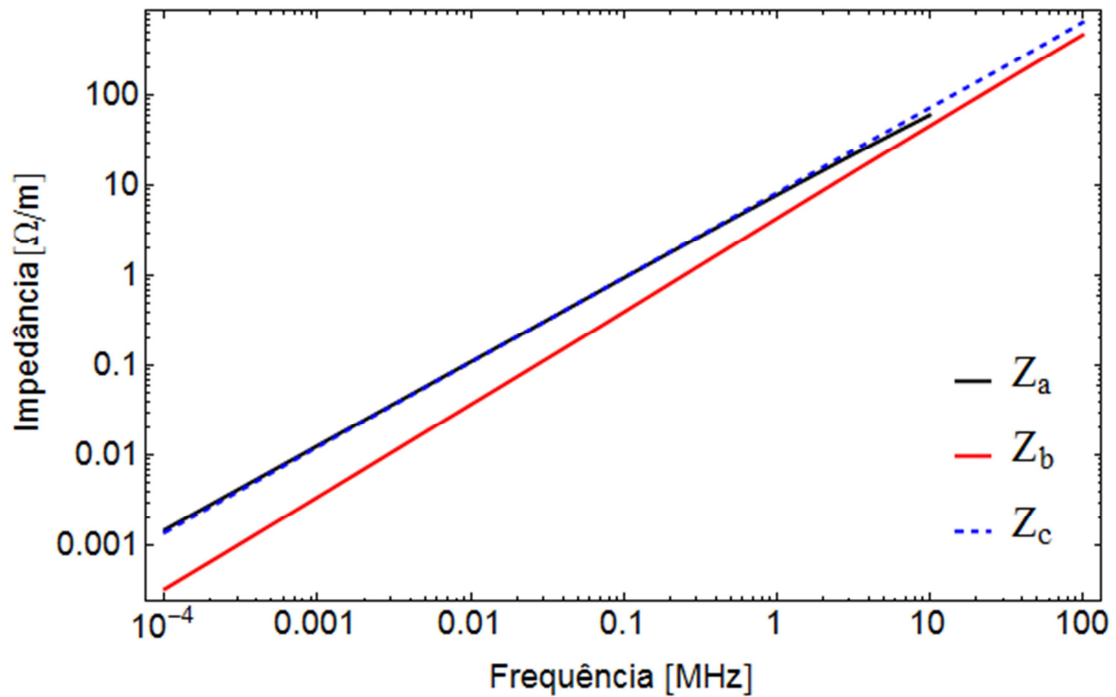


Figura 23: Impedância p.u.l. (condutor nu). Z_a -Papadopoulos et al [27]. Z_b - Onda completa e Z_c - Aproximação quase-TEM Quase-TEM.

A Fig. 24 mostra uma comparação entre admitâncias calculadas pelo modelo de onda completa, aproximação quase-TEM proposta e aproximação quase-TEM proposta em [27].

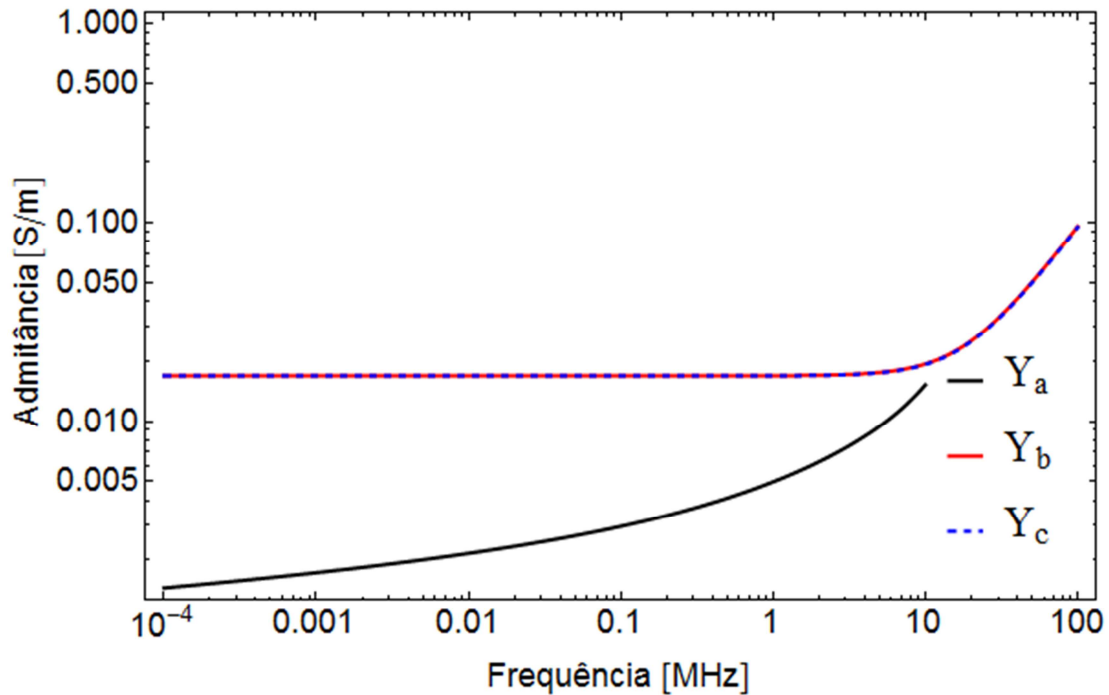


Figura 24: Admitância p.u.l. (condutor nu). Y_a -Papadopoulos et al [27]. Y_b - Onda completa e Y_c - Aproximação quase-TEM

A diferença encontrada entre a admitância calculada pela aproximação quase-TEM proposta e a pela formulação de Papadopoulos [27] se deve ao fato que em sua formulação não foi considerada a componente magnética do vetor de Hertz. Esta componente deve ser considerada para se estabelecer a correta definição de tensão no condutor, e conseqüentemente da admitância transversal.

4.1.2 Condutor Enterrado Isolado (comparação Z e Y por QT e FW)

Para o caso do condutor enterrado isolado os resultados são comparados com as formulações apresentadas por Papadopoulos *et al* em [27] e Petrache *et al* em [36], sendo que a Fig. 25 mostra uma comparação entre as impedâncias e a Fig. 26 mostra a comparação entre as admitâncias.

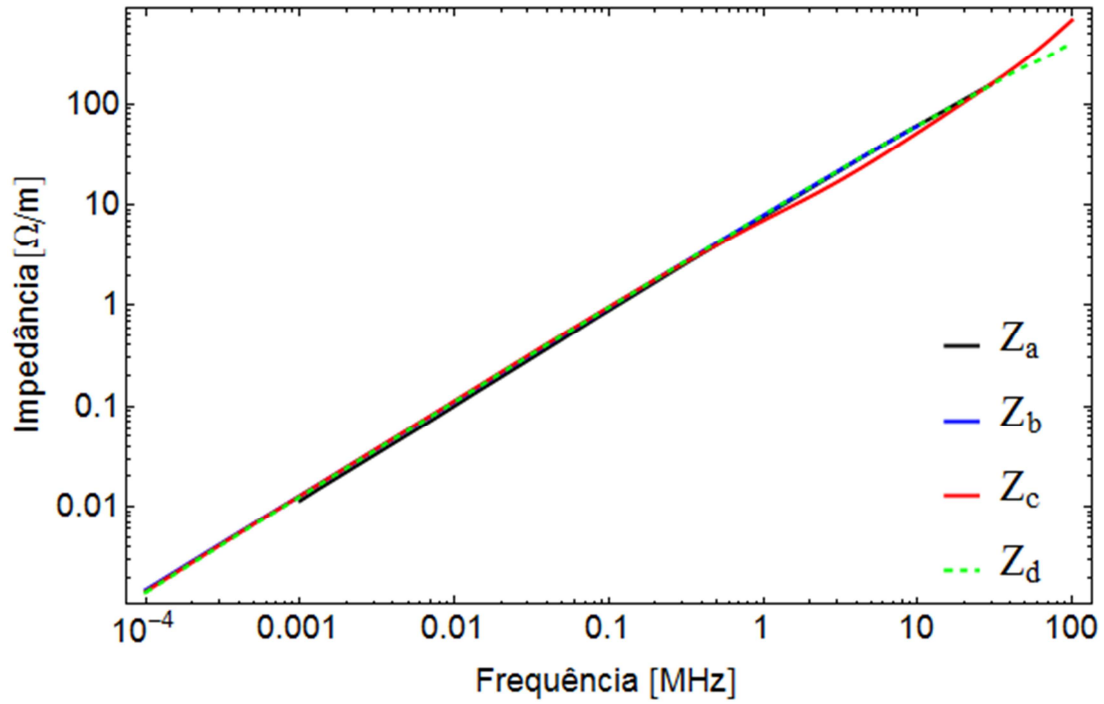


Figura 25: Impedância p.u.l. (Condutor isolado). Z_a - Petrache et al [36], Z_b - Papadopoulos et al [27], Z_c - Onda completa e Z_d - Aproximação quase-TEM

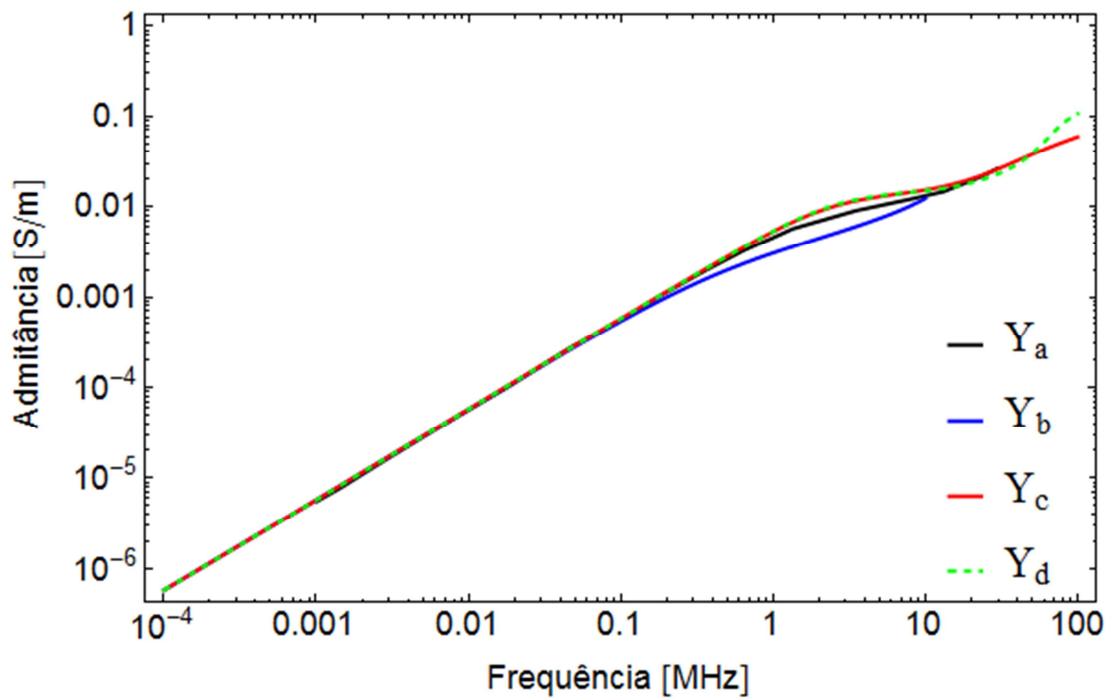


Figura 26: Admitância p.u.l. (Condutor isolado). Y_a - Petrache et al [36], Y_b - Papadopoulos et al [27], Y_c - Onda completa e Y_d - Aproximação quase-TEM

Podem-se observar que os resultados para o condutor enterrado isolado são mais próximos e praticamente coincidentes. Porém, a admitância calculada pela formulação de Papadopoulos et al em [27] apresenta um desvio entre 100KHz e 20Mhz. Este desvio também se deve pela não consideração da componente magnética do vetor de Hertz. Este desvio demonstra a imprecisão do modelo apresentado na citada referência, justamente na faixa de frequência de grande relevância para estudos de transitórios eletromagnéticos.

Para verificar a acurácia das aproximações desenvolvidas, no domínio da frequência, uma comparação da impedância (Fig. 29) e admitância (Fig. 30) calculadas pelo modelo de onda completa e pela aproximação quase-TEM é apresentada. Neste caso, a legenda (FW) representa os resultados do modelo de onda completa e o legenda (QT) representa os resultados obtidos pela aproximação quase-TEM. No entanto, para os resultados, consideraram-se diferentes modelos de solo. O primeiro refere-se ao solo convencional com corrente de deslocamento (índice C). O segundo refere-se ao modelo de solo com parâmetros variáveis com a frequência (índice P), proposto por Portela em [45] e o terceiro, refere-se ao modelo de solo com parâmetros variáveis com frequência (índice V), proposto por Visacro e Alípio em [46]. Em [47] apresentam-se algumas comparações destes modelos de solo aplicados exclusivamente em sistemas de aterramento.

Os parâmetros do modelo em [45] são descritos pela seguinte constante de propagação

$$\gamma_s = \sqrt{j\omega\mu \left(\sigma_0 + \Delta_1 \left(\frac{(\omega/2\pi)}{10^6} \right)^{\alpha_i} \left(\cot \left[\frac{\pi}{2} \alpha_i \right] + j \right) \right)} \quad (95)$$

onde $\sigma_0 = 0.01 \text{ S/m}$, $\Delta_1 = 11.71 \text{ mS}$ e $\alpha_i = 0.706$. Para o modelo proposto em [46], a constante de propagação é dada por

$$\gamma_s = \sqrt{j\omega\mu (\sigma(\omega) + j\omega\epsilon_r(\omega)\epsilon_0)} \quad (96)$$

Onde $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular expressa em [rad/s], $\sigma_0 = 0.01 \text{ S/m}$ e

$$\sigma(\omega) = \sigma_0 \left(\frac{(\omega/2\pi)}{100} \right)^{0.072}$$

$$\epsilon_r(\omega) = 2.3410^6 \left(\frac{1}{\sigma_0} \right)^{-0.535} (\omega/2\pi)^{-0.597}$$

As Figs. 27 e 28 apresentam uma comparação, respectivamente, entre a constante de atenuação e a constante de fase de cada modelo de solo.

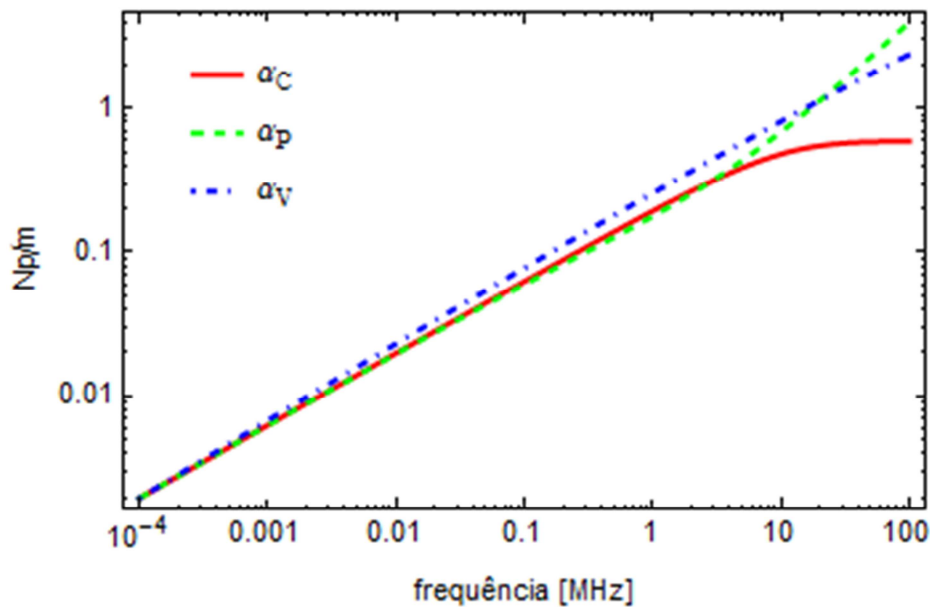


Figura 27: Comparação entre a constante de atenuação associada aos diferentes modelos de solo, sendo C- solo convencional, P- Modelo de solo de Portela e V- modelo de solo de Visacro. A expressão do solo convencional é dada por $\gamma_s = \sqrt{j\omega\mu(\sigma_s + j\omega\epsilon_{rs}\epsilon_o)}$, com $\sigma_s = 0.01S/m$ e $\epsilon_{rs} = 10$.

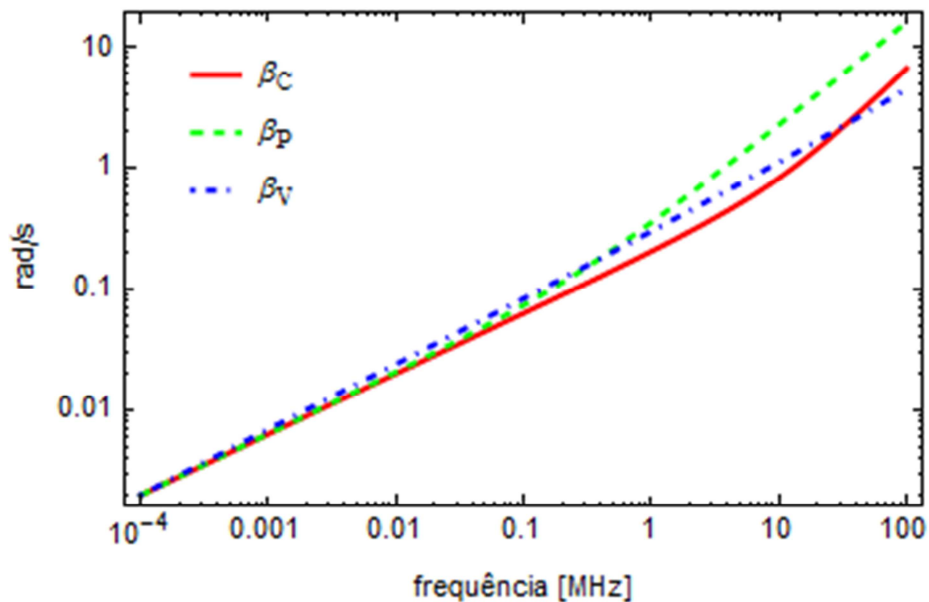


Figura 28: Comparação entre a constante de fase associada aos diferentes modelos de solo, sendo C- solo convencional, p- Modelo de solo de Portela e V- modelo de solo de Visacro.

O teste consiste em um cabo isolado de único núcleo com $\rho_c = 1.539 \times 10^{-8} \Omega m$, e raio $r_c = 0.01$ m. A camada isolante possui um raio de $r_{ins} = 0.012$ m e uma permissividade elétrica relativa de $\epsilon_r = 3$.

Embora cada modelo de solo apresente um comportamento característico, as Figs. 29 e 30 demonstram que os resultados obtidos pela aproximação quase-TEM são verdadeiramente muito próximos dos resultados obtidos pelo modelo de onda completa, que podem ser considerados como os resultados de gabarito. Isto demonstra a acurácia das aproximações quase-TEM desenvolvidas.

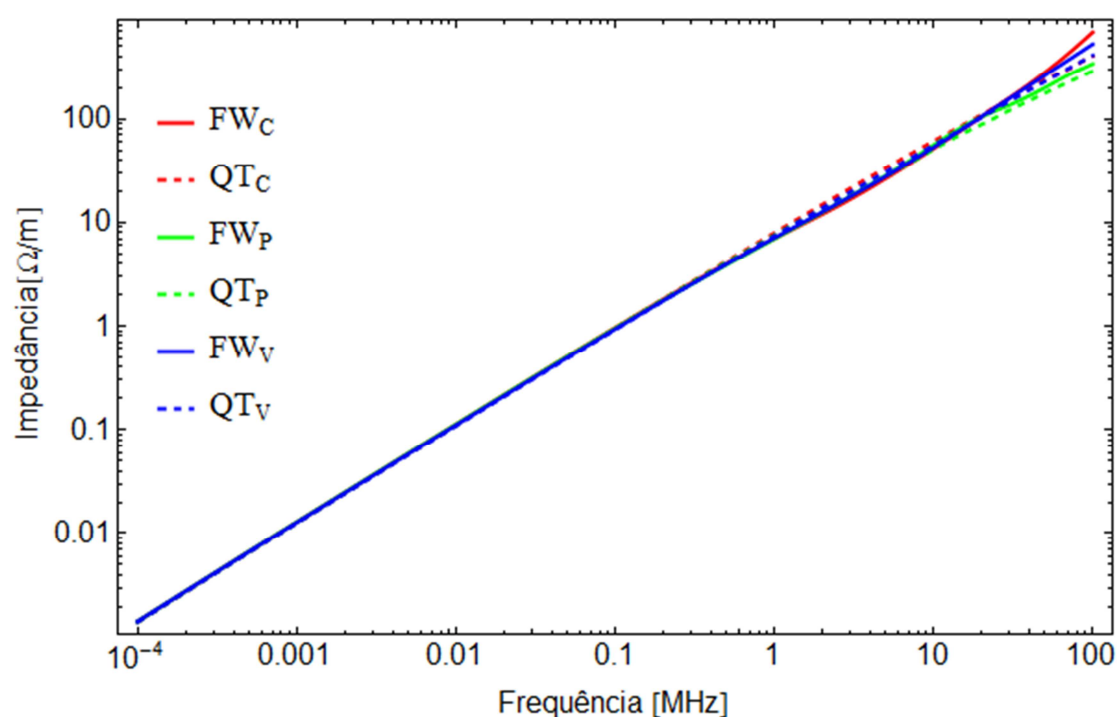


Figura 29: Comparação de impedância. FW-Onda completa e QT- Aproximação quase-TEM. C- Solo convencional, P-Modelo de solo de Portela e V- Modelo de solo de Visacro

As figuras Figs. 31 e 32 apresentam, respectivamente, o desvio entre os resultados do modelo de onda completa e aproximação quase-TEM. Estes desvios foram calculados por $D_z = Abs[Z_{QT} - Z_{FW}]$ para impedância e por $D_y = Abs[Y_{QT} - Y_{FW}]$ para admitância.

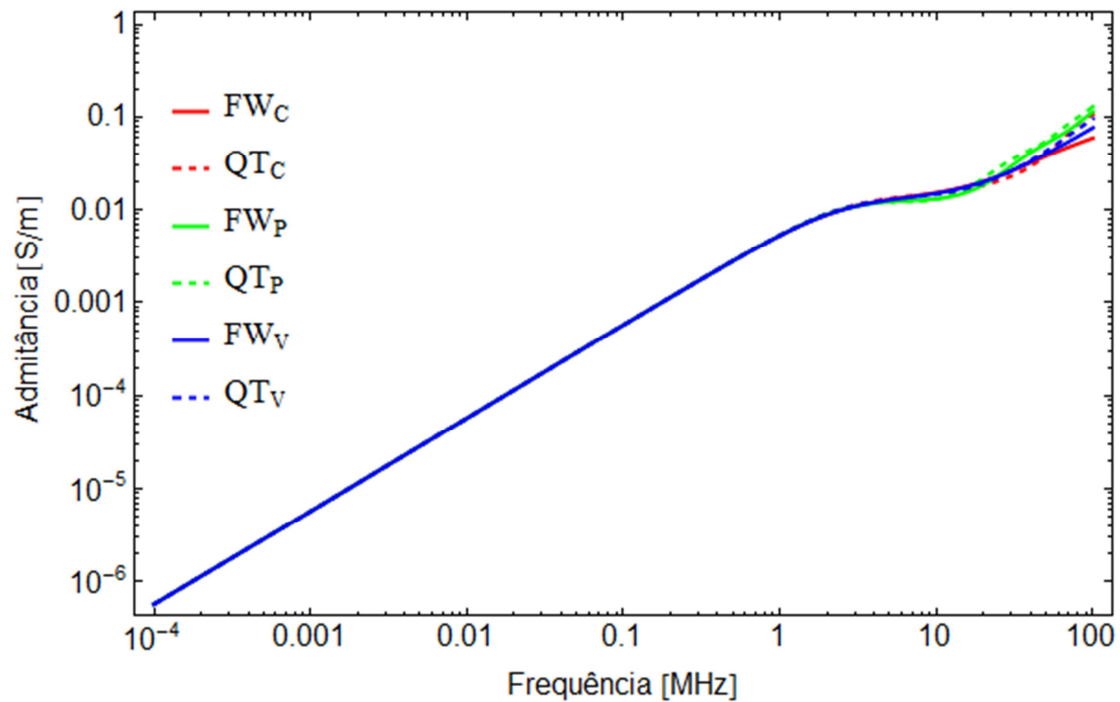


Figura 30: Comparação de admitância. FW-Onda completa e QT- Aproximação quase-TEM. C- Solo convencional, P-Modelo de solo de Portela e V- Modelo de solo de Visacro

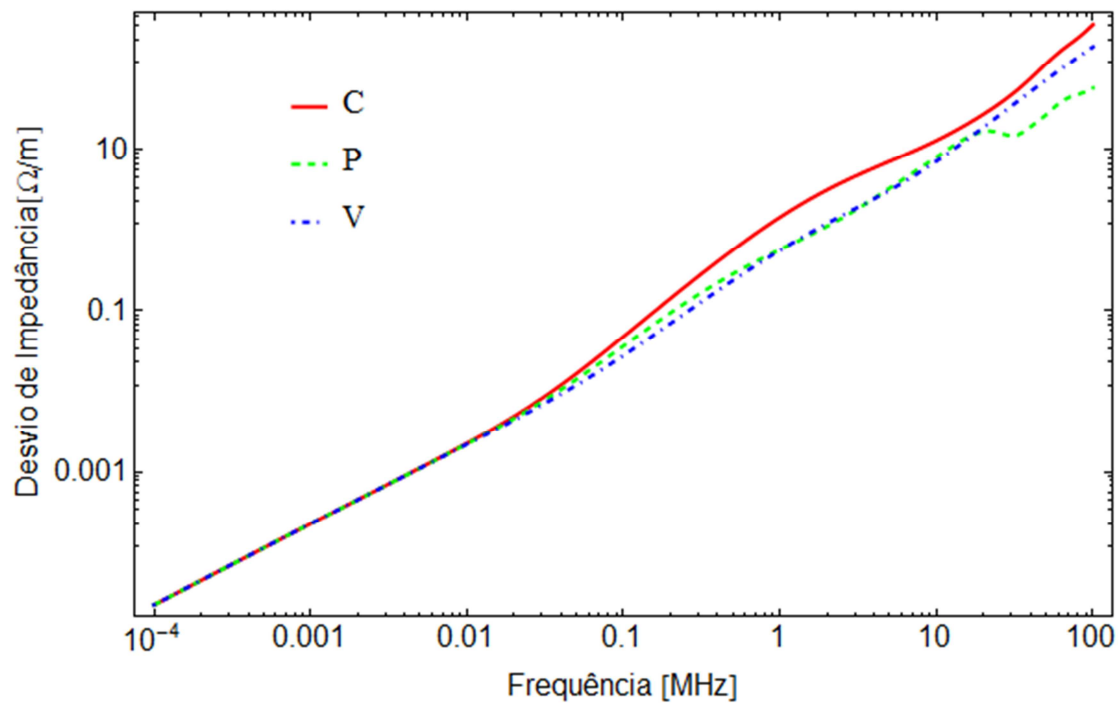


Figura 31: Desvio de impedância entre os modelos de Onda completa e aproximação quase-TEM. C- Solo convencional, P-Modelo de solo de Portela e V- Modelo de solo de Visacro

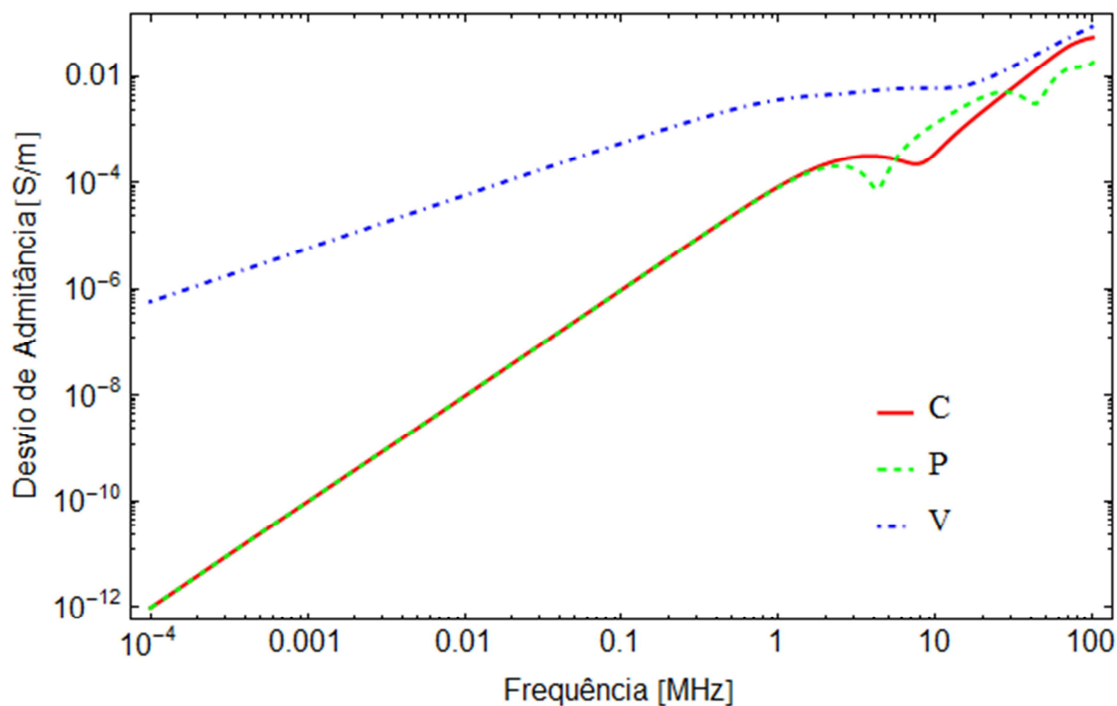


Figura 32: Desvio de admitância entre os modelos de Onda completa e aproximação quase-TEM. C- Solo convencional, P-Modelo de solo de Portela e V- Modelo de solo de Visacro.

Independentemente do modelo utilizado, o desvio entre os resultados da aproximação quase-TEM e os resultados do modelo de onda completa são muito pequenos, e não chegam a representar uma parcela significativa do valor absoluto de impedância ou admitância. Além disso, nenhuma dificuldade adicional para a solução das integrais de Sommerfeld foi observada ao se considerar os modelos de solo com parâmetros variáveis com a frequência.

4.2 Resposta temporal

O objetivo desta seção é apresentar uma avaliação do impacto das aproximações quase-TEM desenvolvidas. As principais suposições para o desenvolvimento destas aproximações foram consideradas no domínio da frequência. No entanto, para que estas aproximações se tornem aplicáveis, elas devem ser numericamente estáveis, também, no domínio do tempo.

4.2.1 Admitância Característica e Função de Propagação

Em [49], Gustavsen apresenta um procedimento para a validação e verificação da precisão de modelos de linhas de transmissão dependentes da frequência pela resposta no domínio do tempo.

No domínio da frequência o comportamento da linha de n fases é descrito pelas equações

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2} = \mathbf{ZYV} \quad (97)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{I}}{\partial z^2} = \mathbf{YZI} \quad (98)$$

que diferentemente do caso monofásico onde V , I , Z e Y são escalares, no caso multifásico \mathbf{V} é o vetor de tensões e \mathbf{I} o vetor de correntes nas fases e \mathbf{Z} e \mathbf{Y} as matrizes ($n \times n$) impedância e admitância, respectivamente. O importante a se observar é que \mathbf{Z} e \mathbf{Y} anticomutam, ou seja, $\mathbf{ZY} \neq \mathbf{YZ}$. Na realidade, $\mathbf{ZY} = (\mathbf{YZ})^T$.

Desta forma, pode-se definir a admitância característica, que relaciona as ondas de tensão e corrente, como:

$$\mathbf{Y}_c = \mathbf{Z}^{-1} \sqrt{\mathbf{ZY}} \quad (99)$$

e a característica de propagação, que descreve a distorção e o atraso entre estas ondas se propagando entre os terminais da linha de comprimento l :

$$\mathbf{H} = e^{-l\sqrt{\mathbf{ZY}}} \quad (100)$$

Pela admitância característica e pela característica de propagação obtém-se a matriz admitância nodal diretamente em coordenadas de fase

$$\mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (101)$$

para

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}_c \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{H}^2) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{H}^2)^{-1}$$

$$\mathbf{B} = -2\mathbf{Y}_c \cdot \mathbf{H} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{H}^2)^{-1}$$

A solução do circuito resume-se na solução do seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y}_n^{-1} \mathbf{I} \quad (102)$$

Este procedimento permite a utilização de intervalos constantes de amostragem no domínio da frequência. Para a obtenção da solução no domínio do

tempo, para cada ponto amostrado em frequência, aplica-se a transformada numérica de Laplace, como descrito em [37] e [40].

4.2.2 Cabo Monofásico Enterrado Isolado

O sistema monofásico utilizado consiste em um condutor de raio $r_c = 0.01m$ isolado por uma camada isolante de raio $r_d = 0.012m$ enterrado a uma profundidade $h=1m$. O comprimento total do condutor é 300m. Diferentes tipos de solo foram considerados, sendo um solo convencional com corrente de deslocamento, o modelo de solo de Portela descrito pela expressão (95) e o modelo de solo de Visacro descrito pela expressão (96).

A simulação consistiu na energização do núcleo do condutor no terminal “1” como ilustra a Fig. 33. As formas de onda de excitação consideradas para a energização do circuito utilizaram-se o degrau de tensão unitário e a forma de onda impulsiva de Heidler referente ao impulso de tensão de uma descarga atmosférica devido à sua primeira descarga de retorno,

$$V = \frac{V_{\max}}{\eta} \left(1 + \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^n \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (103)$$

$$\eta = \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^n e^{-\frac{\tau_1}{\tau_2} \left(\frac{nt_2}{\tau_1} \right)^{1/n}}$$

com os seguintes parâmetros, $\tau_1 = 1.8\mu s$ para tempo de subida e $\tau_2 = 95\mu s$ para o tempo de decaimento, $H_{\max} = 1$ para tensão ou corrente de pico máxima (unitária) e $n=2$.

O sistema foi resolvido no domínio da frequência, usando a aproximação quase-TEM e o modelo de onda completa. Para transformação dos resultados para o domínio do tempo empregou-se a transformada numérica de Laplace.

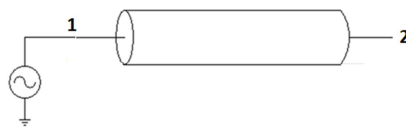


Figura 33: Esquema de energização do condutor.

Os resultados referentes à resposta ao degrau de tensão são mostrados na Fig. 34, enquanto que os resultados referentes à resposta ao impulso de Heidler são mostrados na Fig. 35.

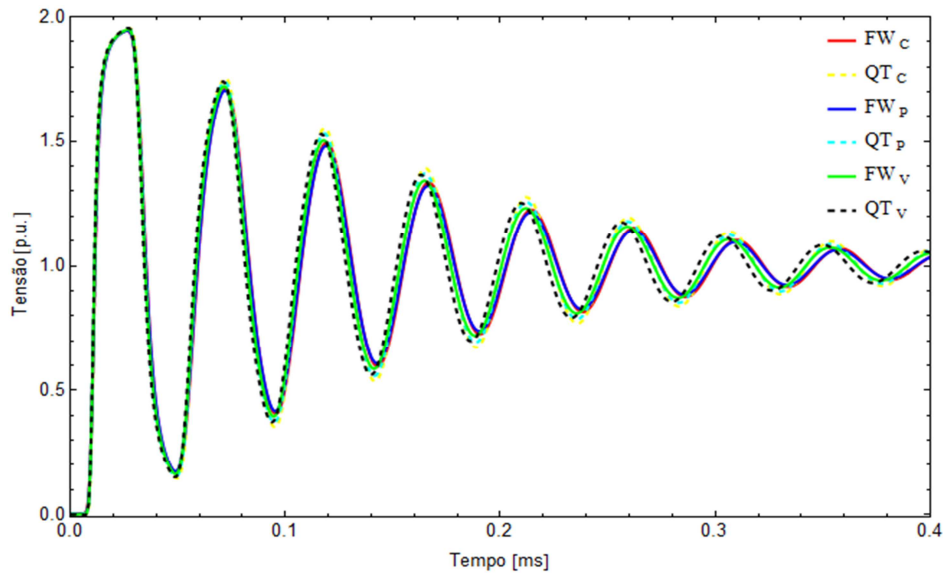


Figura 34: Resposta ao degrau unitário de tensão. Sistema monofásico isolado. FW-Onda completa e QT- Aproximação quase-TEM. C- Solo convencional, P-Modelo de solo de Portela e V- Modelo de solo de Visacro

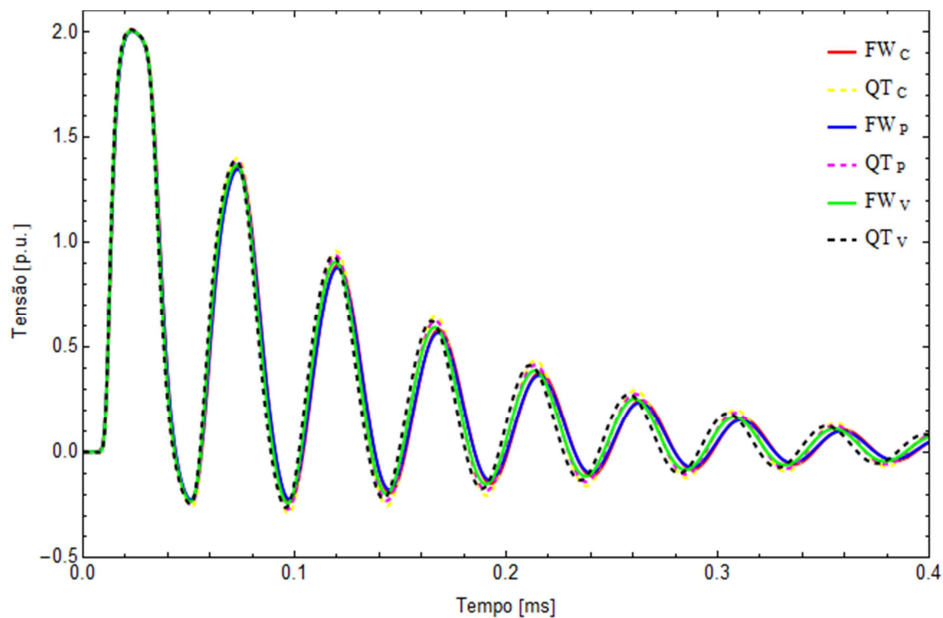


Figura 35: Resposta ao degrau unitário de tensão. Sistema monofásico isolado. FW-Onda completa e QT- Aproximação quase-TEM. C- Solo convencional, P-Modelo de solo de Portela e V- Modelo de solo de Visacro.

Pode-se observar que as pequenas diferenças entre as curvas são relativas aos diferentes modelos de solo. Entre as formulações não são observadas diferenças significativas. Isto sugere que para este caso, não há a necessidade explícita de se recorrer ao modelo de onda completa para obter uma resposta precisa no domínio do tempo.

4.2.3 Condutor Enterrado Isolado e Blindado – Cabo *Single Core* (SC)

O sistema em teste consiste em um cabo SC enterrado como ilustra a Fig. 36. O cabo está enterrado a uma profundidade de 1m e possui propriedades descritas na tabela 1. O comprimento total do circuito é de 300m.

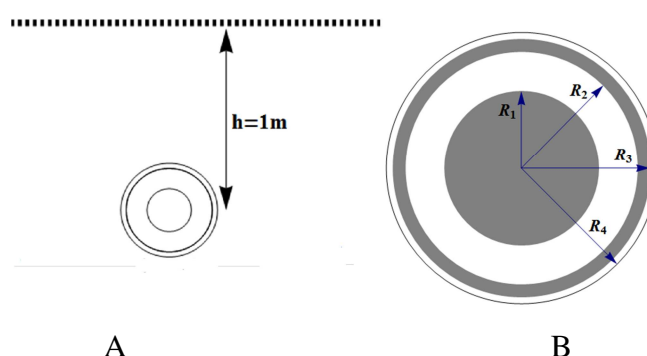


Figura 36: A-Geometria considerada para o cabo XLPE enterrado. B- Configuração e disposição das camadas condutoras e dielétricas do cabo.

Tabela 1: Parâmetros dos cabos.

$R_1[m]$	$R_2[m]$	$R_3[m]$	$R_4[m]$
1.950×10^{-2}	3.775×10^{-2}	3.797×10^{-2}	4.250×10^{-2}
$\rho_c [\Omega m]$ para $0 \rightarrow R_1$	ϵ_{cs} para $R_1 \rightarrow R_2$	$\rho_s [\Omega m]$ para $R_2 \rightarrow R_3$	ϵ_{sg} para $R_3 \rightarrow R_4$
3.365×10^{-8}	2.85	1.718×10^{-8}	2.51

No sistema apresentado, são admissíveis diferentes formas de energização do circuito, sendo que cada forma é responsável pela excitação de determinados modos de propagação. A energização do núcleo com a blindagem aterrada permite a excitação do modo coaxial, sendo que este modo não permite a visualização dos efeitos do solo sobre a característica de propagação. Por outro lado, se a blindagem estiver aberta, uma parcela da corrente retorna pelo solo, permitindo-se desta forma, uma excitação do modo terra e a visualização da influencia do solo na resposta no domínio do tempo.

Para este tipo de cabo, ainda não há uma extensão do modelo de onda completa. Desta forma, os resultados que serão apresentados referem-se a aplicação das aproximações quase-TEM propostas.

4.2.4 Energização do núcleo

O teste de energização do núcleo Fig. 37 do primeiro condutor (terminal 1) consistiu na energização do núcleo em $t=0s$, com o impulso de tensão de Heidler. Os demais terminais encontraram-se abertos. O tempo total de simulação foi de $200\mu s$.

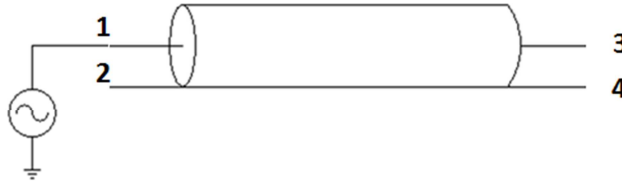


Figura 37: Esquema de energização do núcleo do cabo.

Nas simulações, consideraram-se quatro diferentes modelos de solo. O primeiro trata-se do modelo de solo convencional onde se desconsidera a corrente de deslocamento, neste caso, a constante de propagação do solo é dada por $\gamma_s = \sqrt{j\omega\mu\sigma_s}$. O segundo é o modelo de solo convencional onde se considera a corrente de deslocamento, $\gamma_s = \sqrt{j\omega\mu(\sigma_s + j\omega\epsilon_{rs}\epsilon_o)}$. O terceiro é o modelo de solo de Portela descrito em [45] e representado pela equação (95). O quarto é o modelo de solo de Visacro descrito em [46] e representado pela equação (96).

As Figs. 38, 39, 40 e 41, apresentam, respectivamente, o resultados obtido das tensões nos terminais “1”, “2”, “3” e “4”. A forma de onda de excitação utilizada foi a forma de onda de Heidler descrita na expressão (103). Esta forma de onda foi escolhida por possuir um espectro de frequências associado mais rico em harmônicas, permitindo a excitação de frequências mais elevadas.

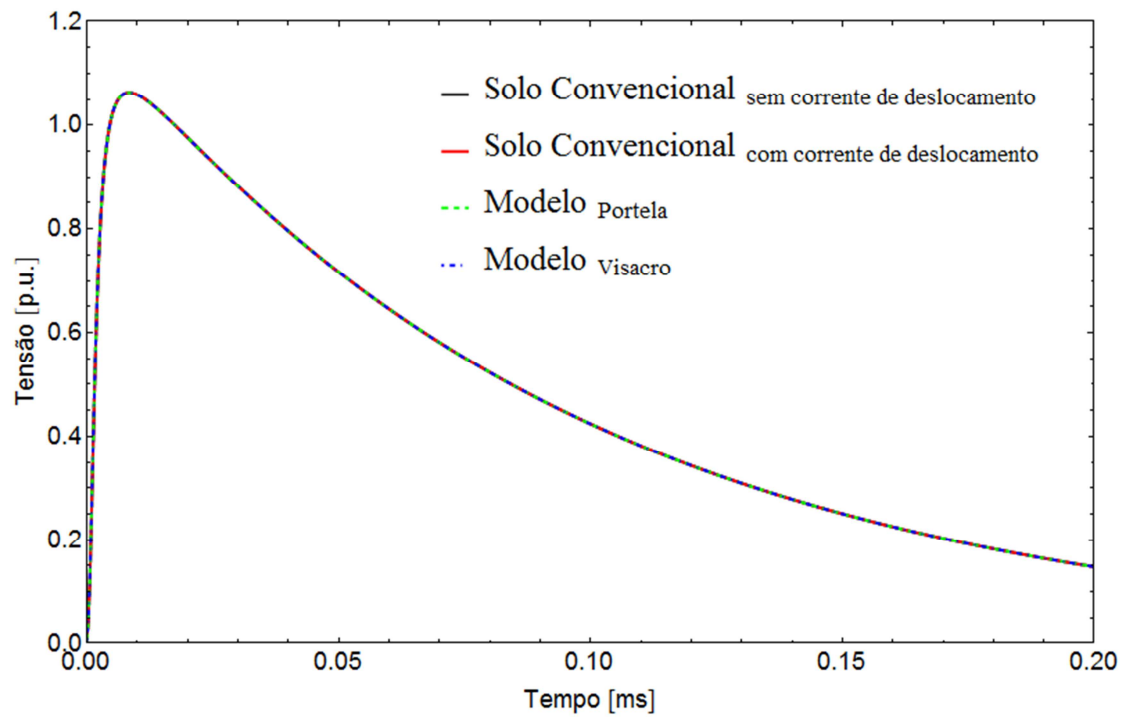


Figura 38: Tensão no terminal "1".

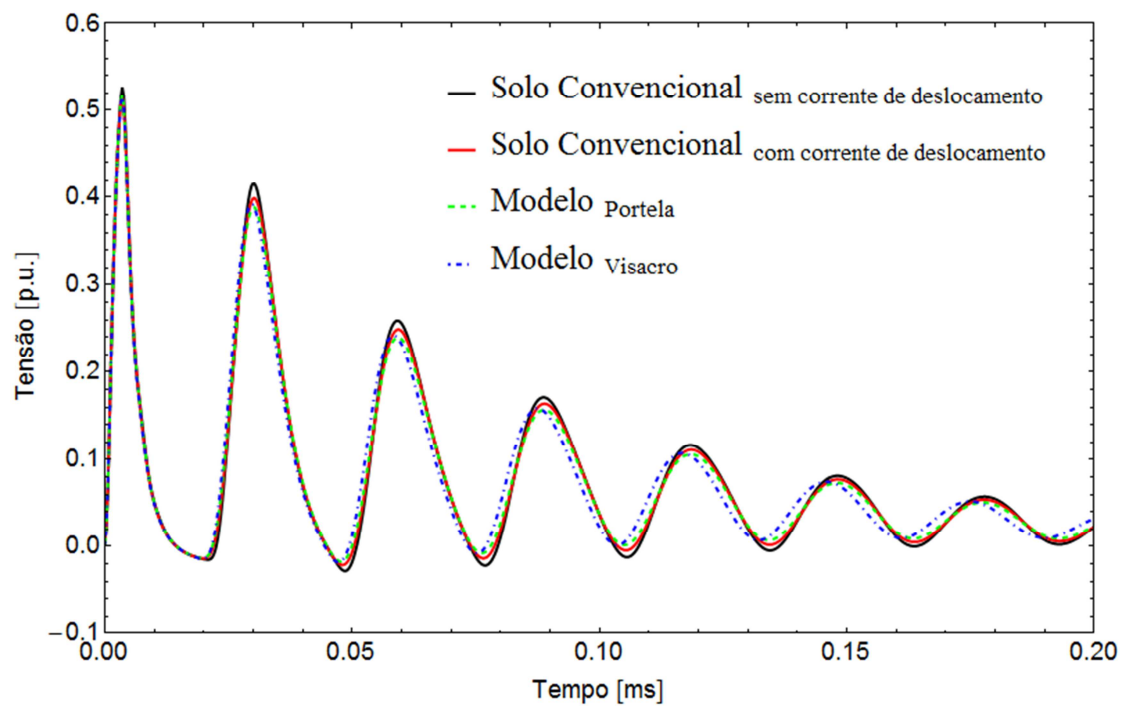


Figura 39: Tensão no terminal "2".

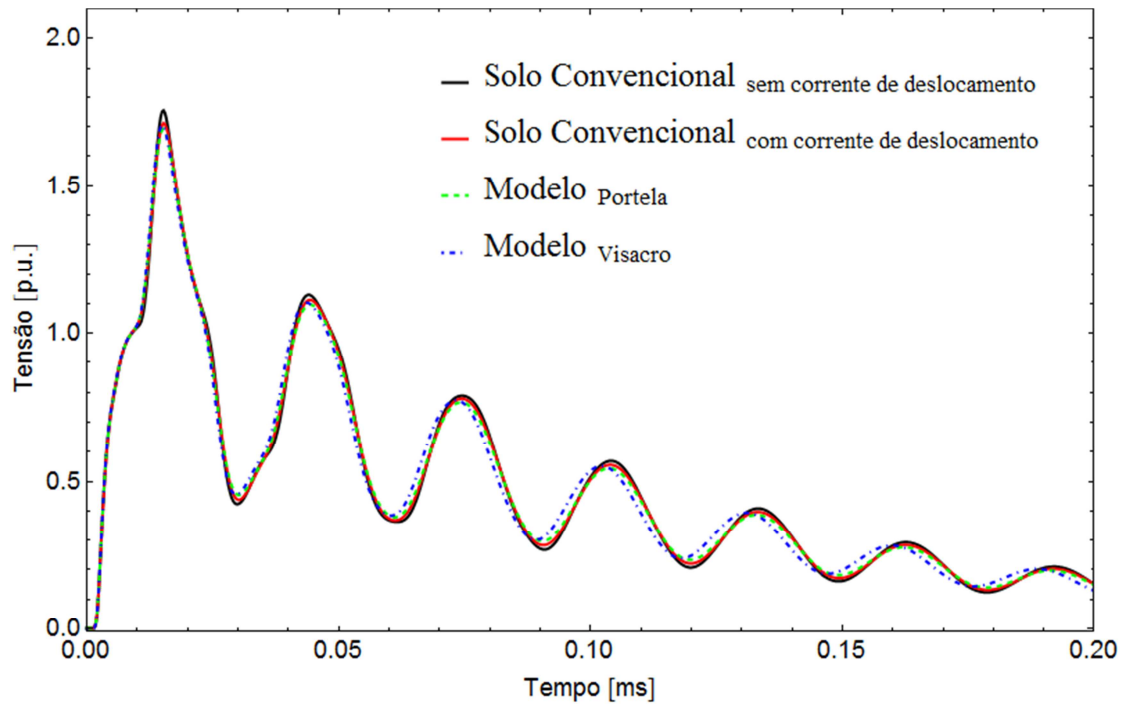


Figura 40: Tensão no terminal "3".

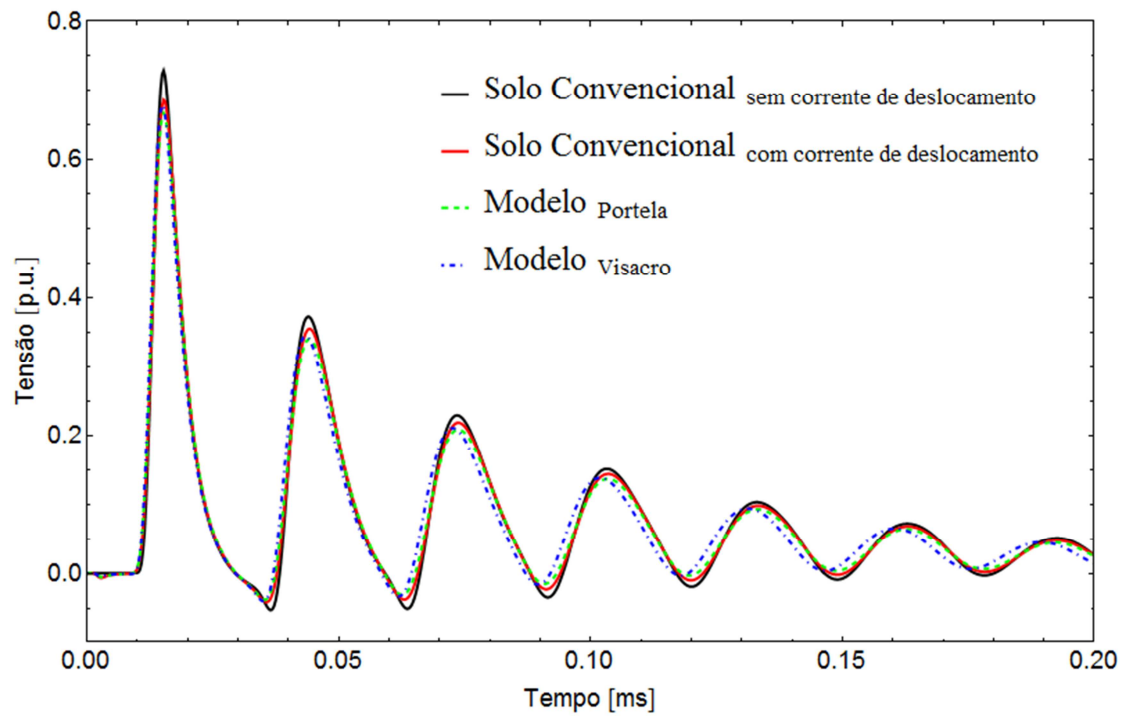


Figura 41: Tensão no terminal "4".

4.2.5 Energização da Blindagem

Um dos aspectos importantes para análise transitória é a energização da blindagem do condutor. A camada isolante entre o núcleo e a blindagem provoca um efeito predominantemente capacitivo. Este efeito pode provocar severas elevações de tensão nos terminais do cabo, sendo que se intensifica com a elevação da frequência, como em casos do uso de inversores baseados em algoritmos PWM (Pulse-Width Modulation) em acionamento de motores [50][51][52]. No entanto há circunstância onde a máxima sobretensão ocorre ao longo do cabo [53], como, por exemplo, em incidência de descargas atmosféricas, onde pode ocorrer descargas entre o núcleo e a blindagem danificando a camada isolante e inutilizando o cabo. Desta forma, a análise de energização da blindagem torna-se um aspecto de extrema relevância.

O teste de energização da blindagem do cabo Fig. 42 (terminal “2”) consistiu na energização da blindagem em $t=0s$ com o impulso de tensão de Heidler. Os demais terminais encontraram-se abertos. O tempo total de simulação foi de $200\mu s$.

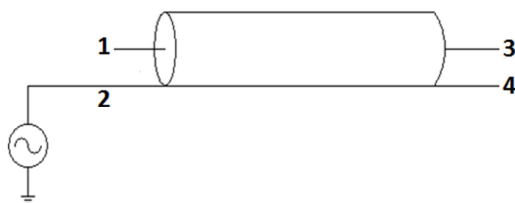


Figura 42: Energização da blindagem.

Pode-se observar que a tensão refletida no núcleo do condutor é da mesma ordem de grandeza da tensão injetada na blindagem. Isto se deve pela proximidade numérica entre os elementos que compõem a matriz admitância nodal do sistema. No entanto, os desvios entre as respostas dos diferentes tipos de solo são mais significativos para os modelos com parâmetros variáveis com a frequência. Estes desvios estão diretamente relacionados com a consideração da corrente de deslocamento no solo e seus efeitos sobre a admitância transversal. A Fig. 43 apresenta as tensões obtidas no terminal “1” e a Fig. 44 apresenta as tensões no terminal “2”.

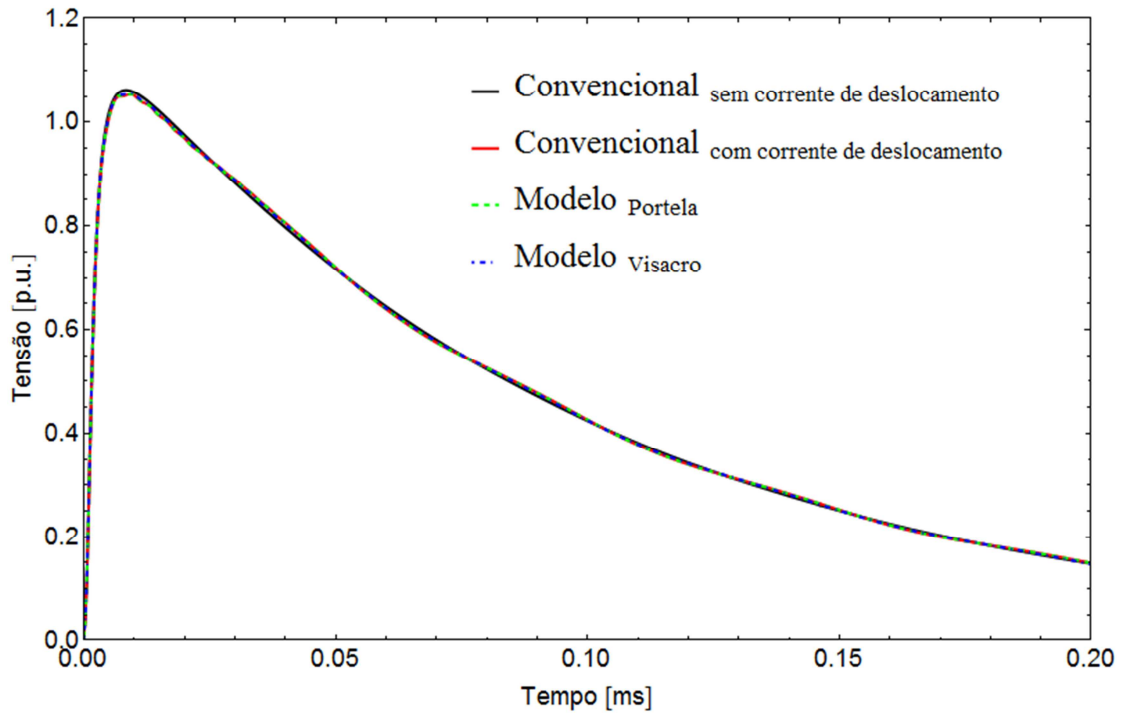


Figura 43: Tensão no terminal "1".

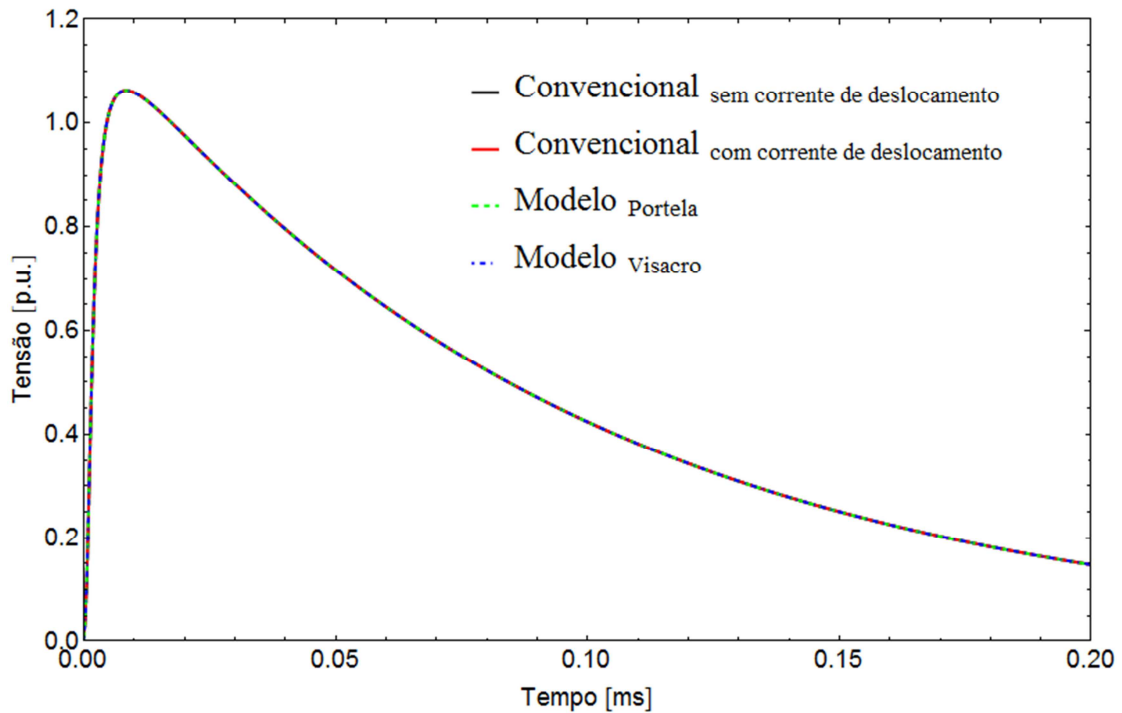


Figura 44: Tensão no terminal "2".

Estes resultados indicam que a característica de propagação das ondas de corrente e tensão, de fato, é influenciada pelas características do solo. A dependência dos parâmetros do solo está contida somente nos termos de impedância e admitância externa, o que representa somente uma parcela da impedância e admitância total do cabo. Porém, os efeitos associados a esta parcela são significativos.

A Fig. 45 apresenta as tensões no terminal “3” e a Fig. 46 as tensões no terminal “4”.

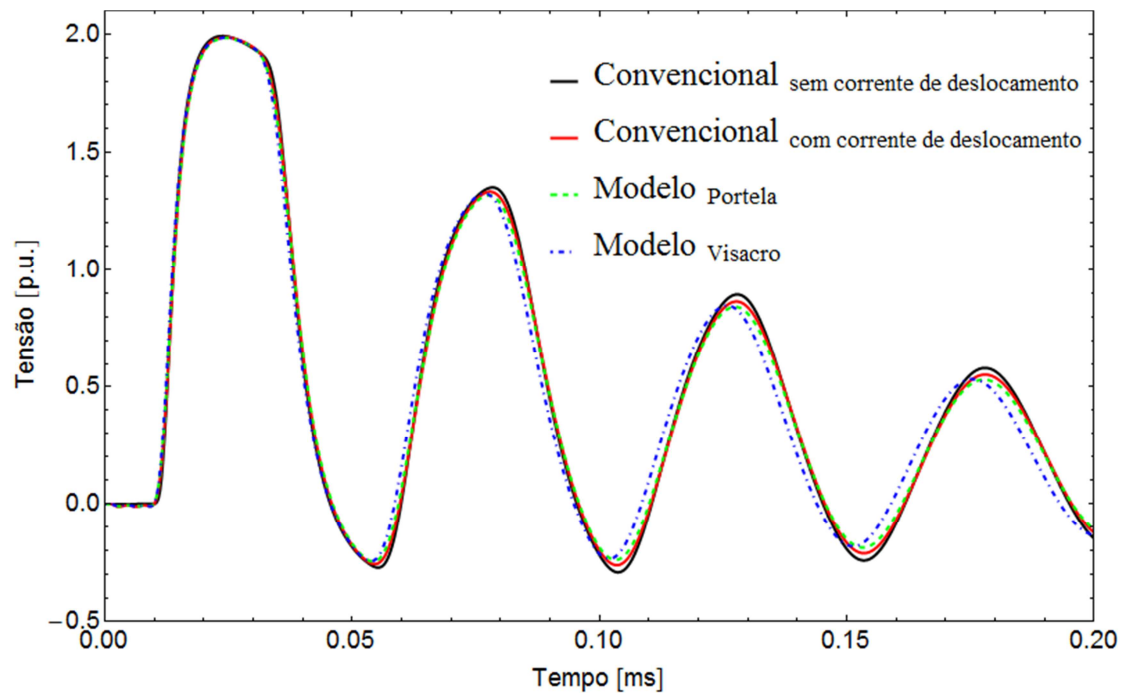


Figura 45: Tensão no terminal "3".

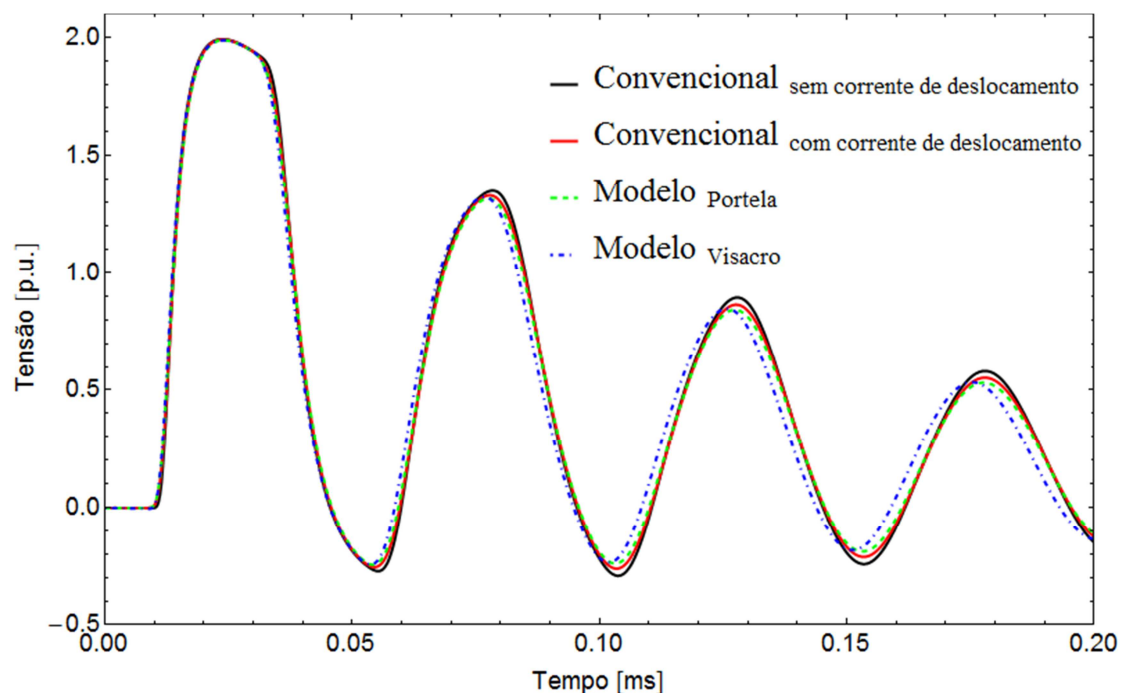


Figura 46: Tensão no terminal "4".

As simulações foram realizadas utilizando as expressões de impedância e admitância propostas pelo modelo de aproximação quase-TEM. Estes resultados demonstram a capacidade e precisão das aproximações desenvolvidas em representar a influência de meios externos aos condutores.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

5.1 Principais Conclusões

Os resultados apresentados na presente dissertação mostram que, de fato, independentemente da formulação matemática utilizada para se estabelecer a equação modal do modelo de onda completa, a solução numérica destas distintas formulações resultam em uma mesma constante de propagação, embora a formulação proposta por Wedepohl seja mais sensível ao chute inicial dado no procedimento de determinação das raízes da equação modal. Para se contornar este problema, realizou-se neste trabalho uma proposta de reformulação do modelo de Wedepohl incluindo também uma extensão desta formulação para o caso de condutor isolado. Esta proposta estava embasada na hipótese de se reorganizar a equação modal de forma a facilitar sua solução. No entanto, não se observou este fato, sendo que ficou mais difícil a determinação de um chute inicial consistente. Esta dificuldade foi a responsável por alguns desvios na constante de propagação calculada pela reformulação proposta.

Pelos resultados do modelo de onda completa pode-se observar que o comportamento da resposta em frequência da constante de propagação do condutor enterrado nu e a constante de propagação do condutor enterrado isolado são distintas em intervalos de baixas e médias frequências. Conseqüentemente, para este intervalo faz-se necessário o desenvolvimento de aproximações quase-TEM específicas para cada caso, ou seja, uma para o condutor nu e outra para o condutor isolado, sendo que o limite de validade das aproximações é o intervalo de frequência para a qual elas foram estabelecidas. No entanto, conforme foi demonstrado, para frequências acima do limite de validade das aproximações, não há a necessidade de se recorrer ao modelo de onda completa, pois uma nova aproximação quase-TEM é possível. Neste caso, pode-se notar que a constante de propagação do condutor isolado coincide com a constante de propagação do condutor nu. Desta forma a aproximação quase-TEM para o condutor isolado é a mesma para o condutor nu.

Assim, pode-se concluir que, dentro dos limites de precisão esperados, as aproximações quase-TEM propostas representam coerentemente a influência de arbitrários meios externos aos condutores tão bem quanto os modelos de onda completa os podem representar. Este fato exprime o sucesso da metodologia empregada ao desenvolvimento das aproximações quase-TEM. Além disso, as aproximações são relativamente fáceis de implementar computacionalmente e possuem extensão à sistemas trifásicos.

5.2 Propostas de Trabalhos Futuros

Ao final desta pesquisa percebeu-se que alguns aspectos relevantes ainda precisam de estudos mais detalhados e específicos. Dentre eles podem-se citar:

- Embora as aproximações quase-TEM propostas facilitem o cálculo dos parâmetros impedância e admitância, as integrais infinitas ainda têm que ser resolvidas numericamente. Desta forma, como propostas de aperfeiçoamento e continuação deste trabalho, propõe-se o desenvolvimento de expressões fechadas para as integrais infinitas, evitando-se que as integrais tenham que ser numericamente resolvidas.
- Como se pode ver, o modelo de onda completa ainda não possui uma extensão para o sistema trifásico. Desta forma, propõe-se como um possível trabalho futuro o desenvolvimento da extensão do modelo de onda completa para o caso trifásico, eliminando-se desta forma, a necessidade de utilização da matriz de decomposição modal para simulação de sistemas trifásicos.
- A reformulação do modelo de onda completa de Wedepohl ficou mais sensível ao chute inicial, e como se pode ver, para o condutor isolado ocorreram alguns desvios na resposta da constante de propagação. Assim, uma forma de se verificar esta reformulação com maior perícia seria inserir o efeito da camada isolante na formulação original e comparar com a reformulação. Além disso, esta reformulação não foi validada para o caso de linha aérea. Estes aspectos sobre a reformulação podem ser estudados em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CARSON, J., “Wave propagation in overhead wires with a ground return,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 5, pp. 539–554, Oct. 1926
- [2] CARSON, J., “Ground Return Impedance: Underground Wire with Earth Return,” *Bell System Tech. J.*, vol. 8, no. 1, pp.94-98, 1929.
- [3] POLLACZECK, F., “Über das Feld einer unendlich langen wechselstrom durchflossenen Einfachleitung,” *Elektrische Nachrichten Technik*, vol. 3, pp.339-360, 1926
- [4] WEDEPOHL, L.; WILCOX, D., “Transient analysis of underground power-transmission system - System model and wave propagation characteristics,” *Proc. of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 120, no. 2, pp. 253-260, 1973.
- [5] LIMA, A.; PORTELA, C., “Closed-form expressions for ground return impedances of overhead lines and underground cables,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 38, no. 1, pp. 20-26, 2012.
- [6] DERI, A.; TEVAN, G.; SEMLYEN, A.; CASTANHEIRA, A., “The complex ground return plane: A simplified model for homogeneous and multi-layer earth return,” *IEEE Trans. on PAS*, vol. 100, no. 8, pp. 3686-3693, Aug 1981.
- [7] SAAD, O.; GABA, G.; GIROUX, M., “A closed-form approximation for ground return impedance of underground cables,” *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 11, no. 3, pp. 1536-1545, Jul 1996.
- [8] SEMLYEN, A., "Accuracy limits in the computed transients on overhead lines due to inaccurate ground return modeling," *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 17, no. 3, pp. 872—878, Jul. 2002.
- [9] WISE, W. H., “Potential coefficients for ground return circuits,” *Bell System Tech. J.*, vol. 27, pp. 365-371, 1948.
- [10] PETTERSSON, P., “Propagation of waves on a wire above a lossy ground-different formulations with approximations,” *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 14, no. 3, pp. 1173-1180, 1999.
- [11] KIKUCHI, H., “Wave propagation along an infinite wire above ground at high frequencies,” *Eletrotech. J.*, Japan, 1956, 2, 73-78

- [12] WAIT, J., "Theory of wave propagation along a thin wire parallel to an interface," *Radio Sci.*, vol. 7, pp. 675-679, June 1972.
- [13] WEDEPOHL, L.; EFTHYMIADIS, A., "Wave propagation in transmission lines over lossy ground: a new, complete field solution," *Proc. Inst. Electrical Engineers*, vol. 125, no. 6, pp. 505-510, June 1978.
- [14] PETTERSSON, P., "Image representation of wave propagation on wires above, on and underground," *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 9, no. 2, pp. 1049-1055, Apr 1994.
- [15] D'AMORE, M.; SARTO, M., "Simulation models of a dissipative transmission line above a lossy ground for a wide-frequency range. I: single conductor configuration," *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, vol. 38, no. 2, pp. 127-138, 1996.
- [16] D'AMORE, M.; SARTO, M., "Simulation models of a dissipative transmission line above a lossy ground for a wide-frequency range. II. Multiconductor configuration," *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, vol. 38, no. 2, pp. 139-149, May 1996.
- [17] D'AMORE, M.; SARTO, M., "A new formulation of lossy ground return parameters for transient analysis of multiconductor dissipative lines," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 12, no. 1, pp. 303-314, Jan 1997.
- [18] CUI, T. J.; WENG, C.; ZHAO, J.; CHAO, H., "Full-wave analysis of complicated transmission-line circuits using wire models," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 50, no. 10, pp.1350-1360, Oct 2002
- [19] CHIARIELLO, A.; MAFFUCCI, A.; MIANO, G.; VILLONE, F.; ZAMBONI, W., "A Transmission-Line Model for Full-Wave Analysis of Mixed-Mode Propagation," *IEEE Trans. on Advanced Packaging*, vol. 31, no. 2, pp. 275-284, May 2008
- [20] OLYSLAGER, F.; DE ZUTTER, D., "High-frequency transmission line models for a thin wire above a conducting ground," *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, vol. 37, no. 2, pp. 234-240, May 1995
- [21] SHESHYEKANI, K.; AKBARI, M., "Evaluation of Lightning-Induced Voltages on Multiconductor Overhead Lines Located Above A Lossy Dispersive Ground," *IEEE Trans Power Delivery*, vol. 29, no. 2, pp. 683-690, April 2014

- [22] THEETHAYI, N.; THOTTAPPILLIL, R.; PAOLONE, M.; NUCCI, C. A.; RACHID, F., “External impedance and admittance of buried horizontal wires for transient studies using transmission line analysis,” *IEEE Trans. Dielectrics and Electrical Insulation*, vol. 14, no. 3, pp. 751–761, Jun. 2007.
- [23] BRIDGES, G., “Transient plane wave coupling to bare and insulated cables buried in a lossy half-space,” *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, vol. 37, no. 1, pp. 62-70, Feb 1995.
- [24] AMETANI, A.; YONEDA, T.; BABA, Y.; NAGAOKA, N.; “An Investigation of Earth-Return Impedance Between Overhead and Underground Conductors and Its Approximation,” *IEEE Trans. On Electromagnetic Compatibility*. Vol. 51, no. 3, pp. 860-867, August 2009.
- [25] URIBE, F. A.; “Calculating Mutual Ground Impedances Between Overhead and Buried Cables,” *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, vol. 50, no. 1, pp. 198–203, February. 2008.
- [26] SUNDE, E., *Earth Conduction effects in transmission systems*, 2nd ed, New York: Dover, 1968.
- [27] PAPADODPOULOS, T.; TSIAMITROS, D.; PAPAGIANIS, G., “Impedances and Admittances of Underground Cables for the Homogeneous Earth Case,” *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 25, no. 2, pp. 961-969, April 2010.
- [28] ROCHA, P. E. D., “Modelagem de Cabos Subterrâneos e Submarinos para Estudos de Transitórios”, Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Elétrica PEE/COPPE/UFRJ, Março 2007
- [29] ROCHA, P. E. D., “Redução da Instabilidade Numérica em Modelos de Linhas de Transmissão”, Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Elétrica, PEE/COPPE/UFRJ, Junho 2013
- [30] TOMASEVICH, M. M. Y.; “Modelos de Linhas de Transmissão Usando Representação Racional da Matriz de Admitância Nodal e Decomposição Idempotente”, Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Elétrica, PEE/COPPE/UFRJ, Novembro de 2011.
- [31] WAIT, J., “Excitation of currents on a buried insulated cable,” *Journal of Applied Physics*, vol. 49, pp 876-880, 1978;
- [32] Lima, A. C. S., “Campos e Ondas em Engenharia Elétrica – Notas de Aula,” http://www.dee.ufrj.br/~acsl/coppe/condas/c_ondas.pdf
- [33] STRATTON, J. A., “Electromagnetic Theory,” McGraw-Hill, London, 1941.

- [34] RAMO, S.; WHINNERY, J. R.; DUZER, T., "Fields and Waves in Communication Electronics," John Wiley & Sons, USA, 1993.
- [35] THEETHAYI, N.; BABA, Y.; RACHID, F.; THOTTAPPILLIL, R., "On the choice between transmission line equations and full-wave Maxwell's equations for transient analysis of buried wires," *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, vol. 50, no. 2, pp. 347–357, May 2008.
- [36] PETRACHE, E.; RACHID, F.; PAOLONE, M.; NUCCI, C.; RAKOV, V.; UMAN, M., "Lightning induced disturbances in buried cables-Part I: Theory," *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, vol. 47, no. 3, pp. 498–508, Aug. 2005.
- [37] WEDEPOHL, L.; MOHAMAD, S. E. T. Mohamed, "Multiconductor transmission lines. theory of natural modes and Fourier integral applied to transient analysis," *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 116, no. 9, pp. 1553–1563, 1969.
- [38] MARTINS, T.; LIMA, A.; CARNEIRO, S. Jr., "Effect of approximate impedance formulae on the accuracy of transmission line modelling," *IET Generation, Transmission & Distribution*, vol. 1, no. 4, pp. 534-539, July 2007.
- [39] LIMA, A.; PORTELA, C., "Inclusion of Frequency-Dependent Soil Parameters in Transmission-Line Modeling," *IEEE Trans. on Power Delivery*, 2007, vol. 22, pp. 481-491
- [40] GOMEZ, P.; URIBE, F. A., "The numerical Laplace transform: An accurate technique for analyzing electromagnetic transients on power system devices," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 31, no. 2-3, pp. 116–123, 2009
- [41] HARRINGTON, R., "Time-harmonic electromagnetic fields," IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory, Wiley, 2001.
- [42] BRIDGES, G., "Fields generated by bare and insulated cables buried in a lossy half-space," *IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing*, vol. 30, no. 1, pp. 140-146, 1992.
- [43] WEDEPOHL, L.; WILCOX, D., "Transient analysis of underground power-transmission systems. System-model and wave-propagation characteristics," *Proc. of the Inst. Electrical Engineers*, vol. 120, no. 2, pp. 253-260, Feb. 1973

- [44] AMETANI, A., "A General Formulation of Impedance and Admittance of Cables," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-99, no. 3, pp. 902-910, May 1980
- [45] PORTELA, C. M., "Measurement and modeling of soil electromagnetic behavior," in *Proc. IEEE Int. Symp. Electromagn. Compat.*, 1999, vol. 2, pp. 1004–1009.
- [46] VISACRO, S.; ALIPIO, R., "Frequency dependence of soil parameters: Experimental results, predicting formula and influence on the lightning response of grounding electrodes," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 27, no. 2, pp. 927–935, Apr. 2012.
- [47] CAVKA, D.; MORA, N.; RACHID, F., "A Comparison of Frequency-Dependent Soil Models: Application to the Analysis of Grounding Systems," *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, vol. 56, n. 1, pp. 177-187, 2014.
- [48] DEGAUQUE, P.; COURBET, G.; HEDDEBAUT, M.; "Propagation Along a Line Parallel to the Ground Surface: Comparison Between the Exact Solution and the Quasi-TEM Approximation," *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, vol. EMC-25, no. 4, pp. 422–427, November 1983.
- [49] GUSTAVSEN, B., "Validation of Frequency-Dependent Transmission Line Models," *IEEE Trans. On Power Del.*, vol.20, no. 2, pp. 925-933, Apr. 2005.
- [50] KUSCHKE, M.; STRUNZ, K.; "Transient Cable Overvoltage Calculation and Filter Design: Application to Onshore Converter Station for Hydrokinetic Energy Harvesting" *IEEE Trans. On Power Del.*, vol.28, no. 3, pp. 1322-1329, Maio. 2013.
- [51] MOREIRA, A. F.; LIPO, T. A.; VENKATARAMANAN, G.; BERNET, S.; "High-Frequency Modeling for Cable and Induction Motor Overvoltage Studies in Long Cable Drives" *IEEE Trans. On Industry Applications.*, vol.38, no. 5, pp. 1297-1306, Sep/Oct. 2002.
- [52] STEINBRICH, K. "Influence Of Semiconducting Layers on the Attenuation Behavior of Single-Core Power Cables," *IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, vol. 152, no. 2, pp. 271-276, March 2005.
- [53] HENRIKSEN, T.; GUSTAVSEN, B.; BALOG, G.; BAUR, U.; "Maximum Lightning Overvoltage Along a Cable Protected by Surge Arresters," *IEEE Trans. On Power Del.*, vol.20, no. 2, pp. 859-866, Apr. 2005.

ANEXO A

RELAÇÃO ENTRE OS CAMPOS

As componentes dos campos do modo TM acima do solo são

$$\begin{aligned}\bar{E}_{x1} &= -j\omega \frac{\gamma}{\gamma_i^2} \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x} \\ \bar{E}_{y1} &= -j\omega \frac{\gamma}{\gamma_i^2} \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y} \\ \bar{E}_{z1} &= -j\omega \frac{\lambda_i^2}{\gamma_i^2} \bar{A}_1\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}\bar{H}_{x1} &= \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y} \\ \bar{H}_{y1} &= -\frac{1}{\mu_i} \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x} \\ \bar{H}_{z1} &= 0\end{aligned}\tag{A.2}$$

Modo TM abaixo do solo:

$$\begin{aligned}\bar{E}_{x2} &= -j\omega \frac{\gamma}{\gamma_i^2} \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial x} \\ \bar{E}_{y2} &= -j\omega \frac{\gamma}{\gamma_i^2} \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial y} \\ \bar{E}_{z2} &= -j\omega \frac{\lambda_i^2}{\gamma_i^2} \bar{A}_2\end{aligned}\tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}\bar{H}_{x2} &= \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial y} \\ \bar{H}_{y2} &= -\frac{1}{\mu_i} \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial x} \\ \bar{H}_{z2} &= 0\end{aligned}\tag{A.4}$$

Modo TE acima do solo:

$$\begin{aligned}\bar{E}_{x3} &= -\frac{1}{\varepsilon_i} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_3}{\partial x} \\ \bar{E}_{y3} &= \frac{1}{\varepsilon_i} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_3}{\partial y} \\ \bar{E}_{z3} &= 0\end{aligned}\tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}\bar{H}_{x3} &= \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_3}{\partial x} \\ \bar{H}_{y3} &= -\frac{1}{\mu_i} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_3}{\partial y} \\ \bar{H}_{z3} &= 0\end{aligned}\tag{A.6}$$

e modo TE abaixo do solo:

$$\begin{aligned}\bar{E}_{x4} &= -\frac{1}{\varepsilon_i} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_4}{\partial x} \\ \bar{E}_{y4} &= \frac{1}{\varepsilon_i} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_4}{\partial y} \\ \bar{E}_{z4} &= 0\end{aligned}\tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}\bar{H}_{x3} &= \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_3}{\partial x} \\ \bar{H}_{y3} &= -\frac{1}{\mu_i} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}_3}{\partial y} \\ \bar{H}_{z3} &= 0\end{aligned}\tag{A.8}$$

Na interface entre os meios, em $y=0$, as seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned}\bar{E}_{z1} &= \bar{E}_{z2} \\ \bar{E}_{x1} - \bar{E}_{x3} &= \bar{E}_{x2} - \bar{E}_{x4} \\ \bar{H}_{z3} &= \bar{H}_{z4} \\ \bar{H}_{x1} + \bar{H}_{x3} &= \bar{H}_{x2} + \bar{H}_{x4}\end{aligned}\tag{A.9}$$